

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

KENNEDY MORAIS FERNANDES

**Formulação de Mínimos Quadrados aplicada
à Problemas de Escoamentos Miscíveis**

NITERÓI

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

KENNEDY MORAIS FERNANDES

**Formulação de Mínimos Quadrados aplicada
à Problemas de Escoamentos Miscíveis**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Aplicações - Modelagem Computacional.

Orientadora:
Regina Célia Paula Leal Toledo

NITERÓI

2007

Formulação de Mínimos Quadrados aplicada
à Problemas de Escoamentos Miscíveis

Kennedy Morais Fernandes

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada por:

Prof^a. D.Sc. Regina Célia Paula Leal Toledo / IC-UFF
(Presidente)

Prof. D.Sc. Elson Magalhães Toledo/ LNCC

Prof. D.Sc. José Henrique Carneiro de Araujo/ IC-UFF

Niterói, 09 de março de 2007.

"Eu não vim até aqui pra desistir agora
Minhas raízes estão no ar
Minha casa é qualquer lugar
Se depender de mim eu vou até o fim
Toda a vida, o dia inteiro
Não seria exagero
Se depender de mim eu vou até o fim
Cada célula, todo fio de cabelo
Falando assim parece exagero
Mas se depender de mim
Eu vou até o fim"

Humberto Gessinger

*Dedico este trabalho à Deus,
que sempre me deu forças para
continuar mesmo nos
momentos difíceis.*

Agradecimentos

Agradeço à Deus por ter me dado forças, muita disposição e saúde para concluir este trabalho. À minha orientadora, Professora Regina Leal pela amizade, pela paciência e principalmente pelo conhecimento passado ao longo do curso, aos professores Erwin Doeschler e Brauliro Gonçalves Leal pelo incentivo e apoio. À todos os professores e funcionários do Instituto de Computação-UFF e de todos os lugares por onde passei: Secretaria Municipal de Educação-PMGV, FATEC-UNIVALE, ETEIT, Matemática-UNIVALE, Escola Estadual Euzébio Cabral, Escola Estadual Professor Joaquim Pedro Nascimento, Colégio Tiradentes, Colégio Nossa Senhora de Lourdes-Lourdinhas, Eletrônica À Televideo, Eletrônica Transistec e Eletrônica Zezito.

Agradeço também à todos os meus amigos especiais: ao quarteto da modelagem computacional (Edgar, Augusto, Diego, Sanderson), ao trio estrangeiro da computação em potência (Edwin, Helder, Jhonny), à minha grande amiga matemática (Carolina), aos amigos da república (Glauco, Renata, Leandro, Alex), aos amigos militares (Joel Júnior, Saulo, Wesley, Marcones, Luciano, Ismael, Neemias e Saloto), aos amigos do laboratório (Jacques, Daniela, Rodrigo, Tiago-Facada, Tiago-Jovem, Rafael-Guto, Rafael-Satã, Cristiano, Luciano, Cristiane, Viviane, Jonivan, Ary, Luciana, Stênio, Nilmax, André-Mocado, Eduardo, Áthila), ao meu amigo desde a época do ensino médio (Guilherme), aos amigos do BNH-São Pedro (Wallace-Sapinho, Eudir, Paulo, Marcos, Vicente), aos meus irmãos (Kenner, Keysianne), ao meu primo que é meu "irmão mais velho" (Renato) e ao meu tio que faz o papel de pai quando meu pai não está presente (Paulo).

Agradeço à minha mãe por todo amor, dedicação e carinho comigo ao longo de toda a minha vida. Ao homem que eu mais amo neste mundo, meu pai, que sempre esteve comigo nesta caminhada e acreditou no meu trabalho.

Agradeço, em especial, à minha esposa e à minha filha por me fazerem sentir muito feliz e especial, e também pela compreensão em todos os momentos de ausência.

Resumo

O escoamento miscível incompressível em meios porosos, caracterizando o processo de recuperação terciária em reservatórios de petróleo, é modelado matematicamente por um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares, com condições de contorno e condições iniciais adequadas. O modelo matemático consiste de um sub-sistema elíptico envolvendo os campos de pressão e velocidade, oriundo da Lei de Conservação de Massa e Lei de Darcy, e uma equação de transporte, predominantemente convectiva para a concentração, sendo essa a variável de maior interesse.

Várias formulações variacionais têm sido empregadas para resolver este problema, visando a determinação precisa da velocidade. Neste trabalho o método dos elementos finitos com a formulação variacional de mínimos quadrados é aplicada ao sub-sistema elíptico do problema. Com o acréscimo da equação do rotacional nulo obtém-se convergência na norma H_1 tanto para a pressão como para a velocidade. A equação de transporte também é resolvida pela formulação de mínimos quadrados a partir de sua descrição como um sistema equivalente de equações diferenciais de primeira ordem, que apesar de ser uma formulação mista, acomoda interpolações de igual ordem para concentração e sua derivada. Resultados numéricos são apresentados e comparados com os descritos na literatura.

