

Universidade Federal Fluminense

Um GRASP com Reconexão de Caminhos para a Solução
do Problema da Maximização da Diversidade

Marcos Ribeiro Quinet de Andrade

Niterói, RJ – BRASIL

Dezembro de 2004

Marcos Ribeiro Quinet de Andrade

Um GRASP com Reconexão de Caminhos para a Solução do
Problema da Maximização da Diversidade

Orientadores: Prof. Alexandre Plastino
Profª. Simone de Lima Martins

Niterói, RJ – BRASIL

Dezembro de 2004

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de Computação da UFF

A553 Andrade, Marcos Ribeiro Quinet de
Um GRASP com reconexão de caminhos para a solução do
problema da maximização da diversidade / Marcos Ribeiro Quinet de
Andrade. – Niterói, RJ : [s.n.], 2004.
73 f.

Orientadores: Alexandre Plastino, Simone de Lima Martins.
Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) –
Universidade Federal Fluminense, 2004.

1. Metaheurística GRASP. 2. Heurística. 3. Otimização
(Computação). I. Título.

CDD 005.136

Um GRASP com Reconexão de Caminhos para a Solução do Problema da Maximização da Diversidade

Marcos Ribeiro Quinet de Andrade

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DA UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Alexandre Plastino de Carvalho - UFF

Prof. Celso da Cruz Carneiro Ribeiro - UFF

Prof. Luiz Satoru Ochi - UFF

Profa. Maria Claudia Silva Boeres - UFES

Profa. Simone de Lima Martins - UFF

Niterói, RJ – BRASIL
Dezembro de 2004

RESUMO

O problema da maximização da diversidade consiste, para uma determinada população, na identificação de um subconjunto de elementos baseando-se na diversidade de suas características, encontrando aqueles que apresentem a maior diversidade possível entre si.

A maximização da diversidade pertence à classe dos problemas NP-difíceis, sendo interessante a utilização de metaheurísticas para obtermos soluções ótimas ou próximas das ótimas em um tempo considerado viável.

O objetivo principal deste trabalho é aplicar uma versão da heurística GRASP para a resolução do problema acima descrito que empregue a técnica de reconexão de caminhos. A partir de uma versão de um algoritmo GRASP existente na literatura são incorporados diferentes métodos para se realizar a reconexão de caminhos, na busca por soluções de maior qualidade. A partir dos resultados obtidos, verifica-se que é possível a obtenção de soluções superiores às obtidas pela abordagem já desenvolvida. Torna-se possível ainda a obtenção de soluções que apresentem uma determinada qualidade em um menor tempo computacional.

Conteúdo

1	Introdução	3
2	O Problema da Maximização da Diversidade	5
2.1	Descrição do Problema.....	5
2.2	Metaheurística GRASP.....	8
2.3	GRASP Utilizado.....	10
2.3.1	Filtro de Soluções.....	14
3	GRASP com Reconexão de Caminhos	16
3.1	GRASP com Reconexão de Caminhos Proposto.....	18
3.1.1	Reconexão de Caminhos.....	22
4	Resultados Computacionais	25
4.1	Instâncias Utilizadas.....	26
4.1.1	Matrizes do tipo A – Indivíduos Aleatórios.....	26
4.1.2	Matrizes do tipo B – Distâncias Aleatórias.....	26
4.1.3	Matrizes do tipo C – Distribuição Desbalanceada Inferior.....	27
4.1.4	Matrizes do tipo D – Distribuição Desbalanceada Superior.....	27
4.1.5	Matrizes do tipo E – Aleatórias.....	27
4.2	Comparação entre as Variações da Metaheurística GRASP.....	27
4.3	Tempos Computacionais.....	54
4.4	GRASP com Tempo de Execução Limitado.....	58
4.5	Análise Referente ao Tamanho do Conjunto Elite.....	60
5	Conclusões	62
6	Referências Bibliográficas	64

Lista de Figuras

2.1: Pseudo-código para a função GRASP.....	14
3.1: Pseudo-código para o GRASP com reconexão de caminhos.....	21
3.2: Pseudo-código para a função de reconexão de caminhos.....	24
4.1, 4.2 e 4.3: Comparação dos resultados das estratégias de reconexão de caminhos e GRASP para a matriz B150 utilizando os alvos fácil, intermediário e difícil, respectivamente.....	38
4.4: Comparação dos resultados das estratégias de reconexão de caminhos e GRASP para a matriz C150 utilizando o alvo único (considerado fácil).....	39
4.5, 4.6 e 4.7: Comparação dos resultados das estratégias de reconexão de caminhos e GRASP para a matriz D150 utilizando os alvos fácil, intermediário e difícil, respectivamente.....	40
4.8, 4.9 e 4.10: Comparação entre a quantidade de iterações requeridas pela reconexão de caminhos e pelo GRASP para a obtenção das soluções alvo fácil, intermediária e difícil, respectivamente, para a matriz B150.....	42
4.11: Comparação entre a quantidade de iterações requeridas pela reconexão de caminhos e pelo GRASP para a obtenção da solução alvo única (considerada fácil) para a matriz C150.....	43
4.12, 4.13, 4.14: Comparação entre a quantidade de iterações requeridas pela reconexão de caminhos e pelo GRASP para a obtenção das soluções alvo fácil, intermediária e difícil, respectivamente, para a matriz D150.....	44
4.15: Comparação entre o número de vezes que a solução gerada por uma das estratégias foi superior à solução gerada pela outra para a matriz B150.....	45
4.16: Comparação entre o número de vezes que a solução gerada por uma das estratégias foi superior à solução gerada pela outra para a matriz C150.....	46
4.17: Comparação entre o número de vezes que a solução gerada por uma das estratégias foi superior à solução gerada pela outra para a matriz D150.....	47

4.18: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo fácil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.....	48
4.19: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo fácil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.....	48
4.20: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo intermediário para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.....	49
4.21: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo intermediário para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.....	49
4.22: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo difícil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.....	50
4.23: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo difícil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.....	50
4.24: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo fácil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.....	51
4.25: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo fácil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.....	51
4.26: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo intermediário para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.....	52
4.27: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo intermediário para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.....	52
4.28: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo difícil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.....	53
4.29: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo difícil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.....	53

Lista de Tabelas

4.1: Diversidades obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos (T1, T2 e T3) aplicados em subgrupos equivalentes a 20% da população e empregando ambos os métodos (E1 e E2) de escolha de uma solução do conjunto elite.....	30
4.2: Diversidades obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos (T1, T2 e T3) aplicados em subgrupos equivalentes a 40% da população e empregando ambos os métodos (E1 e E2) de escolha de uma solução do conjunto elite.....	31
4.3: Diversidades médias obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos aplicados para subgrupos equivalentes a 20% da população.....	34
4.4: Diversidades médias obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos aplicados para subgrupos equivalentes a 40% da população.....	34
4.5: Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 20% da população original sem a utilização do filtro.....	56
4.6: Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 20% da população original com a utilização do filtro.....	56
Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 40% da população original sem a utilização do filtro.....	57
4.8: Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 40% da população original com a utilização do filtro.....	57
4.9: Comparação dos resultados obtidos pelo GRASP simples, GRASP limitado por tempo, o pior e o melhor resultados obtidos através do GRASP associado a uma das técnicas de reconexão de caminhos para subgrupos equivalentes a 20% da população.....	58
4.10: Comparação dos resultados obtidos pelo GRASP simples, GRASP limitado por tempo, o pior e o melhor resultados obtidos através do GRASP associado a uma das técnicas de reconexão de caminhos para subgrupos equivalentes a 40% da população.....	59

4.11: Diversidades médias obtidas para soluções formadas por subgrupos de 20% e 40% da população utilizando um conjunto elite composto por cinco soluções distintas.....	60
4.12: Diversidades médias obtidas para soluções formadas por subgrupos de 20% e 40% da população utilizando um conjunto elite composto por dez soluções distintas.	61
4.13: Diversidades médias obtidas para soluções formadas por subgrupos de 20% e 40% da população utilizando um conjunto elite composto por vinte soluções distintas.....	61

Capítulo 1

Introdução

Existe uma grande quantidade de problemas nos mais diversos campos de aplicação cujo objetivo é, a partir de um grupo de indivíduos, obter um subgrupo formado segundo um critério pré-estabelecido. Quando o objetivo definido é a seleção dos indivíduos que apresentem a maior diversidade possível considerando-se suas características, este problema é definido como o Problema da Maximização da Diversidade (PMD). O objetivo desta dissertação é o estudo de técnicas de otimização que podem ser empregadas na resolução deste problema.

Um exemplo de aplicação do PMD é a realização de uma pesquisa sócio-econômica, na qual desejamos selecionar um subgrupo de indivíduos de uma população, por exemplo, de um município, que representem a maior diversidade possível entre os aspectos a serem considerados, como diferenças culturais, escolaridade, renda, entre outras. Desta forma, pode-se obter informações a partir deste subgrupo selecionado que expressam a de toda a população.

Estudos anteriores [12] demonstraram que a obtenção de soluções exatas para o PMD é um problema NP-difícil, sendo, desta forma, computacionalmente intratável. Devido a esta restrição, mostra-se interessante a adoção, no processo de obtenção de uma solução, de um método que seja capaz de obter soluções de alta qualidade, que ocasionalmente podem ser ótimas, em tempo computacional considerado viável.

A metaheurística GRASP [4] (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*), criada por Feo e Resende consiste em um método iterativo para problemas combinatoriais. Esta técnica obtém soluções a cada iteração executada através de uma fase de construção, seguida de uma busca local, que tenta encontrar uma solução de melhor qualidade na vizinhança da solução construída, em tempo computacional viável. Em [2] e [5], a

metaheurística GRASP é aplicada ao PMD, mostrando-se eficiente na obtenção de soluções ótimas ou próximas à ótima.

O objetivo desta dissertação é o estudo da técnica de reconexão de caminhos [6], explorando as soluções existentes nos caminhos entre pares de soluções obtidas através do GRASP. Realizam-se testes para as mesmas instâncias utilizadas em [2] e para instâncias maiores, formadas por 300, 400 e 500 elementos [18]. São estudados os resultados obtidos através das diferentes formas de se caminhar entre as duas soluções, e a forma utilizada para selecionar as soluções envolvidas na reconexão de caminhos.

O restante desta dissertação está organizado nos seguintes capítulos:

- Capítulo 2 – O Problema da Maximização da Diversidade: Apresenta-se a descrição formal do PMD e uma versão da metaheurística GRASP utilizada para sua resolução.
- Capítulo 3 – GRASP com Reconexão de Caminhos: Apresenta-se a definição do método de reconexão de caminhos e a versão proposta nesta dissertação.
- Capítulo 4 – Resultados Computacionais: Apresentam-se os resultados obtidos através das diferentes técnicas de aplicação do GRASP com reconexão de caminhos, que são comparados com os obtidos com o GRASP sem nenhuma estratégia adicional.
- Capítulo 5 – Conclusões: Discutem-se os resultados obtidos e apontam-se algumas direções para trabalhos futuros.

Capítulo 2

O Problema da Maximização da Diversidade

Neste capítulo é descrito o Problema da Maximização da Diversidade e apresenta-se sua formulação matemática. Apresenta-se ainda a formulação da metaheurística GRASP e a implementação utilizada.

2.1 Descrição do Problema

Problemas de otimização combinatória são aqueles em que se deseja maximizar ou minimizar uma função de múltiplas variáveis, estando sujeita a restrições de igualdade ou desigualdade. Uma grande variedade de problemas reais, como a alocação de funcionários para executar tarefas dentro de uma empresa ou o funcionamento de uma linha de produção, podem ser definidos como problemas de otimização combinatória.

Muitos destes problemas são computacionalmente difíceis, sendo inviáveis de serem resolvidos por algoritmos exatos. Nestes casos, pode mostrar-se interessante a utilização de métodos computacionais que não realizem a exploração de todo o espaço de soluções possíveis e sejam capazes de encontrar uma solução considerada de alta qualidade, mas que não é necessariamente a melhor existente, para isso demandando uma quantidade de tempo significativamente inferior à necessária por métodos que realizem a exploração de todas as possíveis soluções.

O problema da maximização da diversidade (PMD) caracteriza-se como sendo da categoria dos problemas de otimização combinatória, sendo descrito a seguir. Dada uma população de indivíduos $P = [p_1, \dots, p_n]$, suponha que cada indivíduo p_i possua r atributos cujos valores são dados por p_{ik} , com $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, $k \in R = \{1, 2, \dots, r\}$. Desta forma, o vetor de atributos de um indivíduo p_i qualquer pode ser representado da forma $(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ir})$.

O PMD tem como objetivo determinar um subgrupo de m indivíduos dentre os n indivíduos da população P que apresente a maior diversidade possível dentre suas características, representadas por seus respectivos atributos. A diversidade entre indivíduos pode ser representada através de um grau de diferença.

O grau de diferença entre dois indivíduos pode ser representado através de um único valor, obtido através do cálculo de alguma distância entre eles. Por exemplo, utilizando-se a distância euclidiana, o grau de diferença d_{ij} entre dois indivíduos i e j pode ser calculado segundo a Fórmula 2.1:

$$(2.1) \quad d_{ij} = \left[\sum_{k=1}^r (p_{ik} - p_{jk})^2 \right]^{1/2}$$

Apesar de simples, este método pode não se mostrar adequado para qualquer caso. Utilizando a distância Euclidiana como método de obtenção do grau de diferença entre dois indivíduos, torna-se possível a atribuição de diferentes pesos para cada um dos atributos e até mesmo diferentes pesos para cada um dos possíveis valores de um atributo. Desta forma, pode-se estabelecer que a diferença em uma das características entre dois indivíduos torna-os mais diversos entre si do que se uma diferença fosse observada em outro dos atributos que os caracterizam, ou até mesmo se fosse observada em outros valores do mesmo atributo. Para exemplificar esta situação, considere uma análise de pessoas, onde um dos atributos a ser analisado é a cor dos olhos; sejam as cores castanho, azul e verde representadas, respectivamente, pelos valores numéricos 1, 2 e 3. A característica que importa ao problema é se as pessoas possuem olhos com cores diferentes. Trata-se de um caso em que o atributo é capaz de assumir mais de dois valores, e que os valores associados às cores castanho e verde contribuem para a obtenção de um maior grau de diferença do que o que pode ser obtido para as cores azul e castanho. Desta forma, os resultados demonstram que olhos castanhos e verdes são mais diferentes entre si do que olhos castanhos e azuis, enquanto na realidade a diferença a ser considerada é que os indivíduos diferem entre si por um único atributo.

Outra formulação matemática que pode ser empregada para a obtenção do grau de diferença entre dois indivíduos é o cálculo da distância de Hamming. Através deste método, quando comparados os atributos de cada par de indivíduos i e j , analisa-se somente se os valores associados aos atributos são iguais ou distintos, não importando o valor absoluto da

diferença entre eles. O grau de diferença a ser obtido por este método pode ser expresso pela Fórmula 2.2:

$$(2.2) \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^r f(p_{ik}, p_{jk}), \text{ onde } f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \neq y \\ 0, \text{ se } x = y \end{cases}$$

Utilizando a distância de Hamming, se os indivíduos i e j forem iguais, o grau de diferença d_{ij} será nulo; caso os r atributos de i e j sejam distintos, $d_{ij} = r$.

A partir dos atributos de cada indivíduo pertencente à população e da formulação matemática empregada para a obtenção do grau de diferença entre cada par de indivíduos, define-se uma matriz quadrada, diagonalmente simétrica e de ordem igual ao número de indivíduos que compõem a população, onde cada linha e cada coluna correspondem a um dos indivíduos da população. Cada valor da matriz representa o grau de diferença entre os indivíduos correspondentes à linha e à coluna em questão. As interseções entre as linhas e colunas correspondentes a um mesmo indivíduo têm o grau de diversidade representado pelo valor 0, já que não existe diferença, neste caso.

Para a matriz simétrica de dimensão n , formada pelos graus de diferença d_{ij} (onde $d_{ij} = d_{ji}$ e $d_{ii} = 0$), deseja-se selecionar o subgrupo S' formado por uma quantidade m pré-estabelecida de indivíduos ($n > m > 1$) de forma que os indivíduos selecionados sejam os mais diversos possíveis. O índice de diversidade para os indivíduos deste subgrupo pode ser expresso pela Fórmula 2.3 [5]:

$$(2.3) \quad Idiv = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m d_{ij}$$

Para os métodos de distância Euclidiana e distância de Hamming discutidos anteriormente, temos, respectivamente, as Fórmulas 2.4 e 2.5 para a obtenção do índice de diversidade máximo.

$$(2.4) \text{MAXD} = \max \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n d_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[\sum_{k=1}^r (p_{ik} - p_{jk})^2 \right]^{\frac{1}{2}} x_i x_j \right],$$

$$\text{sujeito a } \sum_{i=1}^n x_i = m, x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$(2.5) \text{MAXD} = \max \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n d_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^r f(p_{ik}, p_{jk}) \right], \text{ onde } f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \neq y \\ 0, \text{ se } x = y \end{cases},$$

$$\text{sujeito a } \sum_{i=1}^n x_i = m, x_i = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Kuo e Glover [12] demonstraram que a obtenção da melhor solução para o PMD é um problema NP-difícil, tornando inviável sua resolução em um tempo computacional considerado viável. Nestas condições, pode-se optar pela adoção de uma heurística de otimização combinatória para a obtenção de soluções. A seguir descreve-se a metaheurística GRASP selecionada para desenvolver este trabalho.

2.2 Metaheurística GRASP

A metaheurística GRASP foi proposta por Feo e Resende [4] como um processo caracterizado pela execução de um certo número de iterações, nas quais realiza-se um processo de construção de uma solução válida seguido de uma busca local. Trata-se de um processo multipartida para a obtenção de soluções aproximadas, mas que eventualmente serão ótimas, sendo empregado em problemas de otimização combinatória considerados computacionalmente difíceis [3, 13, 15]. Tem-se como resultado final do problema em questão a melhor solução gerada ao longo de todas as iterações executadas.

No processo de geração de soluções válidas, inicialmente uma solução viável é construída, um elemento por vez, de forma iterativa. Até que esta solução inicial tenha sido construída, a cada iteração desta etapa, o próximo elemento a ser adicionado à solução é escolhido dentre os indivíduos de uma lista restrita de candidatos (LRC), selecionado de forma aleatória, o que garante o aspecto probabilístico do método. O método é adaptativo

porque em cada iteração avaliam-se os candidatos baseando-se na solução parcialmente construída até o momento da iteração.

Para a criação da LRC, inicialmente é criada uma lista formada pelos indivíduos que ainda não fazem parte da solução, calculando-se suas contribuições para a solução e ordenando-se os elementos em função deste cálculo, de modo que o primeiro elemento ofereça a maior contribuição, e o último, a menor. A definição do tamanho da LRC pode basear-se em duas estratégias [17]: na cardinalidade adotada para a lista, ou seja, sendo x um parâmetro do problema representado por um valor inteiro, a lista será composta pelos x melhores indivíduos que ainda não fazem parte da solução, ou pode ser realizada considerando-se a contribuição de cada elemento candidato. Para este último caso, um parâmetro $\alpha \in [0,1]$ é utilizado para limitar o tamanho da LRC. Para o PMD, por exemplo, apenas os indivíduos cujos ganhos associados à inclusão na solução parcial estiverem no intervalo $[(1-\alpha)d_{\max}, d_{\max}]$ da lista inicial farão parte da LRC, onde d_{\max} representa a maior contribuição de um elemento para a solução. Se $\alpha = 1$, a construção será feita de forma aleatória, enquanto para $\alpha = 0$ tem-se o algoritmo guloso puro.

Como não existem garantias que a solução gerada pela fase de construção seja um ótimo local, é realizada uma nova etapa, chamada de busca local, onde a vizinhança da solução gerada pela fase de construção é analisada, em busca de alguma solução que, de acordo com a função objetivo estabelecida para o problema, apresente um resultado de qualidade superior ao obtido na etapa anterior. O espaço da vizinhança explorado é formado por soluções que possuem uma grande quantidade de indivíduos em comum com a solução construída, mas que possuem um ou mais indivíduos que fazem parte da população analisada, mas não da solução construída. Em geral, a fase de busca local representa a etapa mais dispendiosa em termos de trabalho computacional exigido pelo GRASP.

No algoritmo de busca local são analisadas soluções pertencentes à vizinhança, substituindo sucessivamente a solução atual (que no momento inicial é a solução gerada pela fase de construção) por uma melhor, pertencente à vizinhança. A escolha da melhor solução da vizinhança pode ser realizada segundo diferentes estratégias. Em um modo exaustivo, todas as soluções da vizinhança são analisadas em busca da que apresente a maior qualidade dentre elas. Uma outra maneira é escolher a primeira solução que apresente um custo melhor

que a solução corrente sem analisar todas as possíveis soluções. Para qualquer estratégia utilizada, caso exista uma solução vizinha melhor que a corrente, ela será considerada como corrente e o procedimento acima será executado até que nenhuma solução melhor seja encontrada.