Abstract

Incompressible miscible flow in porous media which characterizes the process of tertiary recovery in oil reservoir are numerically solved in this work. Such flows are here modeled through a coupled nonlinear partial differential equations system with proper boundary and initial conditions. The mathematical model consists of an elliptic sub-system involving both pressure and velocity fields coming mass conservation law, Darcy's law and also from a transport equation, which is predominantly convective being to the concentration the main variable in this problem.

Several variational formulation have been used to solve this problem aiming the determination of an accurate velocity field. In the present work finite element method with a least square variational formulation are applied to the elliptic sub-system considering also the inclusion of the null rotational equation which allow as to obtain H_1 convergence both for pressure as well for the velocity approximations. The convection-diffusion equation is also numerically solved through least squares formulation after it has been rewritten as a first order system of differential equation. This formulation besides of its mixed character allows equal order interpolation for concentration and for it derivative. Numerical results are presented and compared to the ones showed in the open literature.

Palavras-chave

1. Escoamentos Miscíveis
2. Método dos Elementos Finitos
3. Formulações Variacionais de Mínimos Quadrados

Sumário

Lista de Figuras	xi
1 Introdução	13
2 Formulação Variacional de Mínimos Quadrados	15
2.1 Algumas definições	15
2.2 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem Estacionários	17
2.3 Modelo Computacional de Elementos Finitos	18
3 Modelo Matemático para escoamentos Miscíveis	21
3.1 Equações governantes	21
3.2 Algoritmos de Solução	23
3.2.1 Método Implícito na Pressão e Explícito na Concentração	23
3.2.2 Método Totalmente Implícito	24
3.2.3 Método Implícito Sequencial	24
4 Aproximação para Equações de Pressão e Velocidade	26
4.1 Definição do problema	26
4.2 Formulação Mista em Pressão e Velocidade	27
4.3 Formulação com Rotacional	28
4.4 Resultados Numéricos	29
4.4.1 Exemplo 1	31
4.4.2 Exemplo 2	34

4.4.3	Exemplo 3	38
5	Equação de Transporte	41
5.1	Introdução	41
5.2	Definição do problema	42
5.3	Formulação Semi-Discreta de Mínimos Quadrados	43
5.3.1	Formulação Escalar	43
5.3.2	Formulações para Sistema de Equações	44
5.3.2.1	Formulação Implícita	44
5.3.2.2	Formulação Ponderada de Mínimos Quadrados	45
5.3.2.3	Formulação θ -Mínimos Quadrados	46
5.4	Formulações Espaço-Tempo de Elementos Finitos	47
5.4.1	Formulação Mínimos Quadrados Espaço-Tempo	48
5.5	Resultados Numéricos	49
5.5.1	Exemplo 1 - Convecção Pura Paralela à Malha	49
5.5.2	Exemplo 2 - Convecção Pura e Convecção-Difusão Inclinada à Malha	54
5.5.3	Exemplo 3 - Domínio Heterogêneo	58
5.5.4	Exemplo 4 - Velocidades variáveis	61
6	Escoamentos Miscíveis: Simulação Numérica	66
6.1	Método Implícito Seqüencial	66
6.2	Configuração de Cinco-Poços	67
6.3	Fontes Singulares	68
6.4	Simulação de Injeção de Traçadores	69
6.5	Simulação com razão de mobilidade adversa	71
7	Conclusão	74

Lista de Figuras

4.1	Malha inclinada	30
4.2	Permeabilidade homogênea	32
4.3	Permeabilidade homogênea e formulação com rotacional	32
4.4	Permeabilidade homogênea e malha inclinada	33
4.5	Permeabilidade homogênea, malha inclinada e formulação com rotacional	33
4.6	Domínio com permeabilidade heterogênea	34
4.7	Permeabilidade heterogênea	35
4.8	Permeabilidade heterogênea e formulação com rotacional	35
4.9	Permeabilidade heterogênea e malha inclinada	36
4.10	Permeabilidade heterogênea, malha inclinada e formulação com rotacional	36
4.11	Técnicas de Pós-Processamento para a Velocidade [1]	37
4.12	Domínio e condições de contorno [1]	38
4.13	Formulação sem rotacional	39
4.14	Formulação com rotacional	39
4.15	Representação da pressão na formulação com rotacional	40
5.1	Domínio com velocidade unidirecional	50
5.2	Formulação Semi-Discreta Ponderada	51
5.3	Formulação Semi-Discreta θ -Mínimos Quadrados	52
5.4	Formulação Espaço-Tempo - $CFL = 0,5$	52
5.5	Formulação Espaço-Tempo - $CFL = 1,0$	53
5.6	Formulação Espaço-Tempo - $CFL = 2,0$	53
5.7	Condições de contorno para convecção-difusão(a) e convecção pura(b)	54