2.3 GRASP Utilizado

A versão da metaheurística GRASP adotada nesta dissertação foi proposta em [2]. Trata-se de uma versão baseada na proposta original de Gosh [5], contando com novas estratégias implementadas na fase de construção, e considerando a análise prévia das características dos indivíduos da população, favorecendo a seleção dos indivíduos que apresentam os atributos mais favoráveis. Os resultados gerados pela versão desenvolvida em [2] foram superiores e mostraram ser possível a obtenção de soluções de melhor qualidade em tempos computacionais iguais ou inferiores aos apresentados nos resultados da formulação original do GRASP para o PMD.

Para a aplicação da análise das características da população, formada por n indivíduos, são utilizados dois vetores: SD , que armazena a soma dos índices de diversidades de um elemento em relação aos demais, e MD , que contém a média dos índices de diversidade de um elemento em relação aos demais. As representações matemáticas de SD e MD são dadas, respectivamente, pelas Fórmulas 2.6 e 2.7. Após a criação e preenchimento destas estruturas é iniciada a fase de construção do GRASP.

$$(2.6) \quad SD(i) = \sum_{j=1}^n d_{ij}$$

$$(2.7) \quad MD(i) = (\sum_{j=1}^n d_{ij}) / n$$

Na fase de construção do GRASP são executadas m iterações, correspondentes à quantidade de indivíduos do subgrupo que se deseja construir, que representará uma solução S viável. Na primeira iteração, o indivíduo i a ser inserido em S é selecionado de forma aleatória entre os m indivíduos que apresentem a maior soma de índices de diversidade, segundo os resultados armazenados em SD , o que garante que a solução comece a ser formada por um

indivíduo que apresente um alto valor da soma dos índices de diversidade em relação aos outros elementos. Para as $(m-1)$ iterações seguintes, os indivíduos serão selecionados para fazer parte da solução de acordo com a contribuição que sua inserção trará. Para cada iteração k tem-se uma solução parcial S_{k-1} , formada por $k-1$ ($2 \leq k \leq m$) indivíduos. Para se obter a solução S_k a partir de S_{k-1} , selecionam-se indivíduos de uma lista restrita de candidatos (LRC).

Para a criação desta lista, inicialmente é calculada a contribuição $\Delta g(i)$ de cada indivíduo i para a solução S_{k-1} . O primeiro passo para a obtenção de $\Delta g(i)$ é o cálculo de $SDS(i)$, que representa a contribuição dada por um indivíduo i na construção de uma solução S_k , considerando os elementos já presentes na solução parcialmente construída S_{k-1} . O $SDS(i)$ é o somatório dos índices de diversidade de i em relação aos outros indivíduos que já fazem parte da solução S_{k-1} , dividido pela quantidade de indivíduos que já fazem parte de S_{k-1} . A Fórmula 2.8 representa o cálculo para a obtenção de $SDS(i)$.

$$(2.8) \quad SDS(i) = \left(\sum_{j \in S_{k-1}} d_{ij} \right) / k - 1$$

O valor obtido através de $SDS(i)$ possui influência direta sobre o resultado $f(S_k)$, porém a escolha de i para se tornar parte da solução baseada no resultado obtido por $SDS(i)$ pode não ser adequada, pois existe a possibilidade de o indivíduo i selecionado em uma iteração k apresentar baixos valores de diversidade em relação aos próximos $m-k$ indivíduos que poderão ser incluídos em S .

É desejável que o método empregado na seleção do próximo indivíduo i a ser inserido na solução considere tanto os elementos que já fazem parte de S quanto os candidatos a serem avaliados nas próximas iterações. O valor da média $MD(i)$ estima o grau de diversidade de um elemento i em relação a toda população. Desta forma, o seguinte critério será adotado para o cálculo da contribuição $\Delta g(i)$ obtida pela inserção do indivíduo i . Caso o valor obtido por $SDS(i)$ seja maior do que a média da soma dos índices de diversidade $MD(i)$ e mais da metade dos indivíduos de S já tiver sido solucionada, isto é, $k > m/2$, o valor da contribuição $\Delta g(i)$ será o valor obtido através de $SDS(i)$. Caso contrário, $\Delta g(i)$ será dado pela Fórmula 2.9:

$$(2.9) \quad \Delta g(i) = \frac{SDS(i) + MD(i)}{2}$$

Segundo este método, até a metade da construção de uma solução são favorecidos os indivíduos que apresentem uma alta soma de distâncias em relação à solução parcialmente construída, e também uma alta média de distância em relação a todos os indivíduos da população. A partir da iteração onde mais da metade dos indivíduos de S já tiverem sido escolhidos ($k \geq m/2$), torna-se mais interessante a seleção de indivíduos que apresentam uma maior distância em relação aos indivíduos que já fazem parte de S . Tal estratégia tem como objetivo evitar a construção de soluções que em um momento inicial apresentam altos valores de diversidade, mas que dependendo dos indivíduos adicionados em iterações posteriores passe a apresentar um baixo índice de diversidade em relação a estes.

Para formar a LRC, são calculadas as contribuições $\Delta g(i)$ de todos os indivíduos. Estes são ordenados de forma decrescente e selecionam-se os m maiores valores de $\Delta g(i)$, para os quais é calculada a diferença D entre o maior $\Delta g(i)$ e o menor $\Delta g(i)$, dividido-a por $m-1$. A Fórmula 2.10 representa o cálculo para a obtenção de D .

$$(2.10) \quad D = \frac{\Delta g(i_{\max}) - \Delta g(i_{\min})}{m - 1}$$

Dentre estes m elementos, seleciona-se cada indivíduo i cuja diferença entre $\Delta g(i)$ e $\Delta g(i+1)$ seja inferior a diferença D . Desta forma, os indivíduos que apresentam $\Delta f(i)$ muito próximos não serão excluídos na construção de uma solução S , e evita-se a inclusão de indivíduos que possuem $\Delta g(i)$ muito distantes. Seleciona-se um indivíduo de forma aleatória na LRC para que seja inserido na solução S . Todo este processo é repetido até que a solução S seja completamente construída.

Na etapa de busca local, a vizinhança da solução S obtida durante a fase de construção é explorada em busca de soluções que apresentem um maior índice de diversidade. Realiza-se a troca de cada indivíduo da solução S por outro indivíduo da população que ainda não faz parte da solução. A cada nova solução S' construída, é calculado seu índice de diversidade,

que é comparado com o índice da melhor solução até o momento (que inicialmente é a solução gerada pela fase de construção). Se o valor do índice de diversidade S' for superior ao do índice de S , a solução S' será considerada a melhor solução encontrada pelo GRASP até o momento, e o procedimento acima se repete. A busca local termina quando nenhuma solução que apresente qualidade superior à atual for encontrada.

A Figura 2.1 ilustra o procedimento GRASP adotado. Na linha 1 é inicializada como vazia a variável que armazenará a melhor solução obtida pelo GRASP. Nas linhas 2 e 3 são construídos os vetores SD e MD, respectivamente. Na linha 4 é iniciada a construção de uma solução com a inclusão de um indivíduo selecionado aleatoriamente dentre os m maiores indivíduos do vetor SD. Entre as linhas 5 e 16 são selecionados os próximos indivíduos que farão parte da solução. Entre as linhas 6 a 12 são avaliados todos os indivíduos da população que ainda não fazem parte da solução. Na linha 7 avalia-se para o indivíduo i se o valor $SDS(i)$ atual é superior à média $MD(i)$ e se mais da metade dos indivíduos já foram analisados. Caso ambas as condições sejam atendidas, a contribuição DeltaG do indivíduo à solução será dada por seu valor de $SDS(i)$, caso contrário, o valor da contribuição será a média entre os valores $SDS(i)$ e $MD(i)$. Após o cálculo dos índices de contribuição DeltaG de todos os indivíduos que ainda não fazem parte da solução, na linha 13, ordenam-se todos os indivíduos e, dentre aqueles que apresentam os m maiores valores de DeltaG, calcula-se o valor D , obtido através da Fórmula 2.10. Na linha 14, cria-se a LRC com cada elemento que apresenta a diferença entre seu DeltaG e o do próximo indivíduo menor que D . Na linha 15, seleciona-se aleatoriamente um indivíduo da LRC. Na linha 16, o indivíduo armazenado na variável 'Indivíduo' é inserido na solução.

Entre as linhas 18 a 23 é realizada a busca local. Realiza-se a troca de um indivíduo que faz parte da melhor solução atual por outro indivíduo pertencente à população e que não faz parte da solução; o resultado desta troca é uma nova solução chamada de SoluçãoVizinhança. Das linhas 20 a 22 analisa-se qual conjunto de indivíduos possui o maior índice de diversidade. Se a nova solução produzida pela busca local for mais diversa que a melhor solução atual, será então considerada como a melhor solução obtida até o momento. O procedimento acima se repete para a melhor solução recém-encontrada até que não seja encontrada nenhuma solução melhor. Neste momento, o melhor resultado obtido é retornado na linha 24, finalizando a execução da heurística GRASP.

```

GRASP (População, TamanhoPopulação, TamanhoSolução, Semente)
1. Solução = { };
2. SD = CalculaSD;
3. MD = CalculaMD;
4. Solução = Solução U ObtémIndivInicial(SD, TamanhoSolução);
5. para k = 2 até TamanhoSolução faça
6.     para cada  $i \in$  (População - Solução) faça
7.         se  $SDS(i) > MD(i)$  e  $k > TamanhoSolução/2$  então
8.             DeltaG(i) = SDS(i);
9.         senão
10.            DeltaG(i) = (SDS(i)+MD(i))/2;
11.        fim se;
12.    fim para;
13.    D = CalculaD(TamanhoSolução, DeltaG);
14.    LRC = CriaLRC(D, DeltaG);
15.    Indivíduo = ObtémIndivíduo(LRC);
16.    Solução = Solução U {Indivíduo};
17. fim para;
18. enquanto Solução melhora
19.    SoluçãoVizinhança = ConstroiNovaSolução(Solução, População);
20.    se  $Diversidade(SoluçãoVizinhança) > Diversidade(Solução)$ 
21.        Solução = SoluçãoVizinhança;
22.    fim se;
23. fim enquanto;
24. Retorna (Solução);
fim GRASP;

```

Figura 2.1: Pseudo-código para a função GRASP.

2.3.1 Filtro de Soluções

No presente trabalho, verificou-se que a busca local desenvolvida para o GRASP demandava um percentual relevante do tempo total de processamento.

No caso da solução construída na k -ésima iteração ($k > 1$) S_k ser formada pelo mesmo conjunto de elementos de uma solução obtida na i -ésima iteração S_i (onde $i < k$), a aplicação da fase de busca local para S_k resultará no mesmo resultado já obtido para S_i . Para evitar a realização do trabalho computacional na busca local de uma solução já analisada foi criado um filtro para as soluções geradas pela fase de construção. Neste filtro, para cada valor de diversidade obtido são armazenadas uma ou mais soluções formadas por conjuntos distintos de elementos e suas respectivas soluções obtidas após a execução da busca local. Para todas as soluções geradas pela fase de construção do GRASP é realizada uma busca no filtro.

Para cada solução obtida durante a fase de construção, analisa-se se esta já se encontra na estrutura de armazenamento do filtro através de uma busca baseada em seu valor de diversidade. Procura-se na estrutura por uma entrada que corresponda ao valor de diversidade da solução construída. Caso não seja encontrada nenhuma ocorrência, significa que a solução em questão foi construída pela primeira vez. Neste caso, é realizada a fase de busca local para a solução e um novo registro, contendo o valor da diversidade, o conjunto de indivíduos que fazem parte da solução e o resultado gerado após a busca local é adicionado no filtro após o término desta.

O filtro é utilizado somente para as soluções obtidas através da fase de execução. Se na pesquisa ao filtro for encontrado o valor de diversidade correspondente a uma solução no filtro, podem existir uma ou mais soluções cuja diversidade corresponde ao valor em questão. Todas as soluções armazenadas no filtro correspondentes a este valor de diversidade são comparadas com a solução construída na iteração atual. Se for encontrada no filtro uma ocorrência da solução analisada, significa que já foi realizada uma busca local para esta solução em uma iteração anterior, logo, não será realizada uma nova busca local. Se não for encontrada uma solução formada pelo mesmo subconjunto de indivíduos da população inicial, significa que em iterações anteriores foram encontradas soluções constituídas por um ou mais indivíduos diferentes da solução atual, mas cujo cálculo de diversidade resulta no mesmo valor da solução em análise. Para este caso, será realizada a etapa de busca local, pois será a primeira vez que o GRASP terá produzido uma solução formada por este conjunto de indivíduos em particular. Os resultados apresentados no Capítulo 4 demonstram os benefícios obtidos pela utilização do filtro.

Capítulo 3

GRASP com Reconexão de Caminhos

A técnica de reconexão de caminhos foi proposta por Glover [6] como uma forma de explorar as possíveis trajetórias (soluções intermediárias) existentes entre duas soluções que apresentam um certo nível de qualidade, obtidas através de heurísticas como a busca tabu [3, 17] e *scatter search* [6, 7, 8].

A geração dos diversos caminhos possíveis é feita a partir de duas soluções, chamadas de solução início e guia. Os caminhos entre as duas soluções são gerados através da seleção de movimentos que gradualmente introduzem atributos da solução guia na solução início. Desta forma, ao percorrer estes caminhos temos a possibilidade de gerar diversas novas soluções, que guardam atributos da solução início, incorporando atributos que já fazem parte de outra solução de alta qualidade.

A formulação original da reconexão de caminhos prevê que, a partir de duas soluções chamadas *si* e *sg*, respectivamente, início e guia, a cada passo seja construída uma nova solução intermediária, formada pelos atributos pertencentes à solução início, e com a inserção de um atributo proveniente da solução guia, que substitui um dos atributos da solução início original. Esta solução intermediária é utilizada como a nova solução início no próximo passo da execução. Este processo se repete, inserindo-se mais atributos da solução guia, até o momento em que será gerada uma solução idêntica à guia. Neste momento considera-se a solução guia atingida e a execução da reconexão de caminhos para as soluções *si* e *sg* é concluída.

Através do cálculo da diferença simétrica¹ identificam-se os atributos que diferenciam as soluções selecionadas, e é estabelecido o conjunto de movimentos necessários para, a partir da solução início *si*, alcançar a solução guia *sg* estabelecida. Pela inserção, substituição ou retirada de diferentes atributos de *si* são geradas diferentes soluções intermediárias. Dentre as soluções geradas a partir de *si*, é selecionada aquela que apresenta o melhor valor para a função objetivo estabelecida para o problema em questão. Desta forma, está se analisando a vizinhança das soluções construídas e seguindo um caminho em direção ao guia estabelecido através da exploração de regiões próximas a soluções de qualidade.

Em diversos estudos recentes realizados sobre a utilização da reconexão de caminhos em conjunto com uma estratégia de otimização para diferentes aplicações [3, 13, 15], novas formas da aplicação da reconexão de caminhos entre duas soluções de qualidade são implementadas e os resultados obtidos são comparados. A seguir são apresentadas as técnicas mais frequentemente estudadas [16].

Reconexão *forward*: a reconexão de caminhos é aplicada utilizando, dentre as duas soluções disponíveis, a de pior qualidade como solução inicial, e a de melhor qualidade como solução guia.

Reconexão *backward*: a reconexão de caminhos é aplicada a partir da melhor solução, utilizando a pior solução como guia.

Reconexão *back and forward*: são explorados os dois sentidos possíveis entre as soluções. Parte-se de uma das soluções (de melhor ou pior qualidade) até que a outra seja atingida. Neste momento o processo de reconexão de caminhos continua a ser realizado, utilizando a solução atingida como início e a solução utilizada como ponto de partida original como solução guia.

Reconexão *mista*: os dois sentidos entre as soluções são explorados simultaneamente. A cada passo da reconexão de caminhos são geradas soluções intermediárias através da inserção de atributos da solução guia na solução início. Dentre estas soluções, a que apresentar a maior qualidade será utilizada no passo seguinte como nova solução guia, e a solução que foi utilizada como guia será a nova solução início. Os papéis de solução início e guia se alternam até que ambas as trajetórias atinjam a mesma solução.

¹ A diferença simétrica entre dois conjuntos é a diferença entre a união e a interseção destes.

Reconexão aleatória: ao invés de ser selecionado o movimento que gere a melhor nova solução intermediária, este é selecionado de forma aleatória de uma lista de candidatos mais promissores.

Reconexão truncada: apenas parte da trajetória entre as soluções início e guia é explorada.

Reconexão periódica: a reconexão de caminhos não é aplicada em todas as soluções geradas, mas periodicamente.

O objetivo de se estudar o comportamento das diferentes técnicas de execução de reconexão de caminhos é avaliar os resultados baseando-se em dois fatores: o tempo computacional de execução e a qualidade das soluções obtidas.

A aplicação da técnica de reconexão de caminhos como estratégia de otimização para resultados obtidos através do GRASP tem sido realizada de duas formas básicas [17]:

- Como uma estratégia de pós-otimização, aplicando a reconexão de caminhos entre todos os pares de soluções armazenados em um conjunto elite de soluções.
- Como uma estratégia de intensificação, sendo aplicado entre cada solução gerada pela fase de busca local e uma solução selecionada do conjunto elite.

Estas são apenas duas formas básicas possíveis, a partir das quais outras variações podem ser elaboradas. Por exemplo, uma variação da estratégia de intensificação é utilizar a reconexão periódica na qual estipula-se um valor para a frequência com que a reconexão de caminhos é aplicada.

3.1 GRASP com Reconexão de Caminhos Proposto

Dois aspectos fundamentais nos quais se baseia a utilização de metaheurísticas [10] são a intensificação, que consiste na concentração da busca por outras soluções em regiões promissoras do espaço de possíveis soluções, e a diversificação, que caracteriza a exploração de áreas mais diversas no espaço de soluções.

Na versão proposta, a reconexão de caminhos foi empregada como uma estratégia de intensificação, sendo utilizada após o término da execução da fase de busca local em cada iteração realizada. Desta maneira, a cada nova iteração, a reconexão de caminhos estará

utilizando, além de uma solução gerada pelo GRASP, uma solução de alta qualidade gerada em iterações prévias, armazenada em um conjunto elite de soluções.

O conjunto elite é uma estrutura de dados na qual se armazena uma quantidade limitada de soluções com o potencial de contribuir de forma mais significativa que as demais no processo de exploração de novas soluções de alta qualidade. Tal conjunto é construído e atualizado constantemente para que seja possível garantir que haja um equilíbrio entre a diversificação e a intensificação de soluções.

Foi utilizado um conjunto elite formado por soluções geradas pelo GRASP, e eventualmente, obtidas através da reconexão de caminhos. Como se deseja manter um repositório de soluções de alta qualidade, o tamanho deste conjunto é restrito a uma quantidade limitada de soluções. Inicialmente, este conjunto encontra-se vazio, mas a cada iteração do GRASP, um novo ótimo local é gerado e, enquanto houver posições vagas no conjunto elite, a solução gerada será nele armazenada, se for diferente das já inseridas. As soluções inseridas neste repositório são mantidas em ordem crescente de qualidade, e a partir do momento em que todas as posições estiverem preenchidas, a cada nova solução gerada, sua qualidade é comparada com as soluções existentes no repositório. Caso seja observado que a qualidade da solução gerada é superior a, pelo menos, a solução de menor qualidade armazenada no repositório, a nova solução é inserida, mantendo-se a ordenação das soluções, e a solução de menor qualidade é retirada.

Ao término de cada execução da reconexão de caminhos, a melhor solução intermediária construída é considerada como candidata à inserção no conjunto elite. A avaliação é feita seguindo os mesmos critérios observados para soluções geradas em uma iteração GRASP, e caso estes sejam satisfeitos, a solução gerada pela reconexão de caminhos é inserida no conjunto elite.

A seleção de uma solução do conjunto elite para a aplicação da técnica de reconexão de caminhos com a solução gerada em uma iteração do GRASP pode seguir duas estratégias: a seleção aleatória ou a seleção da solução que apresenta a maior qualidade dentre todas. A seleção aleatória garante que soluções mais diversas venham a ser selecionadas, o que resulta em uma exploração de uma área maior do espaço de busca, permitindo que a reconexão de caminhos construa soluções mais diversas. Por outro lado, a seleção da solução de maior

qualidade pertencente ao conjunto elite garante que uma das soluções envolvidas na reconexão de caminhos possua elementos cujos atributos favoreçam a construção de soluções de alta qualidade, o que auxilia a construção de novas soluções que contenham estes atributos desejáveis.

A Figura 3.1 ilustra o modelo geral utilizado neste trabalho para a implementação do GRASP com reconexão de caminhos, incluindo a utilização do filtro de soluções, apresentado no Capítulo 2, e os métodos de construção e utilização do conjunto de soluções elite.