5.8	Convecção-difusão - $\alpha = 22,5^\circ$	55
5.9	Convecção-difusão - $\alpha = 45^\circ$	56
5.10	Convecção-difusão - $\alpha = 67,5^\circ$	56
5.11	Convecção pura - $\alpha = 22,5^\circ$	57
5.12	Convecção pura - $\alpha = 45^\circ$	57
5.13	Convecção pura - $\alpha = 67,5^\circ$	58
5.14	Formulação Implícita	59
5.15	Formulação Ponderada	59
5.16	Formulação θ -Mínimos Quadrados	60
5.17	Formulação Espaço-Tempo	61
5.18	Formulação implícita escalar em $t = 0,12$ e $t = 0,348$	63
5.19	Formulação implícita sistema em $t = 0,12$ e $t = 0,348$	63
5.20	Formulação ponderada $\theta = 0,5$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$	64
5.21	Formulação ponderada $\theta = 0,67$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$	64
5.22	Formulação θ -mínimos quadrados $\theta = 0,5$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$	65
5.23	Formulação θ -mínimos quadrados $\theta = 0,67$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$	65
6.1	Configuração de um quarto de arranjo de cinco poços [2]	68
6.2	Formulação implícita em $t = 300$ e $t = 1500$ dias	70
6.3	Formulação ponderada ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias	71
6.4	Formulação θ -Mínimos Quadrados ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias	71
6.5	Oscilações espúricas [1, 2]	72
6.6	Formulação implícita em $t = 300$ e $t = 1500$ dias	72
6.7	Formulação ponderada ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias	73
6.8	Formulação θ -Mínimos Quadrados ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias	73

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento de novos métodos numéricos aliado ao contínuo crescimento dos recursos computacionais muito tem contribuído para a aplicação da simulação numérica em escoamentos em meios porosos. Uma dessas aplicações, por exemplo, tem como objetivo aumentar a produção de um campo de petróleo.

Para isso, técnicas de recuperação são normalmente utilizadas. Na chamada recuperação primária a produção se dá naturalmente por diferença de pressão. Já nas técnicas de recuperação, secundária e terciária, alteram-se essas condições naturais, utilizando a injeção de fluidos através de poços de injeção, para aumentar a pressão no seu interior e a vazão dos poços produtores. Nesses casos o escoamento é imiscível quando o fluido é a água (recuperação secundária) e miscível quando o fluido injetado é gás ou solvente (recuperação terciária).

Este trabalho tem como objetivo aplicar diferentes formulações de mínimos quadrados, com o método de elementos finitos [3, 4, 5, 6, 7], para cálculo da solução aproximada do sistema de equações diferenciais utilizado para modelar o escoamento miscível em reservatórios de petróleo.

Mais especificamente, o escoamento miscível incompressível em meios porosos caracterizando o processo de recuperação de petróleo, é modelado matematicamente por um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares, sujeitos a condições de contorno e condições iniciais [8]. Esse modelo matemático consiste de um sub-sistema elíptico envolvendo os campos de pressão e velocidade, oriundo da Lei de Conservação de Massa e Lei de Darcy, e uma equação de transporte predominantemente convectiva para a concentração. A variável de maior interesse é a concentração do fluido injetado entretanto, em se tratando de escoamento predominantemente convectivo é fundamental

a determinação precisa da velocidade [9].

Vários tipos de aproximações, utilizando o método dos elementos finitos baseado em formulações de Galerkin, têm sido empregadas para resolver este problema. Dentre estes, podemos destacar os seguintes trabalhos: Garcia [1], Castro [2], Malta [10], Ney [11] e Karam Filho [12].

Formulações variacionais de mínimos quadrados que, em sua forma clássica, têm a desvantagem de requerer maior grau de regularidade dos espaços de aproximação, têm sido aplicadas em muitos problemas reescrevendo as equações que descrevem o fenômeno físico como um sistema equivalente de equações diferenciais de primeira ordem, reduzindo assim, a necessidade de maior grau de regularidade dos espaços de aproximação, requerida nesta formulação na sua forma clássica [3, 13, 14, 15, 16, 17]. Ao se descrever o problema com um sistema de equações equivalente, há a necessidade de se aproximar um maior número de variáveis, devendo-se dessa forma trabalhar com uma formulação mista. Apesar disto, tem-se mostrado que para diversas aplicações não há necessidade de compatibilidade entre os espaços de aproximação para garantia de existência e unicidade da solução [3, 13, 15, 18, 19, 20].

Para apresentar o problema de interesse e as formulações a serem utilizadas, esse trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, apresentamos a formulação variacional de mínimos quadrados na sua forma clássica e também aplicada à um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. No Capítulo 3, fazemos uma breve apresentação do modelo matemático, objetivo deste trabalho, e descrevemos os algoritmos normalmente utilizados na resolução do modelo matemático do problema descrito. Para aproximar a pressão e a velocidade apresentamos no Capítulo 4 formulações mistas de mínimos quadrados. Exemplos são apresentados para validar as formulações descritas. No Capítulo 5, aproximamos a equação transporte, utilizando tanto uma formulação mínimos quadrados semi-discreta como uma formulação mínimos quadrados espaço-tempo. Diferentes exemplos numéricos com velocidades constantes e variáveis no tempo são apresentados. Exemplos numéricos são apresentados no Capítulo 6, utilizando-se o algoritmo implícito seqüencial descrito no Capítulo 3 e finalmente no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões do trabalho apresentado.