Na linha 1 é lida a matriz contendo os índices de diversidade entre os elementos da população analisada. A seguir, na linha 2, é inicializada como vazia a variável que armazenará a melhor solução encontrada ao final do processo. Nas linhas 3 e 4 são inicializadas como vazias as estruturas que serão utilizadas como filtro de soluções e conjunto elite, respectivamente. Entre as linhas 5 e 31, executam-se as iterações GRASP. Na linha 6 é construída uma solução inicial viável para o problema, e nas linhas 7 a 13 verifica-se se ela já foi gerada na fase de construção em alguma iteração anterior. No caso de a solução não se encontrar no filtro, é realizada na linha 9 uma busca local para a mesma, e na linha 10 a solução gerada é armazenada no filtro. Caso a solução já se encontre armazenada no filtro não é realizada uma nova busca local, e na linha 12 o resultado armazenado no filtro referente à busca local executada para esta solução é localizado para ser utilizado nos passos seguintes. Na linha 14, pesquisa-se se a solução gerada será inserida na elite. Duas situações podem ocorrer: se ainda existirem posições vazias no conjunto elite, a solução será inserida nele independente de sua diversidade, contanto que já não exista uma solução idêntica a ela em outra posição do conjunto elite. No caso em que todas as posições do conjunto elite já se encontrarem preenchidas, avalia-se através do valor da diversidade se a solução será inserida no conjunto elite. Para tanto, este valor deve ser superior, ao menos, ao da solução de menor qualidade, que neste caso, será a solução removida do conjunto elite. Para ambos os casos, a inserção de uma solução é feita entre as linhas 15 e 17. Caso o conjunto elite já esteja completo, entre as linhas 19 a 29 será aplicada a estratégia de reconexão de caminhos. Na linha 19, uma das soluções pertencentes ao conjunto elite é selecionada utilizando-se o critério aleatório ou o de melhor qualidade. Executa-se a chamada ao procedimento de reconexão de caminhos na linha 20, informando as soluções a serem utilizadas e a estratégia empregada. No presente estudo é possível optar-se pela reconexão que caminha da melhor para a pior solução, da pior para a melhor solução ou pela reconexão mista. Após a conclusão

da reconexão de caminhos, a melhor solução obtida em suas iterações é analisada entre as linhas 22 e 24 para determinar se será ou não inserida no conjunto elite. Finalmente, da linha 25 até 29, a melhor solução gerada pela reconexão de caminhos é comparada com a solução obtida através das etapas do GRASP simples, e na linha 32, o melhor resultado obtido é retornado.

```

GRASPcomReconexão (População, TamanhoSolução, TamanhoPopulação, NúmeroIterações,
                    Semente, EscolhaElite, TipoReconexão)
1. LêMatrizDiversidades( );
2. MelhorSolução = { };
3. Filtro = { };
4. Elite = { };
5. para i = 1 até NúmeroIterações faça
6.     Solução = ConstróiSolução(População, TamanhoSolução, Semente);
7.     EstáFiltro = PesquisaFiltro (Filtro, Solução);
8.     se (não EstáFiltro) então
9.         Solução = BuscaLocal (Solução);
10.        InsereFiltro(Solução);
11.    senão
12. Solução = BuscaSoluçãoApósBuscaLocal (Filtro, Solução);
13.    fim se;
14.    InsereElite = PesquisaElite (Elite, Solução);
15.    se InsereElite for verdadeiro então
16.        InsereConjuntoElite (Elite, Solução);
17.    fim se;
18.    se ConjuntoElitePreenchido então
19.        SoluçãoElite = SeleccionaSoluçãoElite (Elite, EscolhaElite);
20.        MelhorSoluçãoIntermediária = ReconexãoCaminhos(Solução, SoluçãoElite,
                TipoReconexão);
21.        InsereElite = PesquisaFiltro (Elite, MelhorSoluçãoIntermediária);
22.        se InsereElite for verdadeiro então
23.            InsereSoluçãoElite (Elite, MelhorSoluçãoIntermediária);
24.        fim se;
25.        se Diversidade(MelhorSoluçãoIntermediária) > Diversidade(Solução) então
26.            MelhorSolução = MelhorSoluçãoIntermediária;
27.        senão
28.            MelhorSolução = Solução;
29.        fim se;
30.    fim se;
31. fim para;
32. Retorna (MelhorSolução);
fim GRASPcomReconexão.

```

Figura 3.1: Pseudo-código para o GRASP com reconexão de caminhos.

3.1.1 Reconexão de Caminhos

Neste trabalho a reconexão de caminhos pode ser realizada segundo três estratégias distintas. Utilizando a estratégia de reconexão referida como T1, parte-se da solução de melhor qualidade até que seja atingida a solução de pior qualidade. Na estratégia referida como T2, é explorado o sentido inverso de T1, parte-se da solução de pior qualidade até que seja atingida a solução de melhor qualidade. Finalmente, na estratégia de reconexão mista, referida como T3, a partir de uma solução início e uma guia são explorados dois caminhos simultaneamente. A cada passo é obtida uma solução intermediária, que será utilizada como guia no passo seguinte, enquanto a solução guia passará a ser utilizada como início. No pseudo-código da Figura 3.2, o passo inicial de T3 é feito partindo da melhor solução como inicial e a pior como guia. A atribuição inversa destes papéis (adotando como solução início a pior e como guia a melhor) pode ser realizada sem prejudicar a generalidade do algoritmo, servindo apenas para definir um ponto inicial para a aplicação da reconexão de caminhos.

A Figura 3.2 ilustra o funcionamento do procedimento de reconexão de caminhos implementado neste trabalho. A reconexão de caminhos é realizada a cada iteração do GRASP, passando-se como parâmetros a solução obtida após a busca local e uma solução selecionada do conjunto elite. Nas linhas 1, 2 e 3 são inicializadas as estruturas que irão armazenar a solução gerada pela reconexão de caminhos em cada iteração, a melhor dentre as soluções geradas em cada iteração e a melhor solução intermediária encontrada durante toda a reconexão de caminhos, respectivamente. Das linhas 4 a 10 comparam-se os índices de diversidade da solução gerada pelo GRASP e da solução do conjunto elite, para se determinar qual delas apresenta a melhor qualidade. Entre as linhas 11 e 17 são atribuídos os papéis de solução início e guia, dependendo da estratégia de reconexão utilizada. Entre as linhas 18 e 28 são executadas as iterações referentes ao processo de reconexão de caminhos. Na linha 19, é inicializada a variável onde será armazenada a melhor solução intermediária encontrada pela reconexão de caminhos para a iteração corrente. Na linha 20, obtêm-se os indivíduos que distinguem as soluções início e guia. Na linha 21, geram-se todas as soluções intermediárias através da troca de um indivíduo pertencente à solução início e não pertencente à solução guia por um indivíduo pertencente à solução guia e não pertencente à solução início. E para cada uma destas soluções, calcula-se seu índice de diversidade. Será selecionada como a solução intermediária gerada aquela que apresentar o maior índice de diversidade dentre todas. Nas linhas 22 a 24, é verificado se a melhor solução intermediária obtida é superior a melhor

solução encontrada pela reconexão de caminhos. Em caso positivo, a variável MelhorSoluçãoRC é atualizada com a solução intermediária gerada. Entre as linhas 25 e 30 atribuem-se os papéis de solução início e guia a serem utilizados no passo seguinte da reconexão de caminhos. Se o tipo de reconexão a ser aplicado for do tipo 1 ou 2, que caminham seguindo uma única trajetória, a nova solução início será a melhor solução intermediária encontrada na iteração atual. Se a reconexão a ser aplicada for do tipo 3, das linhas 27 a 30 são definidos os papéis de início e guia para que a outra trajetória venha a ser explorada. Na próxima iteração parte-se da solução que foi utilizada como guia em direção a melhor solução intermediária gerada nesta iteração. Este processo é repetido até que a solução guia seja atingida e a melhor solução obtida durante toda a execução é retornada na linha 32, terminando o processo de reconexão de caminhos.

```

ReconexãoCaminhos (Solução, SoluçãoElite, TipoReconexão)
1. SoluçãoIntermediária = { };
2. MelhorSoluçãoIntermediária = { };
3. MelhorSoluçãoRC = { };
4. se Diversidade (SoluçãoElite) > Diversidade (Solução)
5.     Melhor = SoluçãoElite;
6.     Pior = Solução;
7. senão
8.     Melhor = Solução;
9.     Pior = SoluçãoElite;
10. fim se;
11. se TipoReconexão = 1 ou 3 //T1 e primeiro passo de T3: melhor para
                               pior
12.     Início = Melhor;
13.     Guia = Pior;
14. senão se TipoReconexão = 2 //T2: pior para melhor
15.     Início = Pior;
16.     Guia = Melhor;
17. fim se;
18. enquanto (Guia) for diferente de (Início) faça
19.     MelhorSoluçãoIntermediária = { };
20.     ElementosDistintos = ObtémElementosDistintos (Início, Guia);
21.     MelhorSoluçãoIntermediária=ObtémMelhorSoluçãoIntermediária
(Início,ElementosDistintos);
22.     se MelhorSoluçãoIntermediária > MelhorSoluçãoRC
23.         MelhorSoluçãoRC = MelhorSoluçãoIntermediária;
24.     fim se;
25.     se TipoReconexão = 1 ou 2
26.         Início = MelhorSoluçãoIntermediária;
27.     senão //tipo 3
28.         Início = Guia;
29.         Guia = MelhorSoluçãoIntermediária;
30.     fim se;
31. fim enquanto;
32. Retorna (MelhorSoluçãoRC);
fim ReconexãoCaminhos.

```

Figura 3.2: Pseudo-código para a função de reconexão de caminhos.

Capítulo 4

Resultados Computacionais

Neste capítulo são apresentados os resultados computacionais obtidos através da utilização da metaheurística GRASP na resolução do PMD, a qual será referenciada como GRASP simples, e os resultados gerados pelo GRASP associado com as diferentes técnicas de reconexão de caminhos discutidas no capítulo anterior. Os testes realizados basearam-se em diferentes aspectos a serem estudados: qualidade das soluções obtidas e os tempos computacionais exigidos.

As baterias de testes foram executadas utilizando-se matrizes cujos elementos representam o grau de diferença entre os indivíduos da população. Estas matrizes foram construídas segundo diferentes critérios adotados, sendo classificadas como A, B, C, D e E. Os métodos utilizados para a obtenção de cada uma destas matrizes são apresentados na Seção 4.1. As execuções para as matrizes A, B, C e D foram realizadas em um microcomputador com processador Intel Pentium III de 550 MHz com 384 Megabytes de memória RAM e sob o sistema operacional Red Hat Linux com kernel 2.4. Os testes para as matrizes do tipo E, que são as de maior dimensão, foram executados em microcomputadores AMD Athlon de 1.3 GHz com 256 Megabytes de memória RAM, devido ao alto tempo computacional necessário. As implementações foram escritas na linguagem C segundo o padrão ANSI e compiladas utilizando a versão 2.9.6 do gcc. Os resultados foram obtidos utilizando-se o poder computacional da máquina de forma exclusiva para cada execução.

Na Seção 4.1, descrevem-se as matrizes de diversidade utilizadas. Na Seção 4.2, são apresentados os testes realizados para as variantes da metaheurística GRASP, os resultados obtidos e conclusões.

4.1 Instâncias Utilizadas

As instâncias do PMD utilizadas para testar as heurísticas GRASP são especificadas por uma matriz de diversidade, que representa os graus de diversidade entre os indivíduos da população, e um valor que determina o tamanho do conjunto de diversidade máxima a ser encontrado, definido como uma porcentagem do número de elementos da população.

Foram utilizados cinco tipos distintos de matrizes, A, B, C, D e E. Estas matrizes são geradas e utilizadas por [2, 18]. As instâncias cujos graus de diversidade são representados pelas matrizes A, B, C e D possuem populações de 50, 100, 150, 200 e 250 indivíduos. Para gerá-las, construiu-se inicialmente uma matriz de 250 indivíduos e, a partir dela, selecionaram-se submatrizes de 50, 100, 150 e 200 elementos. As matrizes do grupo E foram geradas de forma independente para 300, 400 e 500 elementos. As Subseções 4.1.1 a 4.1.5 detalham a formação de cada tipo de matriz utilizado, apresentando o modelo aplicado na construção de cada tipo.

4.1.1 Matrizes do tipo A – Indivíduos Aleatórios

As matrizes do tipo A foram criadas a partir de uma população aleatória de 250 indivíduos, onde cada um destes é representado por seis atributos, que podem assumir um valor inteiro entre 1 e 9. Todos os indivíduos da população são distintos e os valores de seus atributos foram gerados aleatoriamente.

Através do cálculo da distância Euclidiana criou-se uma matriz com o grau de diferença entre cada par de indivíduos da população. As matrizes de menor dimensão deste tipo são sub-matrizes criadas a partir desta matriz principal.

4.1.2 Matrizes do tipo B – Distâncias Aleatórias

Construiu-se uma matriz de diversidade correspondente a uma população formada por 250 indivíduos distintos cujos valores foram obtidos de forma aleatória, a partir de uma distribuição homogênea de números inteiros entre 1 e 9999. A partir desta matriz principal construíram-se sub-matrizes correspondentes a populações formadas por uma menor

quantidade de indivíduos. Classificaram-se as matrizes construídas através deste tipo de distribuição como B.

4.1.3 Matrizes do tipo C – Distribuição Desbalanceada Inferior

Os graus de diferença entre indivíduos das matrizes do tipo C foram gerados de forma que 50% são valores inteiros aleatórios entre 1 e 9999 distribuídos de forma homogênea, e os 50% restantes foram selecionados de forma aleatória entre valores inteiros entre 1 e 4999.

4.1.4 Matrizes do tipo D – Distribuição Desbalanceada Superior

Para as matrizes do tipo D, 50% dos graus de diferença entre os indivíduos foram selecionados de forma aleatória entre números inteiros no intervalo de 1 a 9999, distribuídos de forma homogênea. Os 50% restantes são números inteiros selecionados de forma aleatória entre 5000 e 9999.

4.1.5. Matrizes do tipo E – Aleatórias

Os graus de diferença que formam as matrizes de diversidade desta categoria são valores inteiros selecionados de forma aleatória no intervalo de 0 a 9. Para este grupo foram construídas matrizes correspondentes a populações formada por 300, 400 e 500 indivíduos.

4.2 Comparação entre as Variações da Metaheurística GRASP

A primeira bateria de testes realizada caracterizou-se pela execução da metaheurística GRASP descrita no Capítulo 3 sem qualquer estratégia de otimização adicional, e do GRASP em conjunto com a técnica de pós-otimização de reconexão de caminhos. Para as matrizes descritas na Seção 4.1, foram realizadas sete baterias de testes para cada uma das matrizes com populações de 50, 100, 150, 200, 250, 300, 400 e 500 indivíduos. Executaram-se o GRASP simples e as seis possíveis combinações de estratégias de reconexão de caminhos e modo de escolha do elemento no conjunto elite. Para cada matriz, duas soluções para o PMD foram obtidas. Na primeira, o subgrupo de indivíduos que representa uma solução possui tamanho igual a 20% do tamanho da população, e na segunda, 40%.

Para a análise dos resultados obtidos serão adotadas deste ponto em diante as seguintes convenções para identificar os métodos empregados. Foram aplicadas as seguintes variantes de reconexão de caminhos: a que caminha da melhor para a pior solução, denominada **T1**, a que caminha da pior para a melhor solução, **T2**, e a que a cada iteração alterna os papéis de solução início e guia, até que ambas as trajetórias cheguem a uma mesma solução, denominada **T3**.

Em relação à escolha da solução do conjunto elite a ser empregada na aplicação da reconexão de caminhos, duas estratégias foram utilizadas: aleatória, sorteando qualquer uma dentre as soluções do *pool*, ou a escolha da melhor do *pool*, denominadas **E1** e **E2**, respectivamente.

Em todos os experimentos realizados utilizou-se o filtro para soluções, uma vez que pelos resultados obtidos e apresentados na seção 4.4, evidenciou-se sua contribuição.

Inicialmente, as sete estratégias foram executadas uma única vez, sendo que cada uma delas executou um total de 1000 iterações. Os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas 4.1 e 4.2. Nestas tabelas, a primeira coluna indica a instância testada. No identificador da instância, a letra se refere ao tipo da matriz e o número especifica o tamanho da população. A segunda coluna se refere aos resultados obtidos com o GRASP simples, que representam os índices de diversidade entre os indivíduos de uma solução. Quanto maior este valor, mais diversos entre si são os indivíduos da solução. As colunas seguintes representam diferentes estratégias obtidas pela combinação das variantes da reconexão de caminhos (T1, T2 e T3) com diferentes formas de escolha do elemento do conjunto elite (E1 e E2). A última coluna se refere ao melhor resultado conhecido [18] para as instâncias utilizadas.

O conjunto elite é formado por cinco soluções distintas. Enquanto esta estrutura não estiver completa, a reconexão de caminhos não é realizada. Desta forma, durante as primeiras iterações, as soluções obtidas pelo GRASP simples são inseridas no conjunto elite, caso uma solução idêntica já não tenha sido obtida em uma iteração anterior, o que faria com que ela já estivesse presente no conjunto elite.

Os resultados obtidos para soluções formadas por subgrupos de indivíduos correspondentes a 20% da população estão representados na Tabela 4.1. Na Tabela 4.2, são

apresentados os resultados gerados nas mesmas condições dos apresentados na Tabela 4.1, porém, para subgrupos formados por 40% da população.

A fim de facilitar a compreensão dos resultados a seguir, duas convenções são empregadas nas tabelas. Nas instâncias em que o comportamento das sete estratégias não foi o mesmo, valores em negrito indicam resultados melhores do que os do GRASP simples. Não houve casos em que o GRASP simples tenha sido melhor do que alguma das seis variações. O melhor valor obtido para cada instância dentre as sete estratégias avaliadas para subgrupos de 20% e 40% estará marcado com um asterisco (*).

Inst.	GRASP	T1E1	T2E1	T3E1	T1E2	T2E2	T3E2	Melhor
A050	491,91162	491,91162	491,91162	491,91162	491,91162	491,91162	491,91162	491,91162
A100	2007,09084	2007,09084	2007,09084	2007,09084	2007,09084	2007,09084	2007,09084	2007,09084
A150	4552,11481	4552,11481	4552,11481	4552,11481	4552,11481	4552,11481	4552,11481	4552,11481
A200	8132,138	8132,138	8132,138	8132,138	8132,138	8132,138	8132,138	8132,138
A250	12653,99931	12653,99931	12653,99931	12653,99931	12653,99931	12653,99931	12653,99931	12653,99931
B050	334976	334976	334976	334976	334976	334976	334976	334976
B100	1267277	1267277	1267277	1267277	1267277	1267277	1267277	1267277
B150	2758381	2758381	2758381	2758381	2758381	2758381	2758381	2758381
B200	4787819	4788086*	4788086*	4788086*	4788086*	4788086*	4788086*	4788086
B250	7378534	7388307	7388471	7388501*	7388471	7388471	7388501*	7388997
C050	316409	316409	316409	316409	316409	316409	316409	316409
C100	1207522	1207522	1207522	1207522	1207522	1207522	1207522	1207522
C150	2613286	2613286	2613286	2613286	2613286	2613286	2613286	2613286
C200	4627942	4630545*	4630545*	4630545*	4630545*	4630545*	4630545*	4630545
C250	7177365	7178043*	7178043*	7178043*	7178043*	7178043*	7178043*	7178043
D050	381379	381379	381379	381379	381379	381379	381379	381379
D100	1570800	1570800	1570800	1570800	1570800	1570800	1570800	1570800
D150	3498551	3500593	3500593	3500593	3502215*	3502215*	3502215*	3502567
D200	6201319	6202900*	6201603	6202900*	6202900*	6202900*	6202900*	6207580
D250	9673201	9679220	9676047	9677761	9680718*	9680718*	9680718*	9685430
E300	9653	9689*	9689*	9689*	9684	9684	9684	9684
E400	16870	16906*	16906*	16906*	16906*	16906*	16906*	19647
E500	26158	26179	26179	26179	26197*	26197*	26197*	26229

Tabela 4.1: Diversidades obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos (T1, T2 e T3) aplicados em subgrupos equivalentes a 20% da população e empregando ambos os métodos (E1 e E2) de escolha de uma solução do conjunto elite.

Inst.	GRASP	T1E1	T2E1	T3E1	T1E2	T2E2	T3E2	Melhor
A050	1931,58771	1931,58771	1931,58771	1931,58771	1931,58771	1931,58771	1931,58771	1931,58771
A100	7730,09847	7730,09847	7730,09847	7730,09847	7730,09847	7730,09847	7730,09847	7730,09847
A150	17482,46857	17482,46857	17482,46857	17482,46857	17482,46857	17482,46857	17482,46857	17482,46857
A200	31048,6465	31048,6465	31048,6465	31048,6465	31048,6465	31048,6465	31048,6465	31048,6465
A250	48384,32155	48384,32155	48384,32155	48384,32155	48384,32155	48384,32155	48384,32155	48384,32155
B050	1171416	1171416	1171416	1171416	1171416	1171416	1171416	1171416
B100	4544642	4544642	4544642	4544642	4544642	4544642	4544642	4544642
B150	9956281	9960461*	9960461*	9960461*	9956937	9956717	9956937	9960461
B200	17544447	17544447	17544447	17544447	17544447	17544447	17544447	17544448
B250	27133488	27153046	27151127	27153046	27153694*	27153694*	27153694*	27162906
C050	1094343	1094343	1094343	1094343	1094343	1094343	1094343	1094343
C100	4219476	4219476	4219476	4219476	4219476	4219476	4219476	4219476
C150	9374611	9374611	9374611	9374611	9374611	9374611	9374611	9344611
C200	16759895	16759895	16759895	16759895	16759895	16759895	16759895	16759895
C250	26047022	26047022	26047022	26047022	26047022	26047022	26047022	26047022
D050	1502908	1502908	1502908	1502908	1502908	1502908	1502908	1502908
D100	6067776	6067776	6067776	6067776	6067776	6067776	6067776	6067776
D150	13609151	13609151	13609151	13609151	13609151	13609151	13609151	13611261
D200	24127123	24131660*	24131340	24131660*	24131660*	24131340	24131660*	24133320
D250	37718854	37735642	37735642	37735642	37742328*	37737210	37742328*	37753120
E300	35864	35874*	35874*	35874*	35874*	35874*	35874*	35881
E400	62340	62417	62417	62417	62429*	62429*	62429*	62478
E500	97171	97254	97254	97254	97268*	97268*	97268*	97333

Tabela 4.2: Diversidades obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos (T1, T2 e T3) aplicados em subgrupos equivalentes a 40% da população e empregando ambos os métodos (E1 e E2) de escolha de uma solução do conjunto elite.

Observando os resultados apresentados nas tabelas, conclui-se que para as instâncias analisadas, os resultados obtidos pelas diferentes técnicas de reconexão de caminhos apresentaram qualidade superior em relação aos resultados do GRASP simples em 17 dos 46 casos. Todas as melhoras obtidas foram em matrizes com pelo menos 150 indivíduos. Nas instâncias que representam populações de 50 indivíduos, os valores ótimos já haviam sido encontrados em [2] e todas as estratégias analisadas foram capazes de atingir tal resultado. Supõe-se que o mesmo ocorra para as populações de 100 indivíduos (cujas soluções exatas não foram calculadas), pois em nenhuma das estratégias com reconexão de caminhos empregadas observou-se alguma melhora nos resultados em relação aos gerados pelo GRASP simples.

Na maior parte dos experimentos, as estratégias com reconexão de caminhos obtiveram o mesmo desempenho. Observa-se que as estratégias de reconexão de caminhos T1 e T3 construíram soluções com o mesmo valor de diversidade em 15 das 17 ocorrências de resultados superiores aos do GRASP simples, e apresentaram um comportamento semelhante entre si. A estratégia T2, apesar de ter se mostrado capaz de construir soluções com qualidade superior às obtidas pelo GRASP simples, em 6 ocasiões obteve resultados inferiores aos produzidos por T1 e T3, e para nenhuma das condições testadas T2 foi capaz de produzir uma solução cuja diversidade fosse de melhor qualidade em comparação aos resultados obtidos através de T1 e T3. Este comportamento pode ser observado também em [16], sendo causado por uma exploração mais detalhada na vizinhança inicial, formada por soluções de menor qualidade. A medida em que vai se aproximando do alvo, que no caso de T2 é uma solução de mais alta qualidade, poucas soluções nesta vizinhança são exploradas, que é onde existem maiores chances de se encontrar novas soluções de alta qualidade. T1 e T3 exploram de forma mais detalhada esta região, conseguindo, desta forma, a obtenção de soluções de maior qualidade do que as encontradas por T2.

Comportamentos similares foram obtidos em outros estudos sobre diferentes estratégias de reconexão de caminhos. Os resultados apresentados em [12] para as estratégias T1 e T2 analisadas mostraram que soluções de melhor qualidade foram obtidas através de T1. Em [17], as mesmas três estratégias que estão sendo utilizadas neste trabalho foram analisadas, e T1 e T3 foram capazes de gerar soluções de melhor qualidade que as demais estratégias empregadas.

Baseando-se nos resultados obtidos neste trabalho e nos apresentados em estudos citados acima, observa-se que a utilização da estratégia de reconexão de caminhos T2, embora contribua em relação aos resultados obtidos através do GRASP simples, não demonstra ser a estratégia que permita a obtenção das melhores soluções. Desta forma, para as baterias de testes a seguir foram consideradas apenas as estratégias T1 e T3.

Em relação ao método empregado para a seleção de uma solução do conjunto elite para a aplicação da reconexão de caminhos, E1 e E2 apresentaram comportamentos semelhantes, em termos de melhoras em relação ao GRASP. Em ambas possibilidades, foram encontradas a mesma quantidade de soluções com diversidades superiores às geradas pelo GRASP simples, independente da forma que a solução do conjunto foi selecionada.

Na próxima etapa explora-se de forma mais detalhada o comportamento das estratégias T1 e T3. Um novo conjunto de execuções foi realizado, mas desta vez somente para as matrizes formadas por 150, 200, 250, 300, 400 e 500 indivíduos. As matrizes de 50 e 100 indivíduos foram excluídas dos testes. As matrizes do tipo A de todas as dimensões utilizadas também foram excluídas desta bateria de testes, pois para nenhuma das estratégias aplicadas a estas foram obtidos resultados superiores aos já obtidos pelo GRASP. Isto se deve ao fato de que estas são instâncias consideradas fáceis.

Observa-se ainda que para as matrizes do tipo E, consideradas difíceis, sempre foram obtidos resultados superiores aos gerados pelo GRASP após a utilização das estratégias de reconexão de caminhos.

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos através da execução dos dois tipos de reconexão de caminhos selecionados (T1 e T3) em conjunto com as duas formas de seleção de solução do conjunto elite apresentadas (E1 e E2). Foram executadas três baterias de testes para cada uma das estratégias, cada uma realizada com uma semente distinta para geração dos números aleatórios e com 1000 iterações.

As Tabelas 4.3 e 4.4 apresentam a média dos resultados obtidos pelas três execuções para soluções formadas por subgrupos de indivíduos que representam 20% e 40%, respectivamente, da população total de cada matriz.

Inst.	GRASP	T1E1	T3E1	T1E2	T3E2
B150	2756581	2758381*	2758381*	2758003	2758003
B200	4787900	4788086*	4788086*	4788086*	4788086*
B250	7365771	7376110	7376175*	7375943	7375953
C150	2613286	2613286	2613286	2613286	2613286
C200	4626056	4630545*	4630545*	4628450	4629317
C250	7176140	7178043*	7178043*	7177937	7177937
D150	3498547	3500283	3500283	3502059*	3502059*
D200	6203391	6205505*	6205505*	6204650	6204650
D250	9671279	9680980*	9680494	9680944	9680189
E300	9652	9679*	9679*	9678	9678
E400	16874	16904*	16904*	16899	16899
E500	26151	26198*	26198*	26198*	26198*

Tabela 4.3: Diversidades médias obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos aplicados para subgrupos equivalentes a 20% da população.

Inst.	GRASP	T1E1	T3E1	T1E2	T3E2
B150	9952386	9957365*	9957365*	9952386	9952949
B200	17526848	17543566	17543566	17544061*	17544061*
B250	27134803	27153691	27153829	27154524	27154943*
C150	9374611	9374611	9374611	9374611	9374611
C200	16759895	16759895	16759895	16759895	16759895
C250	26047022	26047022	26047022	26047022	26047022
D150	13609448	13609448	13609448	13609448	13609448
D200	24127046	24130476	24130476	24131581*	24131581*
D250	37720373	37733021	37733021	37735250*	37735250*
E300	35853	35868*	35868*	35868*	35868*
E400	62343	62415	62415	62424*	62424*
E500	97170	97252	97252	97269	97277*

Tabela 4.4: Diversidades médias obtidas pelos diferentes métodos de reconexão de caminhos aplicados para subgrupos equivalentes a 40% da população.

Para os valores médios obtidos, novamente observa-se a contribuição da reconexão de caminhos em relação aos resultados gerados pelo GRASP simples. Em 19 dos 24 casos analisados, alguma estratégia com reconexão de caminhos foi capaz de obter novos resultados com maiores valores de diversidade. Em 17 dos 24 casos todas as estratégias com reconexão de caminhos obtiveram soluções melhores do que as do GRASP simples.

Comparando as médias das soluções geradas pela reconexão de caminhos para subgrupos formados por 20% da população original através dos métodos de seleção do conjunto elite E1 e E2, independente da estratégia de reconexão de caminhos utilizada, observa-se que as médias das soluções que empregam E1 são, quase em sua totalidade, superiores aos obtidos pela utilização do método E2. Em oito situações, estratégias de reconexão de caminhos utilizando E1 foram capazes de gerar soluções com os maiores valores de diversidade encontrados, enquanto estratégias que utilizaram E2 obtiveram resultados da mesma natureza somente em um caso. Na análise dos resultados dos subgrupos de indivíduos equivalentes a 40% da população, observa-se uma tendência inversa, a seleção de uma solução do conjunto elite através do método E2 mostra-se capaz de gerar uma maior quantidade de soluções superiores às obtidas pela utilização de E1. Em seis casos, E2 contribuiu na obtenção de soluções que estavam entre as melhores geradas, enquanto E1 apresentou a mesma contribuição em somente uma situação.

Na tentativa de entender esta mudança de comportamento em relação à quantidade de indivíduos do subgrupo, foram realizados, para cada método E1 e E2, testes onde se analisou a quantidade de vezes que diferentes soluções selecionadas do conjunto elite foram utilizadas pela reconexão de caminhos. Os resultados obtidos para soluções de 20% e de 40% foram bastante similares entre si e não justificaram a mudança de comportamento. As soluções selecionadas do conjunto elite através do método E1 apresentaram uma certa variedade na seleção e, utilizando E2, a seleção concentrou-se por várias iterações em uma mesma solução que apresentasse um alto índice de diversidade, não permitindo que houvesse uma diversificação nas soluções provenientes do conjunto elite. Uma investigação mais conclusiva das causas deste comportamento deve ser explorada em trabalhos futuros.

Outra questão que merece investigação futura é o fato de que as matrizes do tipo C determinarem um comportamento diferente das demais na aplicação da reconexão de caminhos, levando a um menor índice de geração de soluções superiores às obtidas pelo GRASP, em particular a matriz C150, com a qual nenhuma das estratégias analisadas melhorou a qualidade das soluções. Suspeita-se que os resultados obtidos para as matrizes do tipo C através do GRASP são os exatos ou valores muito próximos a estes. Tais valores exatos não estavam disponíveis para que fosse possível a comprovação desta suposição.

A seguir, utilizando-se o método de análise probabilística apresentado em [1], realiza-se um estudo de convergência de cada estratégia. Para isso, foram realizadas execuções independentes de cada uma das estratégias estudadas. Neste caso, permitiu-se que fossem realizadas tantas iterações quanto necessárias até que o custo da solução gerada fosse maior ou igual a um valor alvo estabelecido. O objetivo é a geração de um gráfico que relacione, para cada instante de tempo, a probabilidade de ser encontrada a solução alvo fixada, no instante em questão.

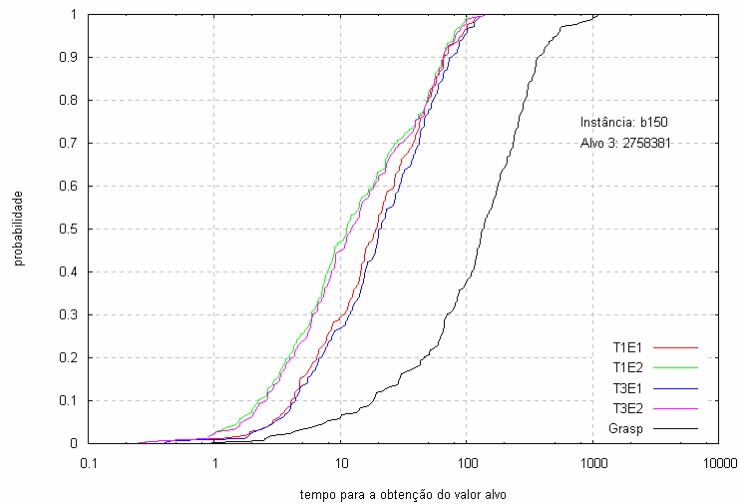
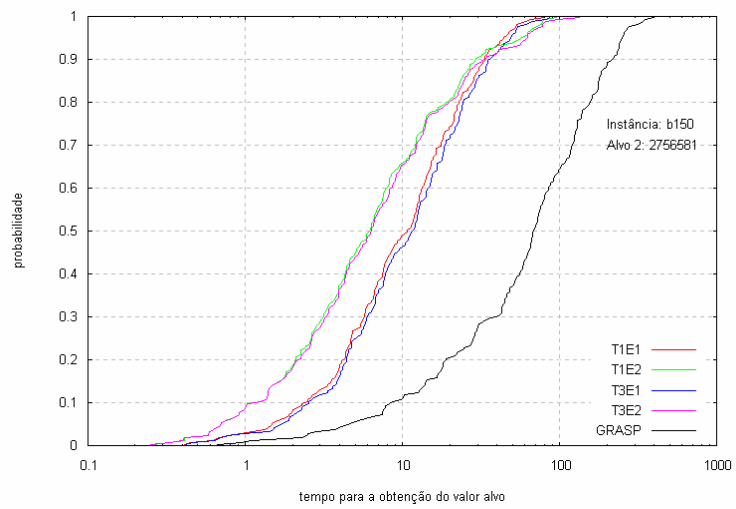
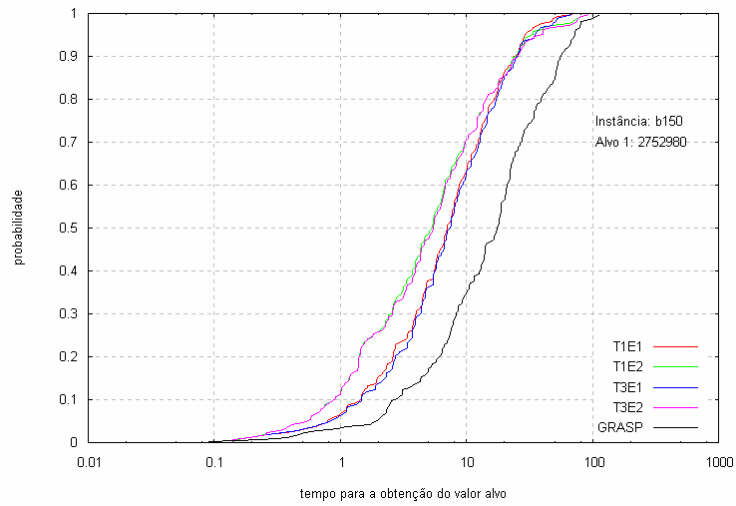
Cada uma das heurísticas foi executada 200 vezes, utilizando-se sementes distintas, e para cada execução mediu-se o tempo necessário à heurística para gerar uma solução com custo maior ou igual ao alvo estabelecido. Os tempos de execução foram ordenados de forma crescente e a probabilidade $p_i = (i - 0,5)/200$ foi associada a cada tempo t_i e os pontos $z_i = (t_i, p_i)$ foram definidos para $i = 1, \dots, 200$. Devido ao alto tempo computacional envolvido, os testes foram executados apenas para as matrizes dos grupos B, C e D com populações formadas por 150 indivíduos, e subgrupos de indivíduos representando 20% da população.

Estabeleceram-se três soluções-alvo, que representam um valor de diversidade mínimo que se deseja obter. Para cada matriz, foram escolhidos três alvos com graus distintos de dificuldade. O alvo 1 foi o menor valor obtido pelo GRASP simples para as execuções com as três sementes utilizadas, considerado fácil de ser atingido. O alvo 2 é considerado uma solução de dificuldade média para ser atingida, e seu valor é a média das soluções obtidas através do GRASP simples. O alvo 3, considerado difícil, é o maior valor de diversidade encontrado dentre todas as execuções do GRASP simples para as três execuções realizadas.

Os gráficos das Figuras 4.1 a 4.7 mostram as distribuições de probabilidade empíricas do tempo para atingir o valor alvo para o GRASP simples e para as seguintes variantes de reconexão de caminhos: T1E1, T1E2, T3E1 e T3E2. Para as matrizes B150 e D150 foram utilizados três alvos distintos (fácil, intermediário e difícil), enquanto que para a matriz C150 foi utilizado somente um alvo, pois em todos os testes realizados na seção 4.2.3 as diversidades encontradas para todos os casos analisados foram iguais.

Como pode ser observado, as estratégias de reconexão de caminhos empregadas apresentam comportamentos semelhantes entre si, para as diferentes instâncias testadas,

apresentando uma maior probabilidade de obtenção da solução alvo em um determinado tempo do que a probabilidade apresentada pelo GRASP simples. Pode-se observar que conforme o alvo estabelecido torna-se mais difícil, a diferença entre o GRASP simples as estratégias que empregam a reconexão de caminhos torna-se mais acentuada, indicando a contribuição das técnicas de reconexão de caminhos na diminuição do tempo necessário para se obter o alvo. Apesar dos comportamentos similares para todas as estratégias de reconexão de caminhos, em particular para as que utilizam o mesmo método de seleção de solução do conjunto elite, para todos os resultados apresentados, pode-se observar que a estratégia 'T1E2' mostrou-se ligeiramente mais eficaz que as demais no processo de obtenção do alvo em menor tempo computacional.



Figuras 4.1, 4.2 e 4.3: Comparação dos resultados das estratégias de reconexão de caminhos e GRASP para a matriz B150 utilizando os alvos fácil, intermediário e difícil, respectivamente.

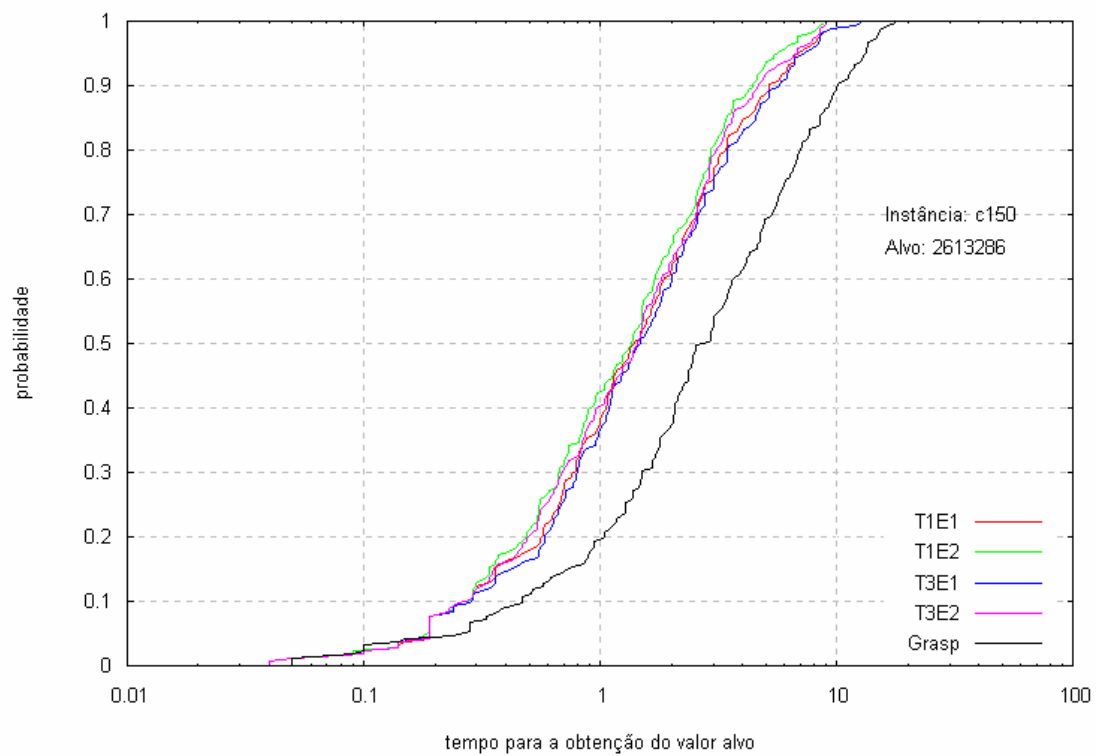
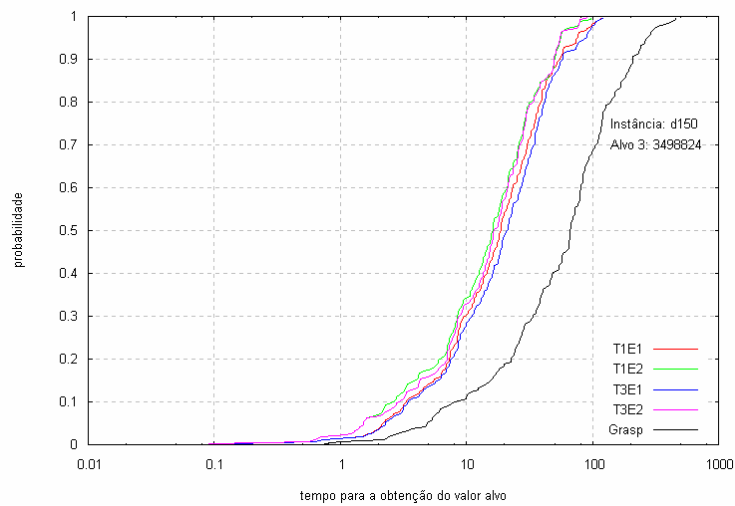
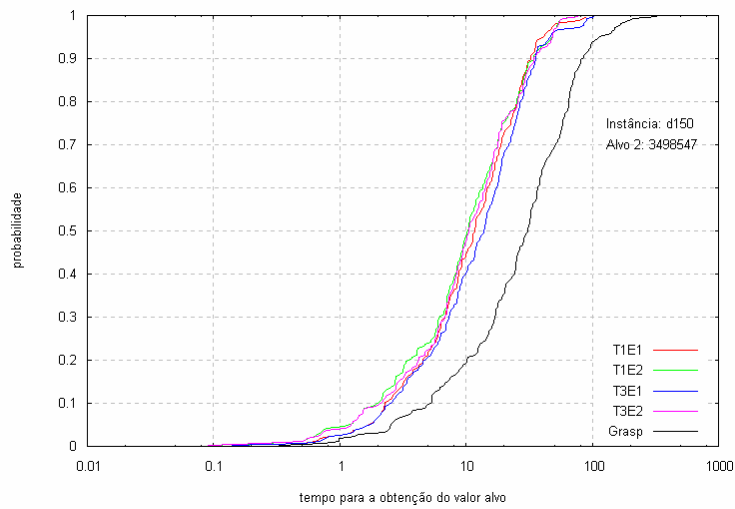
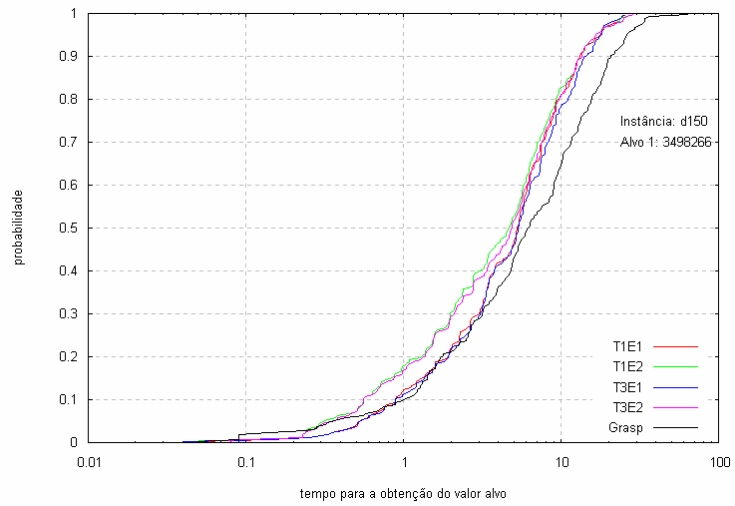