Capítulo 2

Formulação Variacional de Mínimos Quadrados

Formulações Variacionais de Mínimos Quadrados foram estudadas por Bramble e Schatz[21] na solução numérica de problemas de valor de contorno elípticos. Nesta formulação a solução aproximada é definida pela soma ponderada dos resíduos de mínimos quadrados da equação diferencial e das condições de contorno, não envolvendo integração por partes, como no método de Galerkin. Por essa razão, estas formulações têm a desvantagem de requerer maior grau de regularidade dos espaços de aproximação.

A alternativa que tem sido utilizada para diminuir esta necessidade de maior regularidade dos espaços de aproximação é a transformação da equação diferencial de ordem superior a um, em um sistema de equações diferenciais equivalente de 1ª ordem.

Neste capítulo apresentamos brevemente a formulação de mínimos quadrados aplicada a uma sistema estacionário de 1ª ordem.

2.1 Algumas definições

Apresentamos nessa seção algumas definições de operadores e de espaços a serem utilizados neste trabalho.

Definimos inicialmente os operadores:

- gradiente

$$(\nabla u)^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_{nsd}} \right\} \quad (2.1)$$

onde nsd é o número de dimensões do espaço e u um valor escalar;

- divergente:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial q_{nsd}}{\partial x_{nsd}} \quad (2.2)$$

com

$$\mathbf{q}^T = \left\{ q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_{nsd} \right\} \quad (2.3)$$

- rotacional:

$$rot \mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{q} = \frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y} \quad (2.4)$$

onde \times representa o produto vetorial.

Definimos também os seguintes espaços e normas associadas:

Seja $L^2(\Omega)$ o espaço de Hilbert contendo as funções u e v , quadrado integráveis em Ω , com produto interno definido como:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega \quad (2.5)$$

com norma:

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2 d\Omega \quad (2.6)$$

Definimos os seguintes espaços de Hilbert:

$$(H(\Omega))^m = \left\{ u \in L^2(\Omega) \forall |\alpha| \leq m, \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (2.7)$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ em } \Gamma \right\} \quad (2.8)$$

$$H_{div} = \left\{ \mathbf{q} \in L^2; \nabla \cdot \mathbf{q} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (2.9)$$

$$H_1 = \left\{ \mathbf{q} \in L^2; \nabla \mathbf{q} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (2.10)$$

e as normas de H_{div} e H_1 :

$$\|\mathbf{q}\|_{H_{div}}^2 = \|\mathbf{q}\|^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{q}\|^2 \quad (2.11)$$

e

$$\|\mathbf{q}\|_{H_1}^2 = \|\mathbf{q}\|^2 + \|\nabla \mathbf{q}\|^2 \quad (2.12)$$

2.2 Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem Estacionários

Formulações de Mínimos Quadrados têm sido aplicada [3, 4, 22, 23] em diversos problemas reescrevendo-se as equações que descrevem o fenômeno físico como um sistema equivalente de primeira ordem, reduzindo assim, a necessidade de maior grau de regularidade de espaços de aproximação requerida nesta formulação em sua forma clássica.

Como teremos um sistema de equações, o número de incógnitas a serem determinadas é, normalmente, maior que o número de incógnitas necessárias na formulação clássica de Galerkin. Por outro lado esta formulação conduz, de forma geral, em matrizes simétricas positivas definidas, mesmo que o operador diferencial do problema considerado não seja auto-adjunto.

Dado um problema descrito através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, definido em um domínio Ω de R^2 onde desejamos encontrar $u \in (H(\Omega))^2$, sujeitos a condições de contorno apropriadas, é sempre possível escrevê-lo da seguinte forma:

$$[\mathbf{L}]\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.13)$$

onde

$$[\mathbf{L}] = \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{B} \quad (2.14)$$

sendo \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 e \mathbf{B} matrizes $m \times m$ que definem o sistema de primeira ordem e o resíduo desse sistema, $R(\mathbf{u})$, pode ser dado por:

$$R(\mathbf{u}) = [\mathbf{L}]\mathbf{u} - \mathbf{f} \quad (2.15)$$

Assim define-se o funcional J de mínimos quadrados sobre o domínio Ω como:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} R(\mathbf{u})^T R(\mathbf{u}) dx dy \quad (2.16)$$

Portanto o funcional de mínimos quadrados correspondente a equação (2.14) é

$$J(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial y} + \mathbf{B} \mathbf{u}_h - \mathbf{f} \right\|^2 \quad (2.17)$$

sendo $\|\cdot\|$, a norma em L^2 .

Nosso problema transforma-se então, em encontrar $\mathbf{u} \in (H(\Omega))^2$, tal que:

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in (H(\Omega))^2 \quad (2.18)$$

A formulação fraca é obtida a partir de (2.16) tomando a variação de J em relação a \mathbf{u} e igualando-se o resultado a zero, ou seja:

$$\nabla J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} ([\mathbf{L}]\mathbf{u}) ([\mathbf{L}]\mathbf{u} - \mathbf{f}) d\Omega = 0 \quad (2.19)$$

Assim, podemos escrever:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) \quad (2.20)$$

onde

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ([\mathbf{L}]\mathbf{u}, [\mathbf{L}]\mathbf{v}) \quad (2.21)$$

e

$$f(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, [\mathbf{L}]\mathbf{v}) \quad (2.22)$$