Figura 4.4: Comparação dos resultados das estratégias de reconexão de caminhos e GRASP para a matriz C150 utilizando o alvo único (considerado fácil).

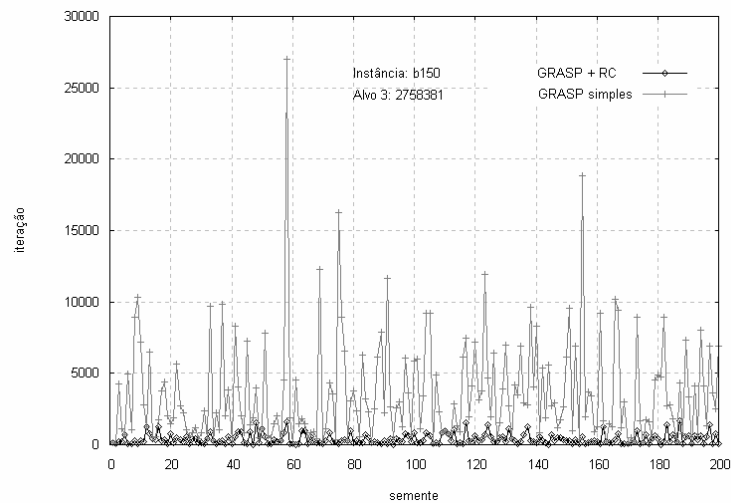
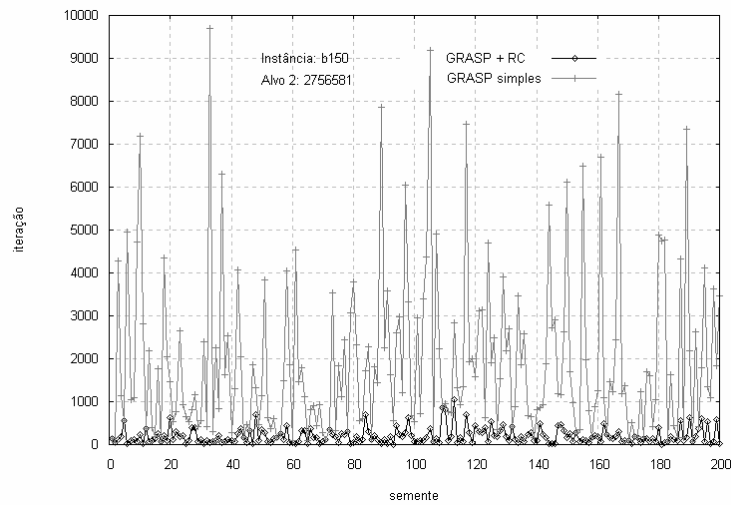
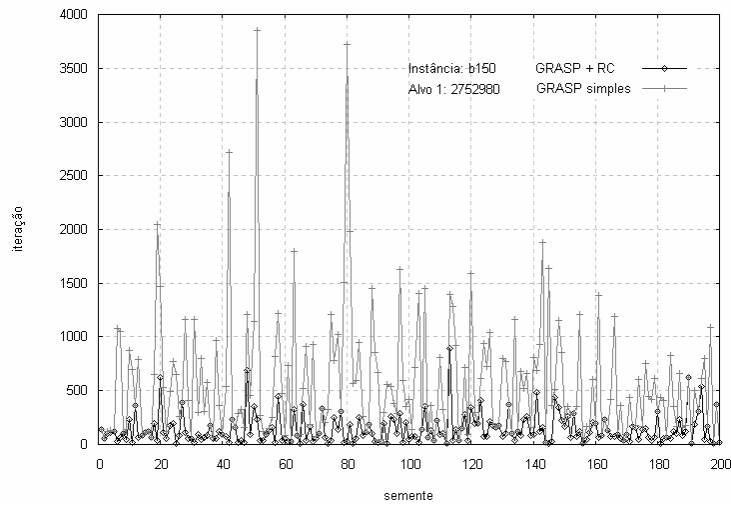


Figuras 4.5, 4.6 e 4.7: Comparação dos resultados das estratégias de reconexão de caminhos e GRASP para a matriz D150 utilizando os alvos fácil, intermediário e difícil, respectivamente.

Para evidenciar a contribuição da reconexão de caminhos aos resultados produzidos pelo GRASP, foram executadas três novas baterias de testes, avaliando diferentes fatores envolvidos no problema. Como o comportamento das diferentes estratégias foi semelhante, foi utilizada a combinação T1E1 nestas baterias de testes.

Na primeira bateria, as execuções foram feitas com 200 sementes diferentes para cada uma das estratégias. Para cada semente, o critério de parada estabelecido foi a obtenção de uma solução que possuísse uma diversidade igual ou superior ao alvo fixado. Os resultados apresentados nas Figuras de 4.8 a 4.14 mostram quantas iterações foram necessárias para que a solução alvo fosse alcançada para cada uma das sementes.

Pelos resultados apresentados nos gráficos das Figuras de 4.8 a 4.14, torna-se evidente como a reconexão de caminhos consegue atingir o valor alvo em uma quantidade menor de iterações do que as necessárias ao GRASP para gerar uma solução de diversidade equivalente. Quando foram utilizados alvos mais difíceis de serem alcançados, esta diferença se acentuou significativamente, comprovando a eficácia dos conceitos implementados na reconexão de caminhos.



Figuras 4.8, 4.9 e 4.10: Comparação entre a quantidade de iterações requeridas pela reconexão de caminhos e pelo GRASP para a obtenção das soluções alvo fácil, intermediária e difícil, respectivamente, para a matriz B150.

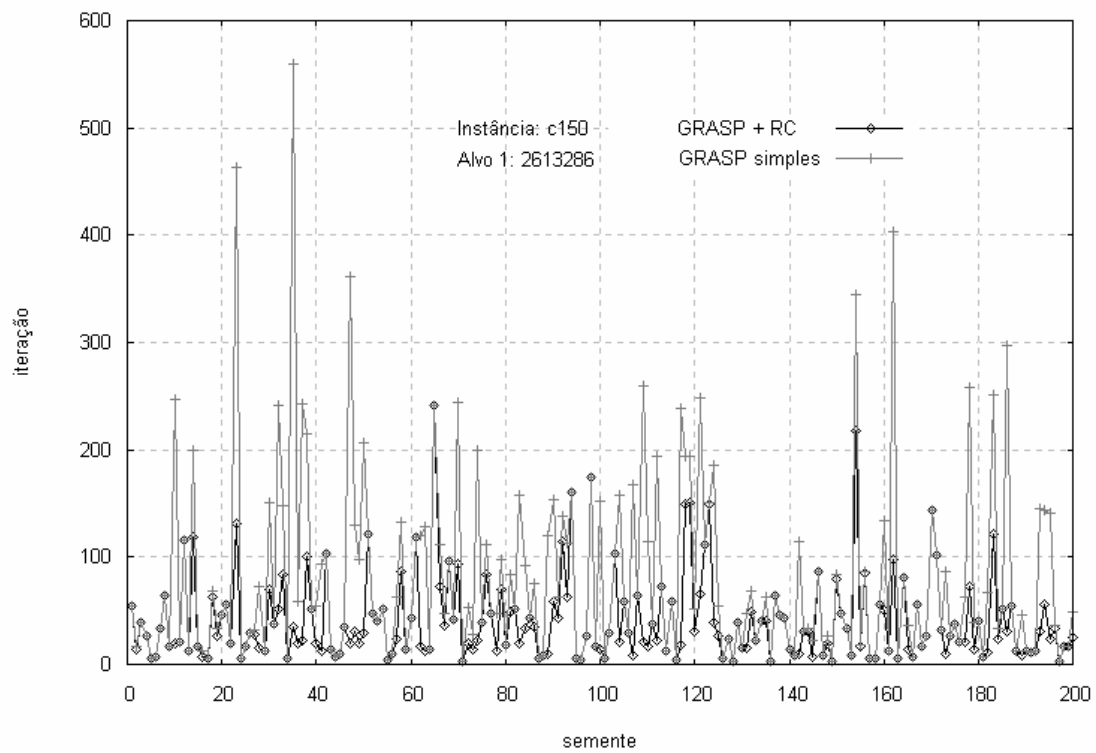
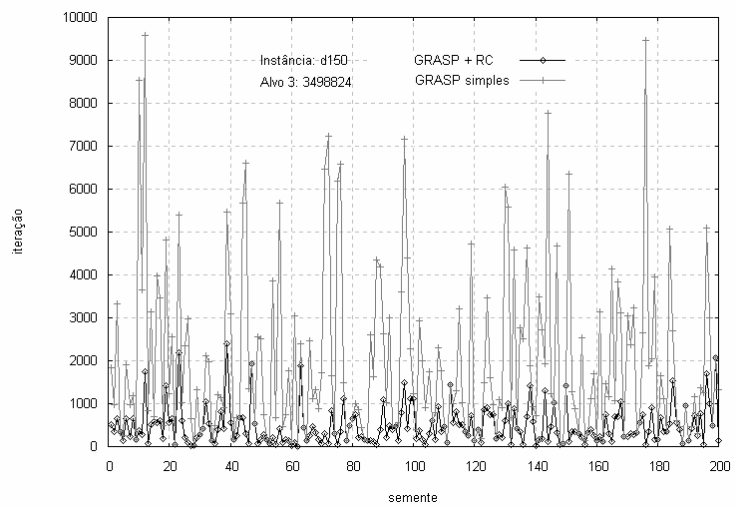
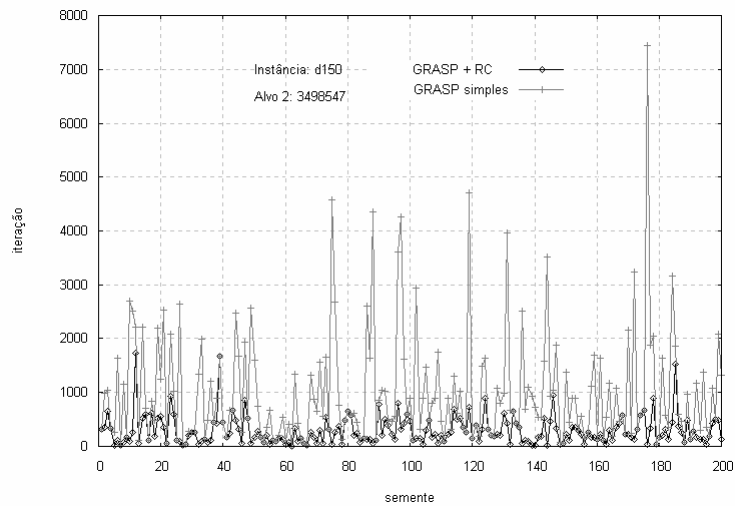
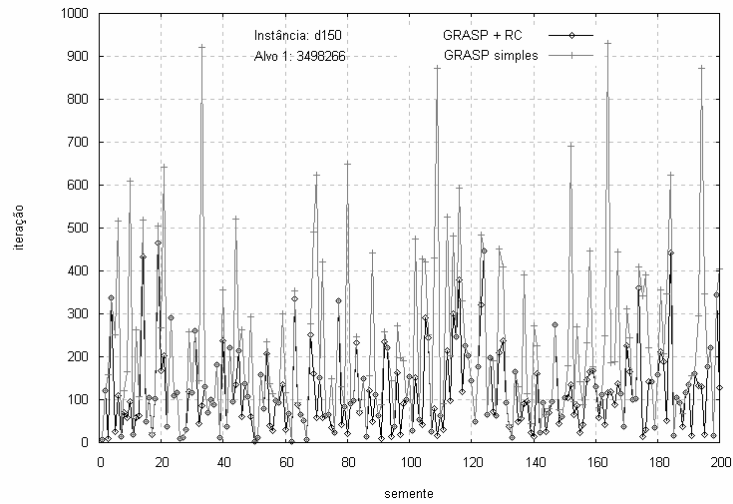


Figura 4.11: Comparação entre a quantidade de iterações requeridas pela reconexão de caminhos e pelo GRASP para a obtenção da solução alvo única (considerada fácil) para a matriz C150.



Figuras 4.12, 4.13, 4.14: Comparação entre a quantidade de iterações requeridas pela reconexão de caminhos e pelo GRASP para a obtenção das soluções alvo fácil, intermediária e difícil, respectivamente, para a matriz D150.

A segunda bateria de testes foi realizada executando-se o GRASP com reconexão de caminhos 200 vezes com sementes diferentes, e sendo que o critério de parada adotado foi fixar em 1000 o número de iterações para cada execução. Em cada uma das execuções, ao término de cada uma das 1000 iterações avaliou-se qual solução gerada apresentava a maior diversidade: a gerada pelo GRASP simples após as fases de construção e busca local, ou a melhor solução gerada pela reconexão de caminhos. Os resultados são representados nas Figuras 4.15, 4.16 e 4.17. Como foram realizadas 200 execuções, em cada iteração geraram-se 200 soluções. Em cada uma das curvas, cada ponto representa a quantidade de vezes que a melhor solução foi gerada por uma das estratégias (GRASP simples ou GRASP com reconexão de caminhos) em uma determinada iteração. A curva escura representa, para cada iteração, a quantidade de vezes que o GRASP com reconexão de caminhos foi capaz de encontrar uma solução cuja diversidade foi superior a obtida através do GRASP simples.

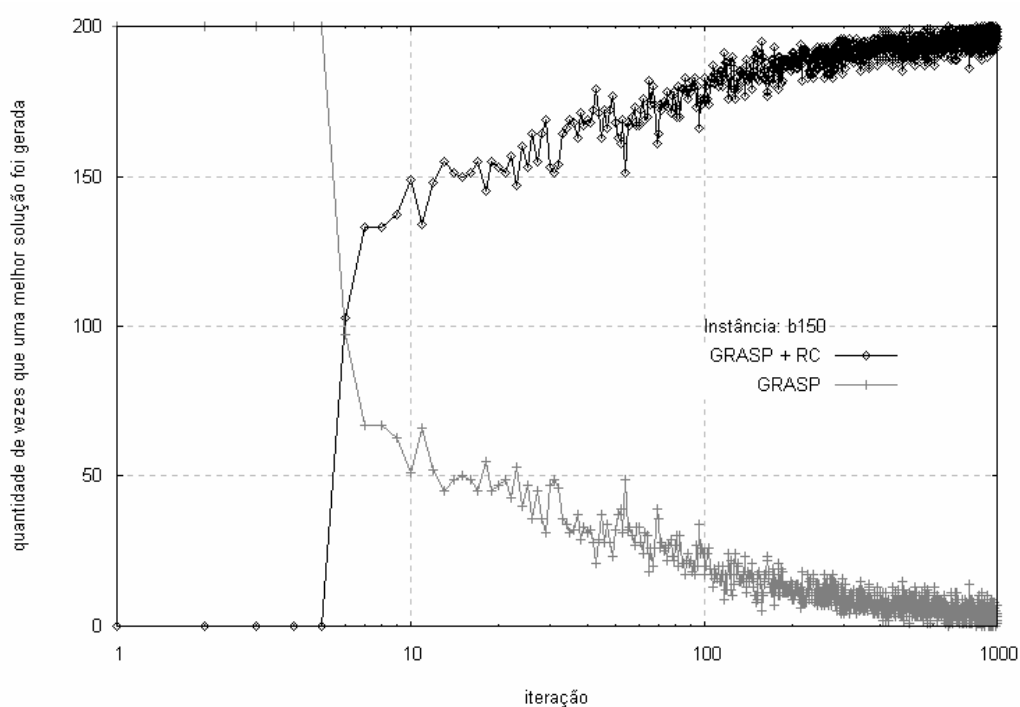


Figura 4.15: Comparação entre o número de vezes que a solução gerada por uma das estratégias foi superior à solução gerada pela outra para a matriz B150.

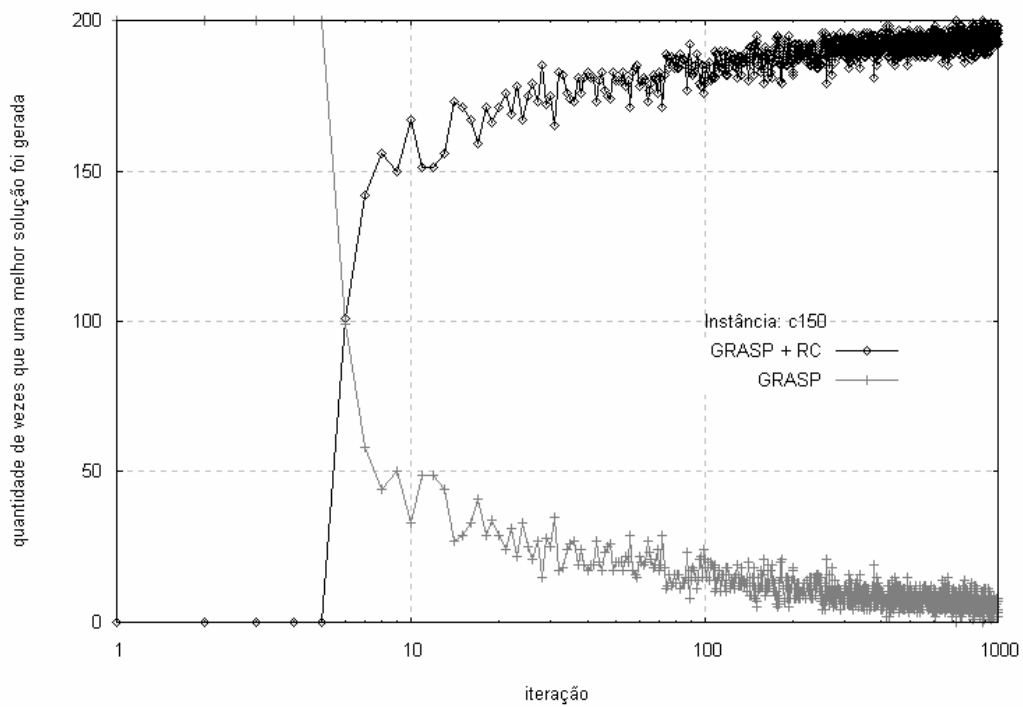


Figura 4.16: Comparação entre o número de vezes que a solução gerada por uma das estratégias foi superior à solução gerada pela outra para a matriz C150.