A forma discreta deste problema, pode ser obtida de maneira usual, definindo um sub-espaço \mathbf{u}_h de elementos finitos de tal forma que:

$$J(\mathbf{u}_h) \leq J(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in H_h \subset (H(\Omega))^2 \quad (2.23)$$

Com a forma bilinear discreta dada por:

$$B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = ([\mathbf{L}]\mathbf{u}_h, [\mathbf{L}]\mathbf{v}_h) \quad (2.24)$$

e

$$f(\mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, [\mathbf{L}]\mathbf{v}_h) \quad (2.25)$$

2.3 Modelo Computacional de Elementos Finitos

A discretização de elementos finitos da variável \mathbf{u} é feita da forma usual como:

$$\mathbf{u}_h(x, y) = \sum_{j=1}^{N_e} \phi_j(x, y) \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{3j} \\ \vdots \\ u_{mj} \end{bmatrix} = \Phi \mathbf{U}_e \quad (2.26)$$

sendo N_e é o número de nós do elemento, Φ é a matriz das funções de interpolação, dada por:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 I & \phi_2 I & \dots & \phi_{N_e} I \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

onde ϕ_i é a função de interpolação associada ao nó i , \mathbf{I} a matriz identidade de ordem m , m é o número de incógnitas de cada nó do elemento, \mathbf{U}_e é o vetor das incógnitas de cada elemento, ou seja:

$$\mathbf{U}_e^T = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{21} & \dots & U_{m1} & \dots & U_{mN_e} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Substituindo-se a aproximação de elementos finitos dada por (2.26) em (2.17), temos:

$$J(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2} \left\| \mathbf{A}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{U}_e + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{U}_e + \mathbf{B} \Phi \mathbf{U}_e \right\|^2. \quad (2.29)$$

Fazendo-se a variação de $J(\mathbf{u}_h)$ com relação a \mathbf{U}_e , temos:

$$\nabla J(\mathbf{U}_e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \left[\mathbf{A}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{B} \Phi \right]^T \left[\left(\mathbf{A}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{B} \Phi \right) \mathbf{U}_e - \mathbf{f} \right] d\Omega^e. \quad (2.30)$$

Igualando-se a variação $\nabla J(\mathbf{U}_e)$ a zero, obtemos:

$$\mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{F}_e \quad (2.31)$$

sendo,

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega^e} \left[\mathbf{A}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{B} \Phi \right]^T \left[\mathbf{A}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{B} \Phi \right] d\Omega^e \quad (2.32)$$

e

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega^e} \left[\mathbf{A}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{B} \Phi \right]^T \mathbf{f} d\Omega^e \quad (2.33)$$

Expandindo-se (2.32) e utilizando a notação $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \Phi_x$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \Phi_y$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e = & \int_{\Omega^e} \left[\Phi^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \Phi + \Phi^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}_1 \Phi_x + \Phi^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}_2 \Phi_y + \Phi_x^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{B} \Phi + \Phi_y^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{B} \Phi \right] d\Omega^e + \\ & + \int_{\Omega^e} \left[\Phi_x^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 \Phi_x + \Phi_y^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \Phi_x + \Phi_x^T \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 \Phi_y + \Phi_y^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \Phi_y \right] d\Omega^e \end{aligned} \quad (2.34)$$

Podemos escrever (2.34) como:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega^e} \mathbf{D}_h^T \mathbf{L} \mathbf{D}_h d\Omega^e \quad (2.35)$$

onde:

$$\mathbf{D}_h = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi_x \\ \Phi_y \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

e

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

ou

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{B} & \mathbf{A}_1^T \mathbf{B} & \mathbf{A}_2^T \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{B}^T \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Tendo-se as matrizes \mathbf{K}_e e \mathbf{F}_e de cada elemento, dadas em (2.35) e (2.33) respectivamente, as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{F} globais podem ser montadas da forma usual de elementos finitos.

Capítulo 3

Modelo Matemático para Escoamentos Miscíveis

Neste capítulo apresentamos o sistema de equações diferenciais utilizado para modelar o escoamento de fluidos miscíveis incompressíveis em um meio poroso e diferentes algoritmos para sua solução são apresentados.

3.1 Equações governantes

O modelo matemático para simulação de um reservatório de petróleo é definido por um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares governantes do problema, juntamente com as respectivas condições de contorno e condicional inicial.

O movimento dos fluidos nos meios porosos é governado por um sistema de equações elípticas, e uma equação do tipo convecção-difusão, predominantemente convectiva, expressando a conservação do fluido injetado, denominada equação de concentração.