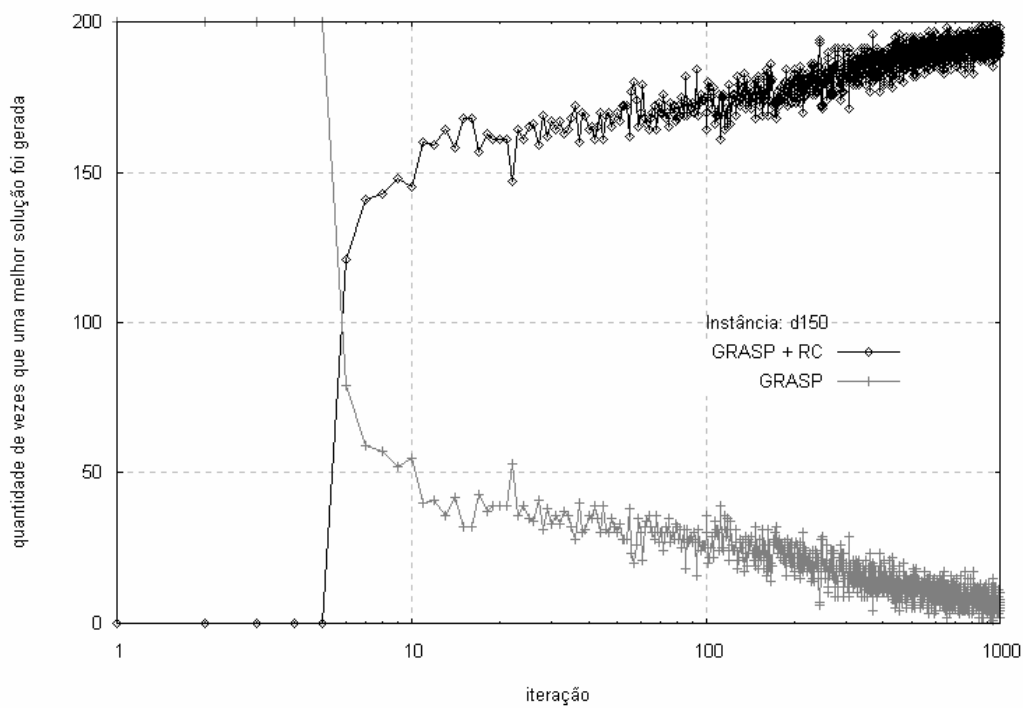


Figura 4.17: Comparação entre o número de vezes que a solução gerada por uma das estratégias foi superior à solução gerada pela outra para a matriz D150.

Os resultados mostram que tão logo a reconexão de caminhos começa a ser aplicada (uma vez que nas cinco primeiras iterações ela não é executada, pois espera-se o preenchimento total do conjunto elite para executá-la) são geradas soluções com diversidades superiores às obtidas pelo GRASP simples em cada uma das iterações. Conforme o número de iterações aumenta, as novas soluções geradas que apresentam um certo nível de qualidade são introduzidas no conjunto elite, e passam a contribuir nas soluções construídas pela reconexão de caminhos para as iterações posteriores. Desta forma, em pouco tempo a reconexão de caminhos torna-se capaz de gerar soluções superiores às obtidas pelo GRASP simples na maior parte das iterações realizadas.

Na terceira bateria de testes, foram executadas as estratégias GRASP simples e GRASP com reconexão de caminhos T1E1 para 200 sementes distintas, fixando em 1000 iterações para cada semente, e avaliou-se a quantidade de vezes em que a solução alvo estabelecida foi atingida em cada uma das iterações. Foram utilizadas as mesmas soluções alvo fixadas para as baterias de testes anteriores, seguindo a idéia de se testar um alvo fácil de ser atingido, um intermediário e um difícil, utilizando-se as matrizes B150 e D150. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras de 4.18 a 4.29. Foram intercalados os resultados obtidos através do GRASP simples e do GRASP com reconexão de caminhos para cada uma das instâncias e para cada alvo utilizado a fim de tornar mais evidente as diferenças entre os resultados obtidos pelos métodos.

Em cada um dos gráficos a seguir, cada ponto representa a quantidade de vezes que a estratégia em questão foi capaz de atingir o valor alvo estabelecido em cada uma das 1000 iterações, para as 200 sementes utilizadas.

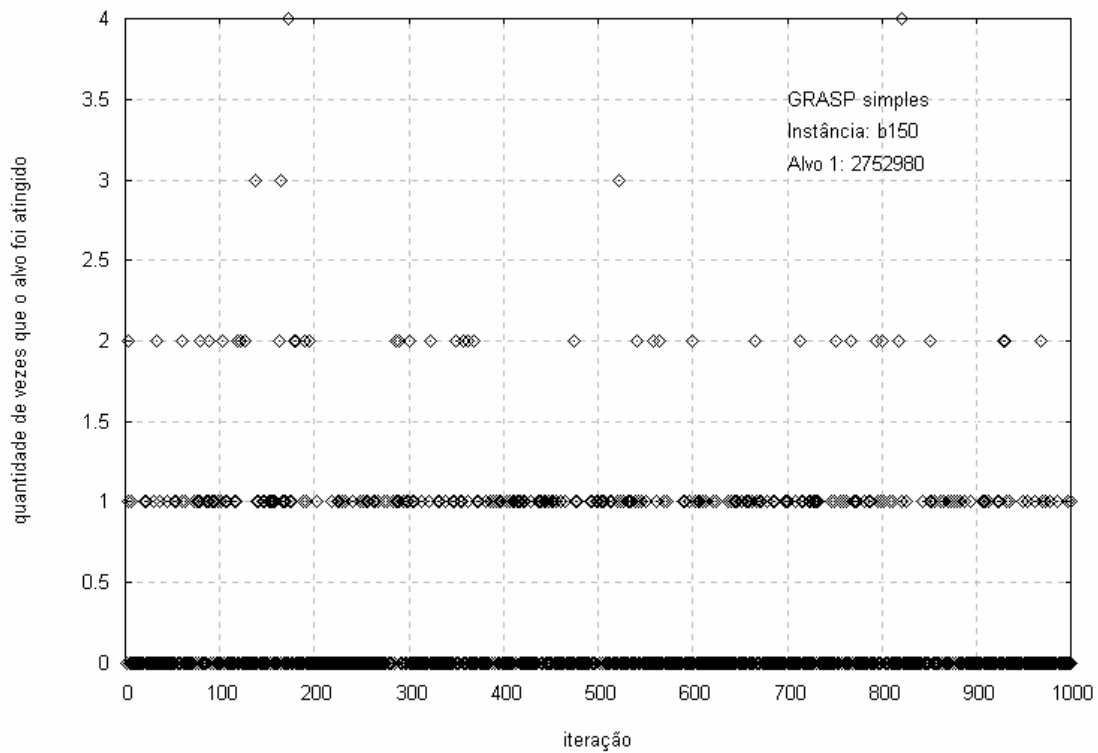


Figura 4.18: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo fácil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.

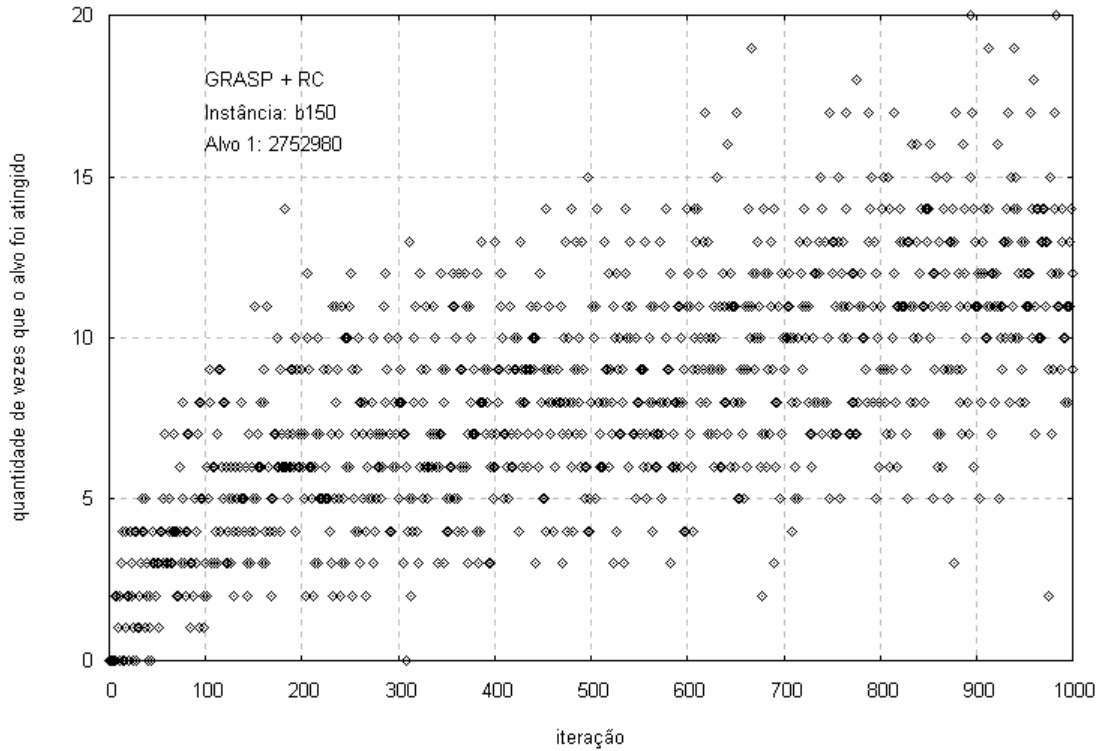


Figura 4.19: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo fácil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.

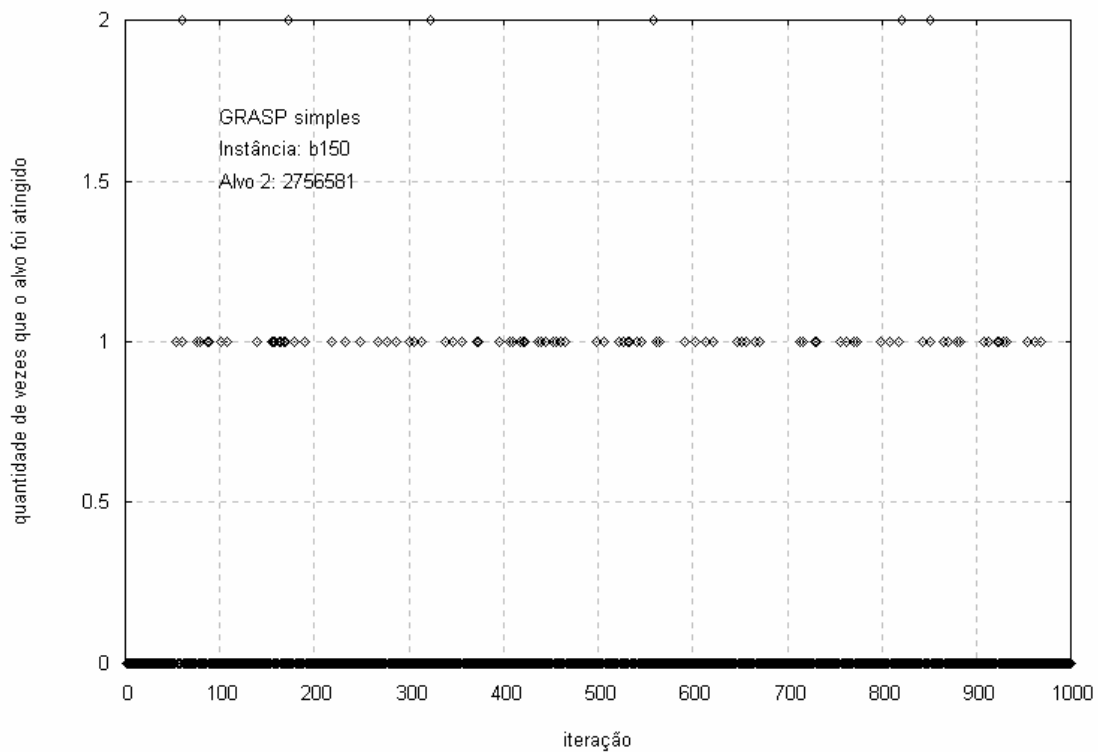


Figura 4.20: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo intermediário para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.

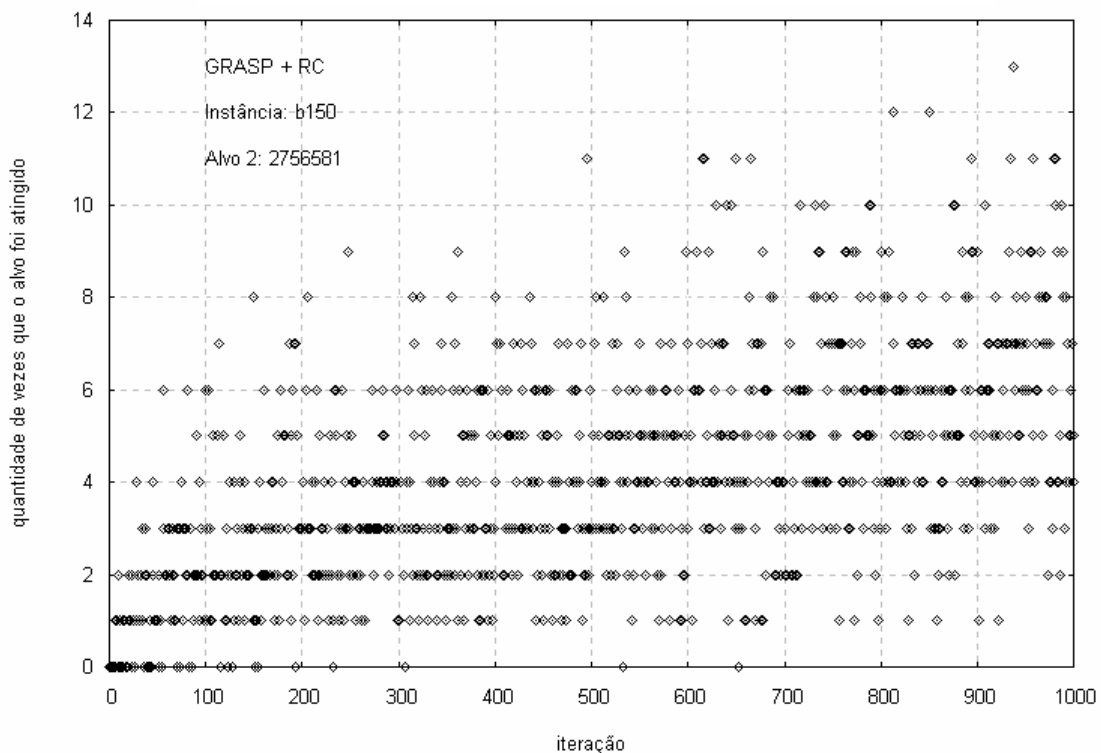


Figura 4.21: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo intermediário para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.

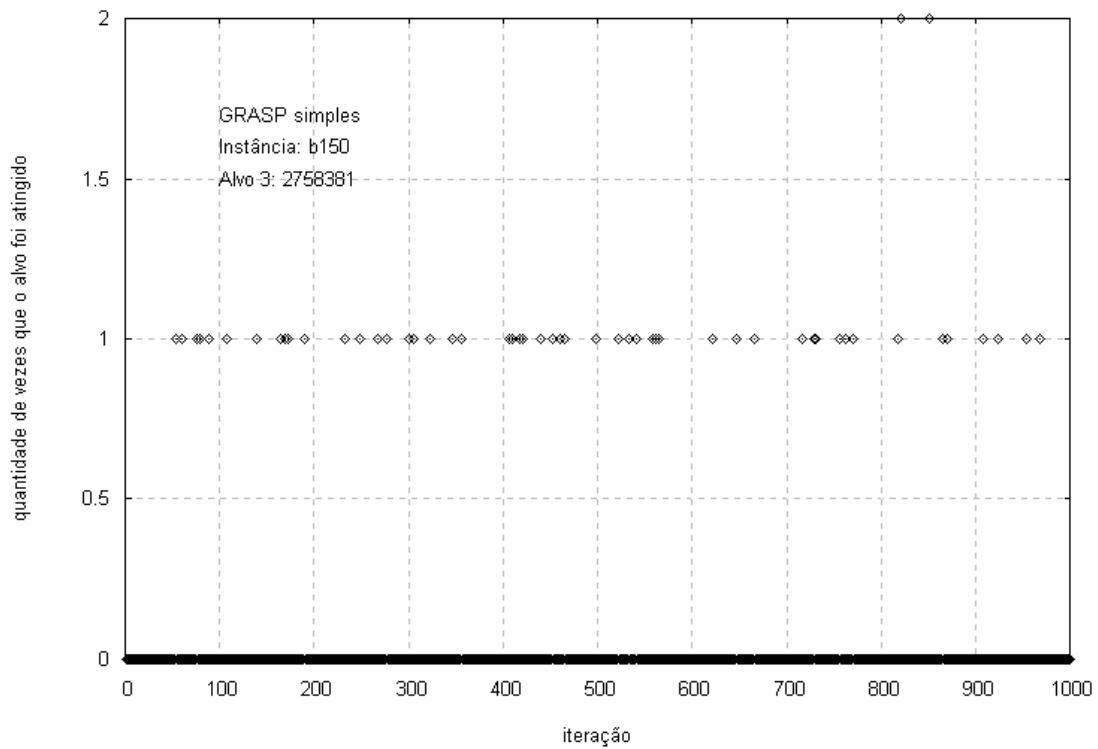


Figura 4.22: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo difícil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.

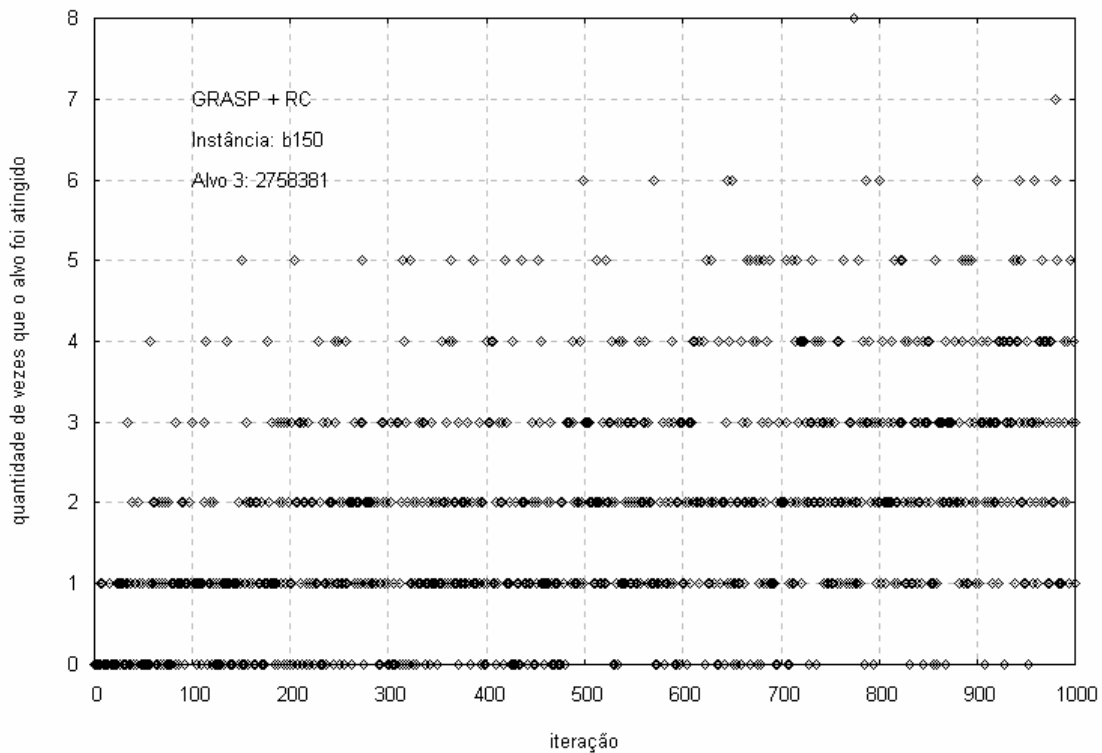


Figura 4.23: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo difícil para a matriz B150 em cada uma das 1000 iterações.