Considerando o fluxo de fluidos miscíveis e incompressíveis através dos meios porosos, num domínio rígido $\Omega \subset R^2$, com fronteira Γ , onde os efeitos gravitacionais são desprezados, o conjunto de equações governantes em um intervalo $t \in [0, T]$ pode ser descrito como [8, 9]:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{k}(\mathbf{x})}{\mu(c)} \nabla p \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (3.2)$$

com condição de contorno:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (3.3)$$

e

$$\lambda \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{x})\nabla c) = f\hat{c} \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (3.4)$$

com condições de contorno e inicial:

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}, \mathbf{x})\nabla c \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (3.5)$$

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega \quad (3.6)$$

sendo:

- $\mathbf{x} = (x, y)$, o vetor posição;
- $p(\mathbf{x}, t)$, a pressão da mistura;
- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ a velocidade da mistura que é a velocidade de Darcy $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ decomposta nas componentes $u_x(\mathbf{x}, t)$ e $u_y(\mathbf{x}, t)$;

- $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$, a porosidade;
- $\mathbf{k}(\mathbf{x})$, a permeabilidade do meio poroso;
- $c(\mathbf{x}, t)$, a concentração da mistura dos fluidos;
- $f = f(\mathbf{x}, t)$, os termos fontes ou sumidouros;
- \hat{c} , a concentração no termo de fonte.

O tensor \mathbf{D} de difusão-dispersão da equação da concentração pode ser expresso por [8, 9]:

$$\mathbf{D} = \alpha_m \mathbf{I} + |\mathbf{u}| \{ \alpha_l E(\mathbf{u}) + \alpha_t E(\mathbf{u})^\perp \}, \quad (3.7)$$

onde o elemento (i, j) do tensor $E(\mathbf{u})$ é dado por:

$$E(\mathbf{u})_{i,j} = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} u_i u_j, \quad (3.8)$$

e a norma $|\mathbf{u}|$ é definida como:

$$|\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

e

$$E(\mathbf{u})^\perp = \mathbf{I} - E(\mathbf{u}) \quad (3.10)$$

sendo:

- \mathbf{I} , a matriz identidade;

- α_m , o coeficiente de difusão molecular;
- α_l , o coeficiente de dispersão longitudinal;
- α_t , o coeficiente de dispersão transversal.

Como no sub-sistema elíptico não há condição de contorno em $p(\mathbf{x}, t)$, ele fica definido a menos de constante. A forma escolhida para levantar essa indeterminação é prescrevendo a pressão em um ponto qualquer do domínio de maneira que a solução $p(\mathbf{x}, t)$ tenha média nula, ou seja:

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x}, t) dx = 0 \quad t \in (0, T). \quad (3.11)$$

A incógnita de maior interesse do sistema de equações (3.1-3.6) é a concentração $c(\mathbf{x}, t)$, que nas simulações numéricas das técnicas de recuperação de reservatório, indica o quanto da produção é influenciada pela injeção de um fluido ou seja, quanto de óleo passa a ser recuperado a partir de alguma intervenção no comportamento normal de produção do reservatório.

Na equação (3.2), lei de Darcy, a viscosidade μ é dada pela relação empírica [24, 25]:

$$\mu(c) = \mu_{residente} \left[1 - c + M^{\frac{1}{4}} c \right]^{-4}, \quad c \in [0, 1] \quad (3.12)$$

Em deslocamentos miscíveis a razão de viscosidade entre o fluido residente ($\mu_{residente}$) e o injetado ($\mu_{injetado}$) é conhecido como razão de mobilidade M [25] e é dada por:

$$M = \frac{\mu_{residente}}{\mu_{injetado}} \quad (3.13)$$

3.2 Algoritmos de Solução

Nesta seção apresentamos alguns algoritmos de solução, para o modelo matemático descrito. Utilizamos a notação $\left. \frac{\partial c}{\partial t} \right|_{t=t_i}$ para denotar tanto as discretizações no tempo em diferenças finitas [1, 26, 27, 28] como espaço-tempo de elementos finitos [2].

3.2.1 Método Implícito na Pressão e Explícito na Concentração

Para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ achar \mathbf{u}^n , p^n e c^{n+1} em $\Omega \times [0, T]$ é dado como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^n = f^n \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}^n = -\frac{k(\mathbf{x})}{\mu(c^n)} \nabla p^n \quad (3.15)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial t} \right|_{t=t_{n+1}} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^n \mathbf{c}^n) - \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{u}^n) \nabla c^n) = \widehat{c} f^n \quad (3.16)$$

Dada a forma explícita de aproximação da equação da concentração, este método normalmente é referido como IMPES (Implícito para Pressão e Explícito para Saturação). Por ser explícito na equação integrada no tempo, esse método tem a desvantagem de necessitar intervalos de tempo extremamente pequenos para garantia da estabilidade da solução, comprometendo o desempenho computacional.

3.2.2 Método Totalmente Implícito

Para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ achar \mathbf{u}^{n+1} , p^{n+1} e c^{n+1} em $\Omega \times [0, T]$ dado como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = f^{n+1} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = -\frac{k(\mathbf{x})}{\mu(c^{n+1})} \nabla p^{n+1} \quad (3.18)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial t} \right|_{t=t_{n+1}} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^{n+1} \mathbf{c}^{n+1}) - \nabla \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{u}^{n+1}) \nabla c^{n+1}) = \widehat{c} f^{n+1} \quad (3.19)$$

Nesse algoritmo, a cada intervalo de tempo o sistema constituído pelas equações de pressão, velocidade e concentração é resolvido de forma acoplada.

Ao contrário do método IMPES este método, totalmente implícito, apresenta boas propriedades de estabilidade podendo, em princípio, ser adotado qualquer valor do passo de tempo na discretização temporal permitindo intervalo de tempo adaptativo [28]. Sua desvantagem é a necessidade da resolução de um sistema não-linear a cada intervalo de tempo.

3.2.3 Método Implícito Seqüencial

Para este método desenvolve-se o termo $\nabla \cdot (\mathbf{u}c)$, da equação não-linear de transporte:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}c) = \mathbf{u} \cdot \nabla c + c \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.20)$$

Substituindo-se (3.1) em (3.20) tem-se:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}c) = \mathbf{u} \cdot \nabla c + fc \quad (3.21)$$

o método implícito seqüencial é linearizado como:

Para $n = 0, 1, 2, \dots, N$ achar \mathbf{u}^n , p^n e c^{n+1} em $\Omega \times [0, T]$ dado como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^n = f^n \quad (3.22)$$

$$\mathbf{u}^n = -\frac{k(\mathbf{x})}{\mu(c^n)} \nabla p^n \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial t} \right|_{t=t_{n+1}} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla c^{n+1} - \nabla \cdot D(\mathbf{u}^n) \nabla c^{n+1} + c^{n+1} f^{n+1} = \tilde{c}^{n+1} f^{n+1} \quad (3.24)$$

Este algoritmo, que tem sido utilizado com sucesso em trabalhos anteriores [1, 11], é também adotado no presente trabalho. Assim, a cada intervalo de tempo a pressão e a velocidade são calculadas pelo sub-sistema elíptico, descrito em $t = t_n$, e os resultados para a variável velocidade utilizados no cálculo da concentração na equação de transporte.

Para avaliar o comportamento das formulações a serem utilizadas no presente trabalho para solução do sistema (3.1-3.6), os problemas de velocidade e pressão e da concentração são tratados, de forma isolada, nos Capítulos 4 e 5 respectivamente.

Capítulo 4

Aproximação para Equações de Pressão e Velocidade

Apresentamos neste capítulo formulações de Mínimos Quadrados aplicadas ao sub-sistema elíptico, descrito no capítulo anterior, que calcula a pressão e a velocidade. Como a velocidade, e não a pressão, aparece na equação de concentração que faz parte do modelo matemático que simula o escoamento miscível, atenção especial deve ser dada a obtenção de aproximações precisas para este campo, tentando minimizar os erros na aproximação da concentração a não afetar a sua precisão.

Para melhorar as taxas de convergência para velocidade apresentamos também a formulação de mínimos-quadrados aplicada a esse problema, com a inclusão do termo do rotacional nulo. Exemplos são apresentados para avaliar resultados das formulações apresentadas.

4.1 Definição do problema

Consideremos, por simplicidade, $\Omega \subset R^2$ um domínio limitado, com fronteira Γ regular, tal que:

$$\begin{aligned}\Gamma_u \cup \Gamma_p &= \Gamma \\ \Gamma_u \cap \Gamma_p &= \emptyset\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde \emptyset é o conjunto vazio.

Descrevemos o problema como:

Para um dado valor f , achar os campos \mathbf{u} e p que satisfazem a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = -k(\mathbf{x})\nabla p \quad \text{em } \Omega \quad (4.3)$$

$$p = \delta \quad \text{em } \Gamma_p \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (4.5)$$

sendo:

- $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, o vetor velocidade;
- p , o valor escalar que define a pressão.

4.2 Formulação Mista em Pressão e Velocidade

Para esse problema, como mostrado em [3], mesmo se trabalhando com formulação mista em pressão e velocidade, recai-se num problema de minimização do funcional não exigindo dessa forma, compatibilidade entre os espaços de aproximação.

Assim, a formulação variacional de mínimos quadrados é aplicada da seguinte forma:

$$J(u, p) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u} - f) (\nabla \cdot \mathbf{u} - f) + (\mathbf{u} + k(\mathbf{x})\nabla p) (k^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u} + \nabla p) d\Omega \right] \quad (4.6)$$

sendo \mathbf{u} o vetor velocidade, p a pressão e $k(\mathbf{x})$ uma matriz diagonal.

Associado à minimização de J , temos o seguinte problema variacional:

Problema P_1 : Achar \mathbf{u} e p , tal que:

$$B(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{q}, \eta\}) = F(\mathbf{q}, \eta) \quad (4.7)$$

sendo $B(\cdot, \cdot)$ e $F(\cdot)$, definidos como

$$B(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{q}, \eta\}) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{q}) + (\mathbf{u} + k(\mathbf{x})\nabla p) (k^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{q} + \nabla \eta) d\Omega \quad (4.8)$$

e

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \int_{\Omega} f \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (4.9)$$

A análise de erro dessa formulação com o método dos elementos finitos apresenta a

seguinte taxa de convergência [3, 13]:

$$\|p - p_h\|_{H_1} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H_{div}} \leq ch^k \quad (4.10)$$

sendo k o grau do polinômio de interpolação tanto da variável p quanto da variável \mathbf{u} . Polinômios de diferentes graus também podem ser utilizados para aproximar cada uma das variáveis desse problema, como apresentado em [13].

4.3 Formulação com Rotacional

Para melhorar a aproximação para o campo das velocidades, que é a variável de maior interesse do problema, foi proposto em [3, 13] uma formulação incluindo a equação do rotacional nulo do campo \mathbf{u} .