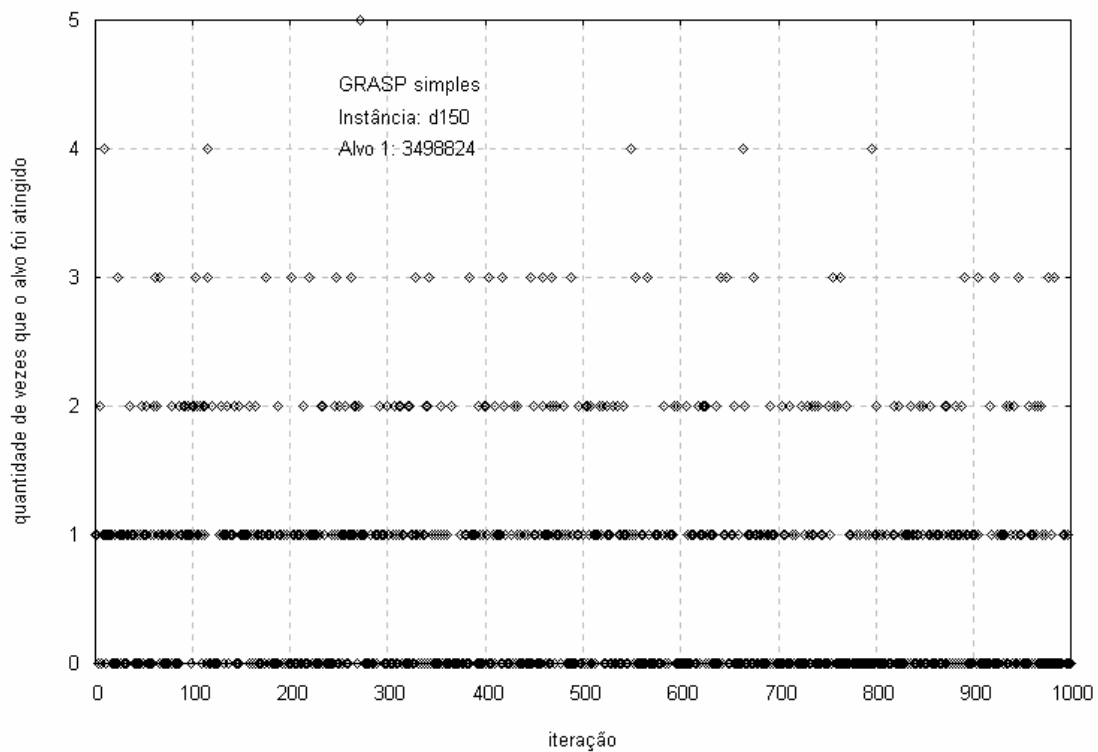


Figura 4.24: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo fácil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.

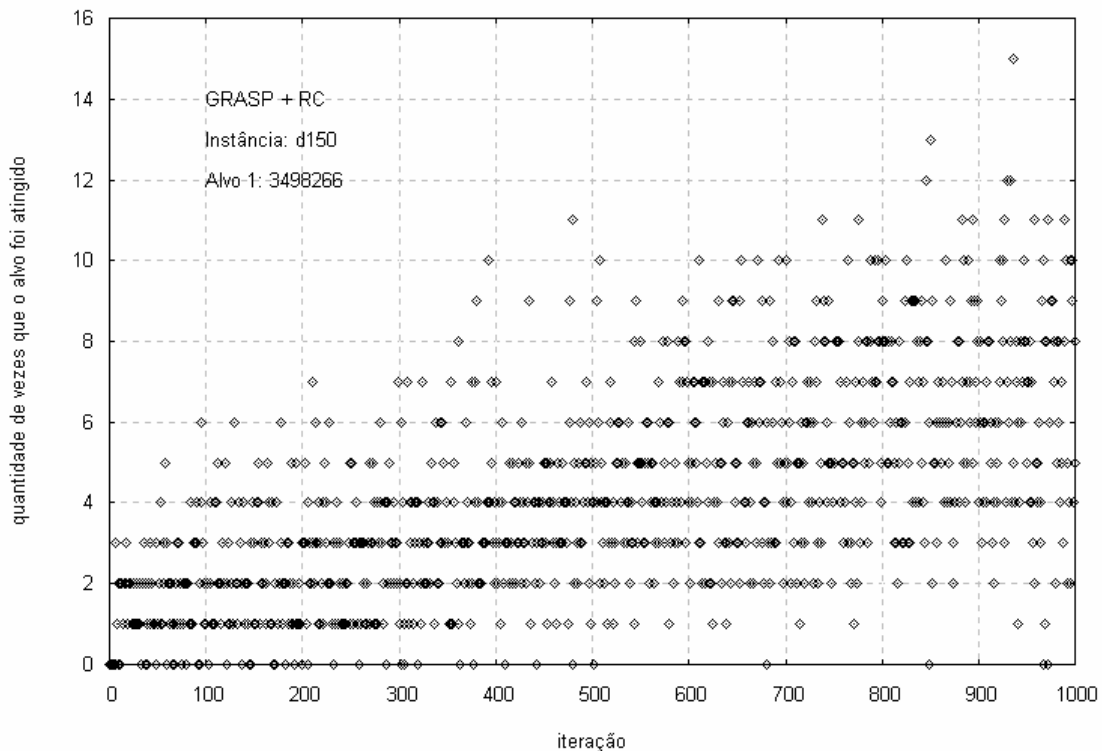


Figura 4.25: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo fácil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.

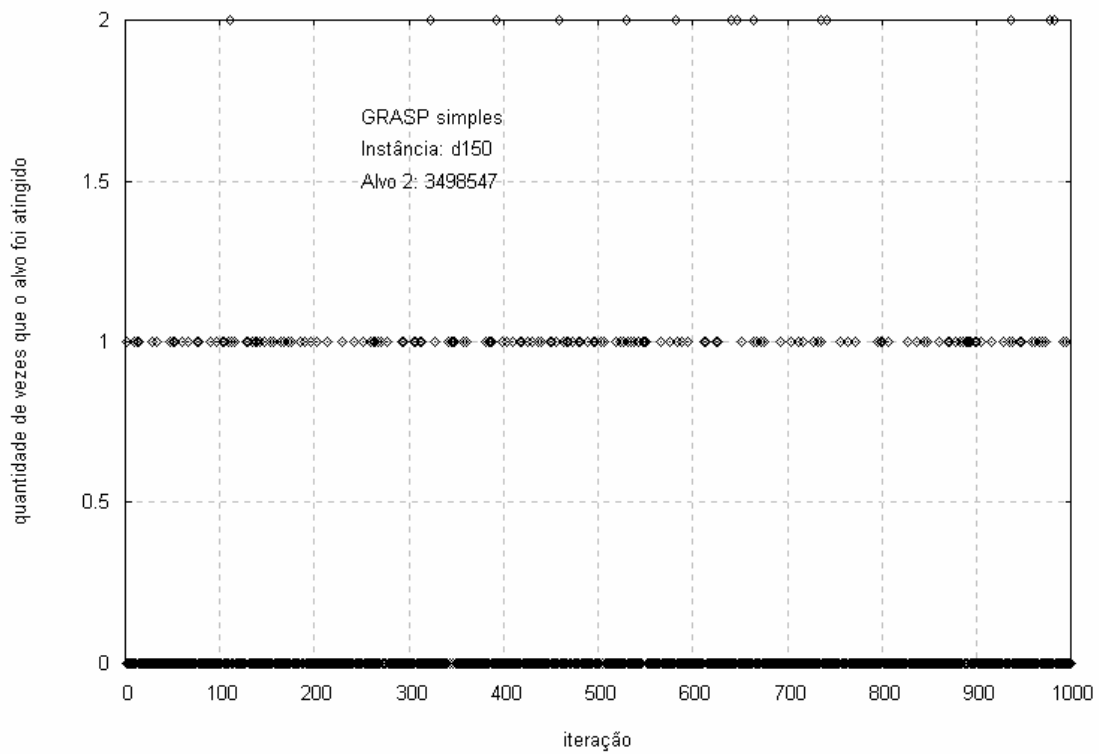


Figura 4.26: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo intermediário para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.

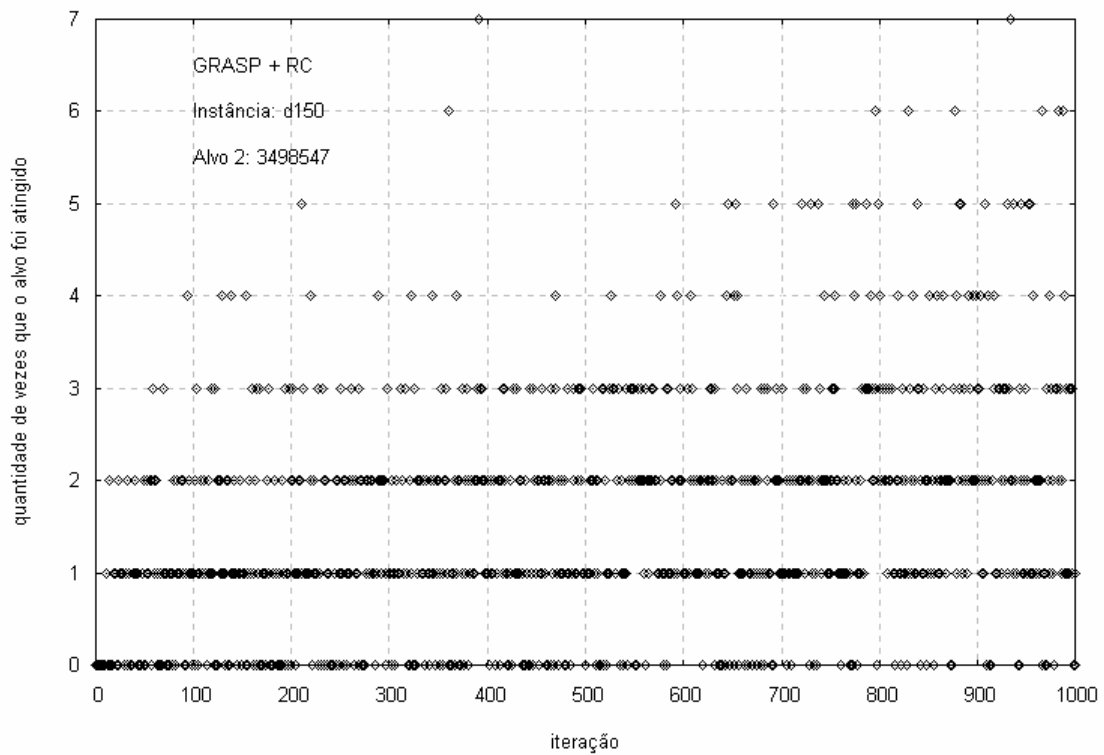


Figura 4.27: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo intermediário para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.

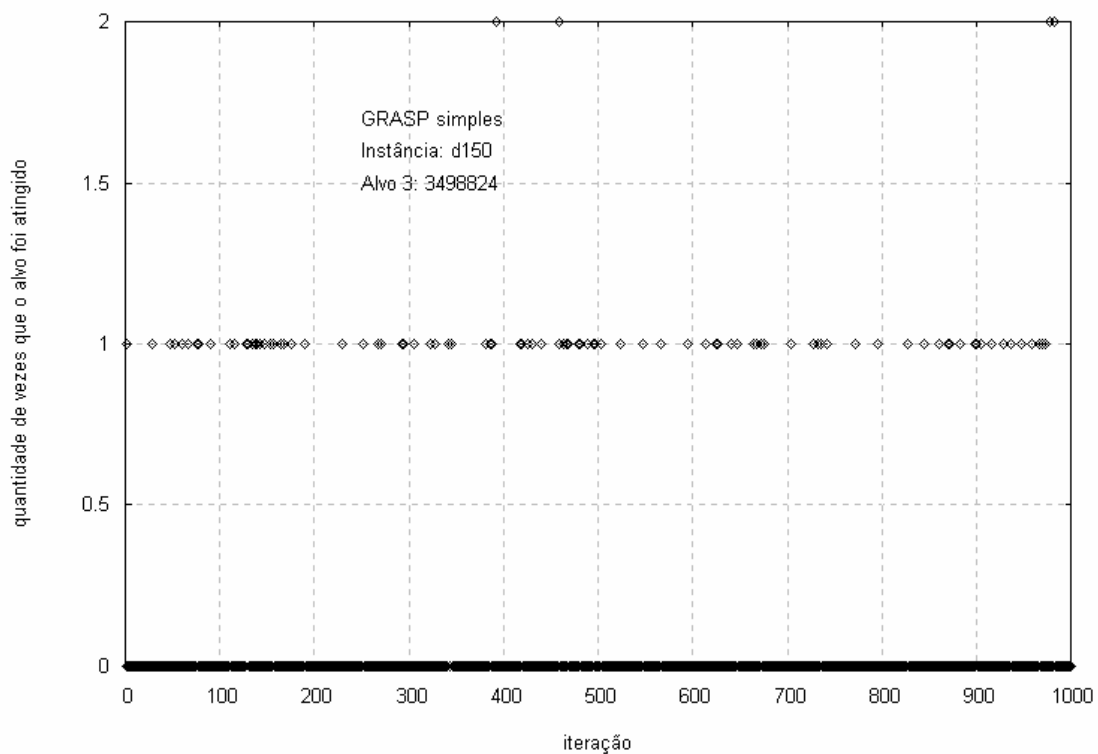


Figura 4.28: Número de vezes que a solução gerada pelo GRASP atinge o alvo difícil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.

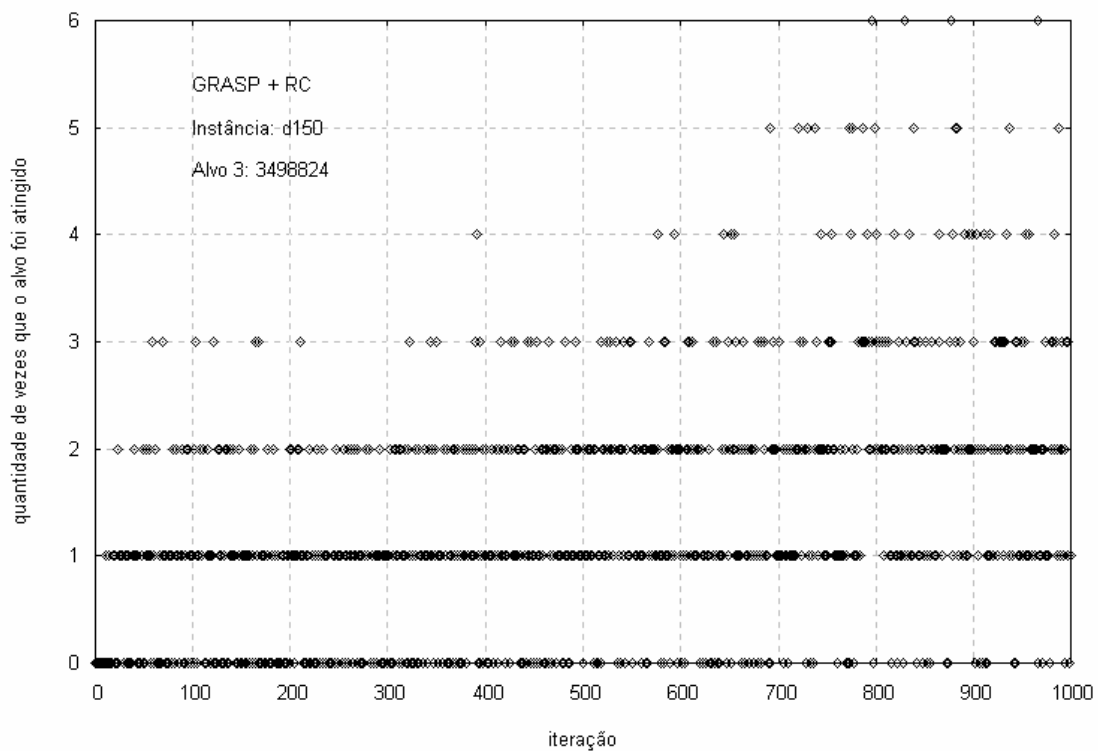


Figura 4.29: Número de vezes que a solução gerada pela reconexão de caminhos atinge o alvo difícil para a matriz D150 em cada uma das 1000 iterações.

Analisando os resultados obtidos pelo GRASP simples, observa-se que conforme aumentamos a dificuldade do alvo, menor é a ocorrência de soluções que atingem tal valor. Os gráficos referentes ao GRASP simples evidenciam que a distribuição da ocorrência de soluções que atingem o valor alvo é constante ao longo das execuções. Não existe um momento que apresenta uma maior ocorrência de soluções que atingem o alvo. Este comportamento se deve ao fato do GRASP não contar com um mecanismo que permita que elementos de qualidade de uma solução gerada em uma iteração sejam utilizados nas iterações seguintes, que são executadas de forma independente das anteriores.

Os resultados das estratégias que utilizam reconexão de caminhos mostram que conforme a execução do programa avança, a ocorrência de soluções com diversidade igual ou superior ao valor alvo estabelecido aumenta. Isto se deve à inclusão de novas soluções de qualidade no conjunto elite, geradas ao decorrer das iterações. Para alvos mais fáceis pode-se observar mais nitidamente a tendência ao crescimento da quantidade de vezes que o alvo é atingido conforme mais iterações são executadas. Quando se aumenta a dificuldade de se atingir o alvo, o mesmo comportamento pode ser observado, mas a tendência observada acima torna-se menos evidente devido à diminuição de soluções que alcançam o valor alvo.

4.3 Tempos Computacionais

No Capítulo 2, foi especificado um filtro de soluções, que evita a execução da etapa de busca local do GRASP caso a solução construída já tenha sido analisada anteriormente. Os testes que visam avaliar os tempos computacionais, baseados na bateria de testes especificada na Seção 4.2, foram realizados com e sem a utilização do filtro. As Tabelas 4.5 e 4.7 apresentam os tempos computacionais médios referentes às execuções com três sementes distintas do GRASP simples e do GRASP associado a cada uma das estratégias de reconexão de caminhos para os grupos de matrizes A, B, C e D, sem a utilização do filtro de soluções. Nas Tabelas 4.6 e 4.8 estão representados os tempos computacionais, em segundos, obtidos nas execuções com a utilização do filtro.

Comparando-se os tempos apresentados, observa-se que a utilização do filtro contribui na redução do tempo de execução dos métodos empregados. Observa-se ainda que esta contribuição é mais significativa para populações menores e para soluções formadas por uma

menor porcentagem de elementos. Quanto maior a dimensão da matriz e maior o número de elementos que formam a solução, menos significativa torna-se a contribuição do filtro, pois a ocorrência da construção de soluções formadas por um mesmo conjunto de elementos já selecionados em uma iteração anterior torna-se menos freqüente, ou seja, soluções mais diversas são construídas. Como se observa que o filtro utilizado pode reduzir o tempo computacional necessário à execução para várias instâncias sem prejudicar a qualidade das soluções construídas, este foi empregado durante todas as baterias de testes executadas.

Na comparação entre os tempos de execução da estratégia de GRASP simples e o GRASP associado a cada uma das técnicas de reconexão de caminhos, observa-se um acréscimo no tempo despendido pelas execuções que utilizam a reconexão de caminhos como estratégia de intensificação. Tal acréscimo de tempo já era esperado, sendo compensado pela construção de soluções de maior diversidade, intermediárias às soluções início e guia.

Inst.	GRASP	T1E1	T2E1	T3E1	T1E2	T2E2	T3E2
A050	1,03	1,25	1,24	1,28	1,26	1,27	1,26
A100	9,42	12,78	12,54	12,57	12,60	12,59	12,58
A150	47,20	58,52	58,51	58,82	58,43	58,32	58,34
A200	106,54	186,77	187,04	186,26	186,39	185,91	186,24
A250	385,74	472,42	473,27	485,86	483,51	471,81	467,32
B050	1,24	1,94	1,93	1,96	1,96	1,96	1,97
B100	18,95	24,51	24,23	24,32	24,05	24,07	24,17
B150	93,40	105,42	105,41	105,75	110,85	110,68	111,04
B200	268,49	285,34	289,10	288,16	290,30	288,07	289,60
B250	820,70	863,17	878,21	864,62	863,61	847,73	823,45
C050	1,07	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,46
C100	10,73	15,40	15,31	15,37	16,02	16,03	16,03
C150	61,90	70,35	70,23	70,39	74,74	74,61	74,92
C200	184,92	217,45	218,01	217,94	218,63	218,61	220,15
C250	488,52	556,62	557,77	532,79	565,40	561,47	554,13
D050	1,13	1,68	1,68	1,65	1,77	1,79	1,80
D100	12,30	18,92	18,72	18,85	19,45	19,48	19,55
D150	57,67	70,71	70,76	70,79	73,87	74,04	74,22
D200	179,61	208,10	208,04	207,68	209,45	210,58	210,93
D250	433,19	528,95	538,12	535,11	539,56	529,09	526,23
E300	401,13	634,71	612,11	622,07	638,72	629,14	631,67
E400	1667,02	1884,26	1907,43	1902,72	1884,28	1879,65	1901,48
E500	3010,57	3381,93	3436,78	3425,71	3417,12	3396,32	3415,23

Tabela 4.5: Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 20% da população original sem a utilização do filtro.

Inst.	GRASP	T1E1	T2E1	T3E1	T1E2	T2E2	T3E2
A050	0,45	0,70	0,68	0,67	0,66	0,65	0,67
A100	5,25	5,63	5,53	5,50	5,62	5,58	5,63
A150	24,89	25,53	24,80	26,12	25,30	26,31	25,82
A200	73,07	73,99	76,23	73,35	77,46	72,45	74,00
A250	158,51	156,40	154,64	152,47	161,30	157,06	157,99
B050	0,57	1,62	1,64	1,64	1,58	1,55	1,52
B100	10,55	22,71	23,10	26,55	27,75	26,63	25,53
B150	56,50	109,16	108,44	111,72	111,25	107,43	105,52
B200	184,12	286,51	276,31	282,50	289,40	290,10	286,34
B250	468,02	849,97	852,56	847,32	869,78	861,33	859,08
C050	0,52	0,95	0,74	1,19	1,28	1,12	1,07
C100	8,11	11,32	12,14	14,17	14,18	12,54	11,01
C150	51,66	66,92	66,78	72,34	72,68	66,09	64,73
C200	173,92	210,70	212,50	228,48	224,81	212,44	210,41
C250	454,30	546,70	538,82	571,62	572,00	540,10	534,00
D050	0,65	1,77	1,60	1,52	1,61	1,57	1,58
D100	10,41	18,07	17,12	17,68	17,14	17,47	16,98
D150	53,19	71,37	69,68	72,14	70,96	70,06	68,01
D200	173,62	201,79	203,45	201,30	199,74	202,40	200,80
D250	451,27	523,59	518,70	514,00	512,65	519,71	514,72
E300	376,19	472,35	472,69	472,45	472,71	473,35	478,32
E400	1437,24	1753,78	1752,27	1751,88	1765,02	1764,84	1766,64
E500	2875,34	3268,45	3261,88	3263,30	3248,96	3253,01	3251,47

Tabela 4.6: Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 20% da população original com a utilização do filtro.

Inst.	GRASP	T1E1	T2E1	T3E1	T1E2	T2E2	T3E2
A050	3,65	5,20	5,19	5,17	5,20	5,20	5,22
A100	52,34	71,26	70,44	70,48	70,42	70,45	70,52
A150	297,65	354,58	354,06	351,70	350,64	347,17	354,86
A200	994,12	1126,77	1100,14	1122,37	1114,44	1129,68	1118,01
A250	2545,13	2815,03	2944,90	2746,54	2765,32	2769,52	2792,27
B050	4,61	6,35	6,33	6,34	6,33	6,30	6,35
B100	65,32	84,43	83,13	83,52	82,80	82,80	83,15
B150	364,90	442,50	446,44	444,66	442,65	448,17	443,40
B200	947,66	1239,02	1272,58	1276,81	1275,03	1355,41	1234,02
B250	2914,06	3334,05	3215,39	3305,49	3370,33	3249,96	3440,06
C050	3,36	5,40	5,38	5,38	5,39	5,40	5,40
C100	52,61	73,53	73,23	73,33	73,12	73,15	73,17
C150	296,07	341,63	350,34	341,70	344,41	350,58	341,64
C200	873,54	1015,71	1081,86	1101,35	1094,93	1086,97	1105,68
C250	2533,40	2822,94	2639,69	2655,19	2763,41	2670,94	2828,13
D050	4,11	6,44	6,39	6,43	6,13	6,13	6,17
D100	54,16	72,27	71,85	71,99	72,30	72,28	72,51
D150	313,25	358,64	358,28	349,99	348,49	356,87	356,03
D200	1046,72	1126,05	1125,59	1125,91	1106,57	1095,77	1113,43
D250	2561,20	2907,76	2758,75	2738,34	2740,88	2770,05	2727,16
E300	1765,24	1937,54	1912,32	2005,91	1944,3	1959	1934,52
E400	11209,06	13467,14	13326,72	13861,81	13671,34	13278,61	13947,12
E500	45236,2	47941,41	46646,43	47662,09	48252,93	47521,08	47639,85

Tabela 4.7: Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 40% da população original sem a utilização do filtro.

Inst.	GRASP	T1E1	T2E1	T3E1	T1E2	T2E2	T3E2
A050	1,38	1,68	1,72	1,49	1,53	1,54	1,53
A100	12,17	15,51	13,56	13,96	14,45	14,52	14,43
A150	34,20	38,56	36,37	38,80	37,01	36,78	36,43
A200	112,84	122,67	117,55	114,62	118,94	118,14	118,97
A250	366,35	391,29	391,29	395,45	369,44	369,07	367,15
B050	3,16	4,63	4,86	4,72	4,66	4,72	4,71
B100	67,64	81,69	78,34	82,76	79,86	80,34	79,88
B150	352,36	439,38	440,32	445,12	449,30	448,20	441,42
B200	1109,27	1233,73	1251,20	1256,70	1284,17	1283,34	1228,18
B250	2721,72	3297,39	3289,50	3306,33	3304,78	3304,30	3173,14
C050	1,48	1,65	1,73	1,75	1,58	1,56	1,57
C100	32,27	36,72	35,59	38,52	37,30	36,90	36,96
C150	218,44	231,97	235,24	241,00	233,07	231,47	231,31
C200	532,78	659,28	659,23	665,70	667,81	672,60	684,12
C250	1936,48	2063,09	2062,98	2049,48	2188,63	2159,14	2258,34
D050	3,38	4,87	4,09	4,64	4,86	4,84	4,88
D100	52,06	57,02	56,37	57,14	58,32	57,29	58,02
D150	228,56	250,24	250,98	258,30	252,77	252,46	253,42
D200	874,30	931,53	932,33	967,18	949,10	944,63	952,29
D250	2321,62	2480,58	2469,06	2551,77	2664,23	2537,24	2688,45
E300	1618,3	1886,54	1886,8	1886,85	1927,87	1907,87	1915,95
E400	10334,14	12923,83	13216,42	12803,28	12860,82	12801,66	12797,62
E500	44686,12	46143,59	46288,81	46675,25	47190,54	46370,06	46215,45

Tabela 4.8: Tempos computacionais para soluções formadas por subgrupos de 40% da população original com a utilização do filtro.

4.4 GRASP com Tempo de Execução Limitado

Como os algoritmos GRASP com reconexão de caminhos demandam tempos de execução semelhantes entre si e maiores que o GRASP simples, executou-se este último durante o mesmo tempo utilizado pelos primeiros. Desta forma, uma comparação mais justa entre os métodos pode ser realizada.

Os resultados para subgrupos equivalentes a 20% e 40% da população são apresentados, respectivamente, nas Tabela 4.9 e 4.10. Nelas são comparados os valores médios obtidos através de três execuções do GRASP simples limitado a 1000 iterações (segunda coluna), os valores médios obtidos através três execuções distintas do GRASP simples, porém, não mais limitado a um certo número de iterações, e sim pelo tempo computacional (terceira coluna). Este limite de tempo foi o mesmo necessário ao GRASP com reconexão de caminhos utilizando a estratégia T1E1 para a obtenção dos resultados nas condições descritas anteriormente. São apresentados ainda o pior e o melhor resultados médios de cada instância obtidos por alguma das estratégias com reconexão de caminhos.

Inst.	GRASP simples	GRASP tempo	Pior RC	Melhor RC
B150	2756581	2756581	2758003	2758381
B200	4787900	4787908	4788086	4788086
B250	7365771	7370551	7375943	7376175
C150	2613286	2613286	2613286	2613286
C200	4626056	4626057	4628450	4630545
C250	7176140	7176141	7177937	7178043
D150	3498547	3498642	3500283	3502059
D200	6203391	6203391	6204650	6205505
D250	9671279	9671279	9680189	9680980
E300	9652	9652	9679	9679
E400	16874	16881	16899	16904
E500	26151	26154	26198	26198

Tabela 4.9: Comparação dos resultados obtidos pelo GRASP simples, GRASP limitado por tempo, o pior e o melhor resultados obtidos através do GRASP associado a uma das técnicas de reconexão de caminhos para subgrupos equivalentes a 20% da população.

Inst.	GRASP simples	GRASP tempo	Pior RC	Melhor RC
B150	9952386	9952386	9952386	9957365
B200	17526848	17526848	17543566	17544061
B250	27134803	27137262	27153691	27154943
C150	9374611	9374611	9374611	9374611
C200	16759895	16759895	16759895	16759895
C250	26047022	26047022	26047022	26047022
D150	13609448	13609448	13609448	13609448
D200	24127046	24127046	24130476	24131581
D250	37720373	37720373	37733021	37735250
E300	35853	35852	35868	35868
E400	62343	62345	62415	62424
E500	97170	97167	97252	97277

Tabela 4.10: Comparação dos resultados obtidos pelo GRASP simples, GRASP limitado por tempo, o pior e o melhor resultados obtidos através do GRASP associado a uma das técnicas de reconexão de caminhos para subgrupos equivalentes a 40% da população.

Comparando-se os resultados do GRASP com tempo de execução limitado com os resultados do GRASP simples observa-se que, em nove situações, destacadas em negrito (sendo que apenas duas ocorreram para subgrupos formados por 40% da população original), o GRASP limitado por tempo de execução foi capaz de gerar resultados médios superiores aos obtidos pelo GRASP simples. Observa-se, porém, que para nenhum dos casos o GRASP limitado por tempo de execução foi capaz de obter soluções melhores do que a pior solução gerada pelo GRASP associado a uma das técnicas de reconexão de caminhos. Estes resultados reforçam a contribuição da reconexão de caminhos, permitindo a exploração de soluções formadas por indivíduos de qualidade que não são alcançados pelo GRASP mesmo que este disponha de um maior tempo computacional, o que lhe permite realizar mais iterações.

4.5 Análise Referente ao Tamanho do Conjunto Elite

O conjunto elite é constituído por uma quantidade restrita de soluções, que apresentam um alto nível de qualidade em relação às demais soluções já obtidas. A cada nova solução gerada por qualquer uma das estratégias empregadas, avalia-se a possibilidade de sua inserção no conjunto elite. Todos os resultados apresentados anteriormente foram obtidos utilizando-se um conjunto elite formado por cinco soluções distintas. Realizou-se uma nova bateria de testes com o objetivo de avaliar a influência que a quantidade de soluções no conjunto elite exerce sobre a qualidade das soluções obtidas através das estratégias GRASP aplicadas. A Tabela 4.11 apresenta os resultados obtidos através da utilização de um conjunto elite formado por cinco soluções, que representam os resultados avaliados nas subseções anteriores, enquanto as Tabelas 4.12 e 4.13 apresentam os resultados médios obtidos para três execuções, utilizando conjuntos elite formados por 10 e 20 soluções distintas, respectivamente. Nas Tabelas 4.12 e 4.13 as soluções assinaladas com um asterisco (“*”) apresentam uma diversidade média superior à obtida para o conjunto elite com cinco soluções, e as assinaladas com o preenchimento em cinza apresentam uma diversidade média inferior a obtida para o conjunto elite com cinco soluções.

Elite = 5	20%				40%			
	Inst.	T1E1	T1E2	T3E1	T3E2	T1E1	T1E2	T3E1
B150	2758381	2758381	2758003	2758003	9957365	9957365	9952386	9952949
B200	4788086	4788086	4788086	4788086	17543566	17543566	17544061	17544061
B250	7376110	7376175	7375943	7375953	27153692	27153829	27154524	27154943
C150	2613286	2613286	2613286	2613286	9374611	9374611	9374611	9374611
C200	4630545	4630545	4628450	4629317	16759895	16759895	16759895	16759895
C250	7178043	7178043	7177937	7177937	26047022	26047022	26047022	26047022
D150	3500283	3500283	3502059	3502059	13609448	13609448	13609448	13609448
D200	6205505	6205505	6204650	6204650	24130476	24130476	24131581	24131581
D250	9680980	9680494	9680944	9680189	37733021	37733021	37735250	37735250

Tabela 4.11: Diversidades médias obtidas para soluções formadas por subgrupos de 20% e 40% da população utilizando um conjunto elite composto por cinco soluções distintas.

Elite = 10	20%				40%			
Inst.	T1E1	T1E2	T3E1	T3E2	T1E1	T1E2	T3E1	T3E2
B150	2758381	2758381	2758381*	2758381*	9957074	9954785	9955681*	9954785*
B200	4788086	4788086	4788086	4788086	17543565,7	17544061*	17543565,7	17544060,7
B250	7375889	7375889	7376381*	7376381*	27157991*	27154037*	27155965*	27143658
C150	2613286	2613286	2613286	2613286	9374611	9374611	9374611	9374611
C200	4630545	4628450	4630545*	4628450	16759895	16759895	16759895	16759895
C250	7177973	7177973	7177973*	7177973*	26047022	26047022	26047022	26047022
D150	3500358	3502060*	3499331	3502059	13609447,7	13609299,3	13609447,7	13609299,3
D200	6205508*	6204650	6205508*	6204650	24129532,3	24131581*	24129532,3	24131581
D250	9680627	9680944*	9680319	9680189	37733860*	37735971*	37733860,3	37728044,7

Tabela 4.12: Diversidades médias obtidas para soluções formadas por subgrupos de 20% e 40% da população utilizando um conjunto elite composto por dez soluções distintas.

Elite = 20	20%				40%			
Inst.	T1E1	T1E2	T3E1	T3E2	T1E1	T1E2	T3E1	T3E2
B150	2758381	2758381	2758381*	2758381*	9954915	9954785	9954915*	9954785*
B200	4788078	4788086	4788078	4788086	17543565,7	17544061*	17543565,7	17544060,7
B250	7375478	7375889	7373465	7376381*	27156297*	27155832*	27157189*	27147918,3
C150	2613286	2613286	2613286	2613286	9374611	9374611	9374611	9374611
C200	4630545	4628450	4630545*	4628450	16759895	16759895	16759895	16759895
C250	7177973	7177973	7177973*	7177973*	26047022	26047022	26047022	26047022
D150	3499240	3502059*	3498950	3502060*	13609596*	13609596*	13609596*	13609596*
D200	6206182*	6204123	6206182*	6204123	24129487,3	24131581*	24129487,3	24131581
D250	9679090	9680944*	9679090	9679753	37730437,7	37735971*	37729136,7	37722873

Tabela 4.13: Diversidades médias obtidas para soluções formadas por subgrupos de 20% e 40% da população utilizando um conjunto elite composto por vinte soluções distintas.

Pode-se observar que utilizando-se um conjunto elite formado por dez soluções, em 20 casos obtiveram-se soluções de diversidade superior, e em 20 casos, soluções inferiores às obtidas através da utilização de um conjunto elite formado por cinco soluções. Já para conjuntos formados por vinte soluções, em 23 casos obtiveram-se resultados superiores, e em 25 casos, resultados inferiores em relação aos obtidos através da utilização de um conjunto elite de tamanho igual a cinco. Tais resultados evidenciam que o aumento do tamanho do conjunto elite não trouxe benefícios para o GRASP com reconexão de caminhos.

Capítulo 5

Conclusões

A contribuição da metaheurística GRASP na obtenção de resultados de boa qualidade para o PMD em tempo computacional viável já havia sido comprovada em [2]. Nesta dissertação, procurou-se evidenciar que através da técnica de reconexão de caminhos é possível se obter soluções de qualidade superiores às obtidas pelo GRASP, através da exploração do espaço de soluções compreendido entre duas soluções de qualidade. Esta exploração foi realizada de diferentes maneiras, combinando-se as formas de se variar o caminho percorrido entre duas soluções, início e guia, e pela forma utilizada para selecionar uma destas soluções de um conjunto restrito que armazena soluções de alta qualidade.

Os resultados apresentados no capítulo 4 comprovam a eficácia da utilização da reconexão de caminhos, pois para um grande número de testes realizados houve uma melhoria significativa na qualidade das soluções.

Foi possível observar que, para as instâncias testadas, a variação dentre as formas adotadas para se percorrer um caminho entre as duas soluções selecionadas (da melhor para a pior solução, da pior para a melhor solução e alternando os sentidos entre as soluções até que ambas as trajetórias atinjam a mesma solução) mostrou-se muito discreta, não sendo possível eleger uma destas estratégias como a mais eficaz. Em relação à forma com a qual uma solução do conjunto elite é selecionada para ser empregada no processo de reconexão de caminhos, observou-se um comportamento distinto em relação ao tamanho do conjunto de indivíduos que formam uma solução. A investigação deste comportamento não foi capaz de encontrar uma razão que o justificasse, sendo este um ponto relevante a ser estudado em trabalhos futuros.

Em algumas instâncias particulares, a melhora nos resultados obtidos foi muito pequena ou inexistente. Suspeita-se que nestes casos, mais simples, as soluções encontradas pelo GRASP já seriam ótimas ou estariam muito próximas das ótimas. Tal fato poderia ser comprovado através da execução de um método exato para tais instâncias.

Em relação ao tamanho adotado para o conjunto elite, pode-se observar que utilizando-se conjuntos formados por uma menor quantidade de soluções (nos testes realizados, 5 soluções distintas), obteve-se um desempenho ligeiramente superior à utilização de conjuntos formados por 10 e 20 soluções. Observou-se desta forma que o aumento do conjunto elite não trouxe benefícios para a estratégia de reconexão de caminhos.

Em trabalhos futuros, uma proposta do desenvolvimento de uma versão do GRASP com reconexão de caminhos em um ambiente de processamento paralelo mostra-se interessante para a diminuição do tempo computacional necessário pelo processo, o que permitiria sua aplicação em populações formadas por uma maior quantidade de indivíduos em um tempo computacional viável. Além disso, a utilização de uma estratégia paralela colaborativa pode promover, além de uma diminuição no tempo de execução, uma melhoria na qualidade dos resultados [17].

Referências Bibliográficas

1. Aiex, R. M., Resende, M. G. C., Ribeiro, C. C., “Probability Distribution of Solution Time in GRASP: An Experimental Investigation”, *Journal of Heuristics* 8: 343-373, (2002).
2. Andrade, P. M. F., Plastino, A., Ochi, L. S., Martins, S. L., “GRASP for the Maximum Diversity Problem”, *Proceedings of the Fifth Metaheuristics International Conference* (2003).
3. Bastos, M. P., Ribeiro, C. C., “Reactive Tabu Search with Path Relinking for the Steiner Problem in Graphs”, *Essays and Surveys in Metaheuristics*, Kluwer Academic Publishers, (2001)
4. Feo T. A., Resende, M. G. C., “Greedy Randomized Adaptive Search Procedures”, *Journal of Global Optimization* 6: 109:133, (1995).
5. Ghosh, J. B., “Computational Aspects of the Maximum Diversity Problem”, *Operations Research Letters* 19: 175-182, (1996).
6. Glover, F., “Scatter Search and Path Relinking”, *New Ideas in Optimization*: 297-316, McGraw Hill, (1999).
7. Glover, F., Laguna, M., Marti, R., “Fundamentals of Scatter Search and Path Relinking”, *Control and Cybernetics*, Vol. 19, number 3: 653-684, (2000).
8. Glover, F., Laguna, M., Marti, R., “Scatter Search and Path Relinking: Foundations and Advanced Designs”, *New Optimization Techniques in Engineering*, Godfrey Onwubolu, (2004).
9. Glover, F., Laguna, M., Marti, R., “New Ideas and Applications of Scatter Search and Path Relinking”, *New Optimization Techniques in Engineering*, Godfrey Onwubolu, (2004).
10. Greistorfer, P., Voß, S., “Controlled Pool Maintenance for Metaheuristics”, *Conference on Adaptive Memory and Evolution: Tabu Search and Scatter Search*, (2004).
11. Katayama, K., Narihisa, H., “An Evolutionary Approach for the Maximum Diversity Problem”, *Fuzzy Sets Based Heuristics for Optimization*, Verdegay, *Metaheuristics: Computer Decision-making*, Kluwer Academic Publishers, (2004).
12. Kuo, C-C., Glover, F., Dhir, K.S., “Analysing and modeling the maximum diversity problem by zero-one programming”, *Decision Sciences* 24: 1171-1185, (1993).

13. Resende, M. G. C., Ribeiro, C. C., “A GRASP with Path Relinking for Private Virtual Circuit Routing”, *Networks*, 41: 104-114, (2003).
14. Resende, M. G. C., Binato, S., Faria, H., “Greedy Randomized Adaptive Path Relinking”, *Proceedings of the IV Metaheuristics International Conference*: 393-397 (2001).
15. Resende, M. G. C., Werneck, R. F., “A GRASP with Path Relinking for the P-Median Problem”, *Essays and Surveys on Metaheuristics*: 325-367, Kluwer Academic Publishers (2002).
16. Resende, M. G. C., Ribeiro, C. C., “GRASP with Path Relinking: Recent Advances and Applications”, *Metaheuristics: Progress as Real Problem Solvers*, Kluwer Academic Publishers (2005).
17. Rosseti, I. C. M., “Estratégias Sequenciais e Paralelas de GRASP com Reconexão por Caminhos para o Problema de Síntese de Redes a 2-caminhos”, Tese de Doutorado, PUC-Rio (2003).
18. Silva, G. C., Ochi, L. S., Martins, S. L., “Experimental Comparison of Greedy Randomized Adaptive Search Procedures for the Maximum Diversity Problem”, *Experimental and Efficient Algorithms, Third International Workshop*, vol. 3059 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, (2004).