Dessa forma o sub-sistema elíptico é reescrito da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega \quad (4.11)$$

$$\mathbf{u} = -k(\mathbf{x})\nabla p \quad \text{em } \Omega \quad (4.12)$$

$$k(\mathbf{x})^{-1}\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.13)$$

$$p = \delta \quad \text{em } \Gamma_p \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (4.15)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_p \quad (4.16)$$

O funcional de Mínimos Quadrados para o problema em questão é

$$J(u, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u} - f)(\nabla \cdot \mathbf{u} - f) + (k(\mathbf{x})^{-1}\nabla \times \mathbf{u})(k(\mathbf{x})^{-1}\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} + k(\mathbf{x})\nabla p)(k(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{u} + \nabla p) d\Omega \quad (4.17)$$

com \mathbf{u} , p e f e k definidos na seção anterior.

Fazendo-se a variação de J , temos o seguinte problema variacional:

Problema P_2 : Achar (\mathbf{u}, p) , tal que:

$$\mathbf{B} \{(\mathbf{u}, p); (\mathbf{q}, \eta)\} = \mathbf{F}(\mathbf{q}) \quad (4.18)$$

com $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$ e $\mathbf{F}(\cdot)$, definidos a seguir.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\{(\mathbf{u}, p); (\mathbf{q}, \eta)\} = & \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{q}) + (\mathbf{u} + k(\mathbf{x}) \nabla p) (k(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{q} + \nabla \eta) + \\ & (k(\mathbf{x})^{-1} \nabla \times \mathbf{u}) (k(\mathbf{x})^{-1} \nabla \times \mathbf{q}) d\Omega \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \int f \nabla \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (4.20)$$

Observa-se que esse sistema mantém o número de incógnitas nodais e conseqüentemente a ordem do sistema de equações.

Para essa formulação a taxa de erro [3, 13] do problema discretizado pela método dos elementos finitos encontrada é:

$$\|p - p_h\|_{H_1} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H_1} \leq ch^k \quad (4.21)$$

onde k é o grau do polinômio de aproximação tanto para p quanto para \mathbf{u} , h é o intervalo de discretização espacial e c uma constante.

Nesse caso, pode-se também obter a taxa de erro em L^2 [13] dada por:

$$\|p - p_h\|_{L_2} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L_2} \leq ch^{k+1} \quad (4.22)$$

para interpolações de igual ordem, embora diferentes ordens de aproximações possam ser utilizadas para aproximar p e \mathbf{u} [13].

4.4 Resultados Numéricos

Para testar as formulações propostas apresentamos a seguir resultados para um domínio homogêneo e heterogêneo, tanto para malha regular quanto para malha apresentada na Figura 4.1, utilizando as formulações de mínimos quadrados descritas nos problemas P_1 e P_2 .

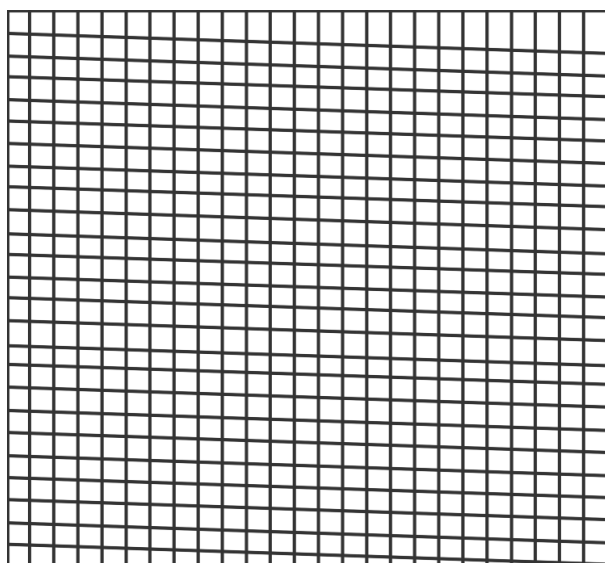


Figura 4.1: Malha inclinada

Para estes exemplos, as matrizes \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 e \mathbf{B} que descrevem o sistema de equações diferenciais, podem ser dadas por:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

para

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Para formulação com o rotacional temos:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & k^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.4.1 Exemplo 1

Como primeiro exemplo apresentamos um domínio quadrado de dimensão 1, e um meio homogêneo com $k = 0,1 \cdot \mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade.

As condições de contorno prescritas são a pressão em $x = 0$, $P(0, y) = 1$, e $x = 1$, $P(1, y) = 0$ e fluxo normal nulo em $y = 0$ e $y = 1$.

Para todos os exemplos desse capítulo o domínio foi discretizado em 25×25 elementos isoparamétricos bilineares com integração de Gauss com 2×2 pontos.

Resultados para formulação sem rotacional e com rotacional são apresentados nas Figuras 4.2 e 4.3, para discretização com malha regular. Nas Figuras 4.4 e 4.5 apresentamos também resultados sem rotacional e com rotacional com uma malha inclinada em relação aos eixos cartesianos (Figura 4.1), como sugerido em [1].

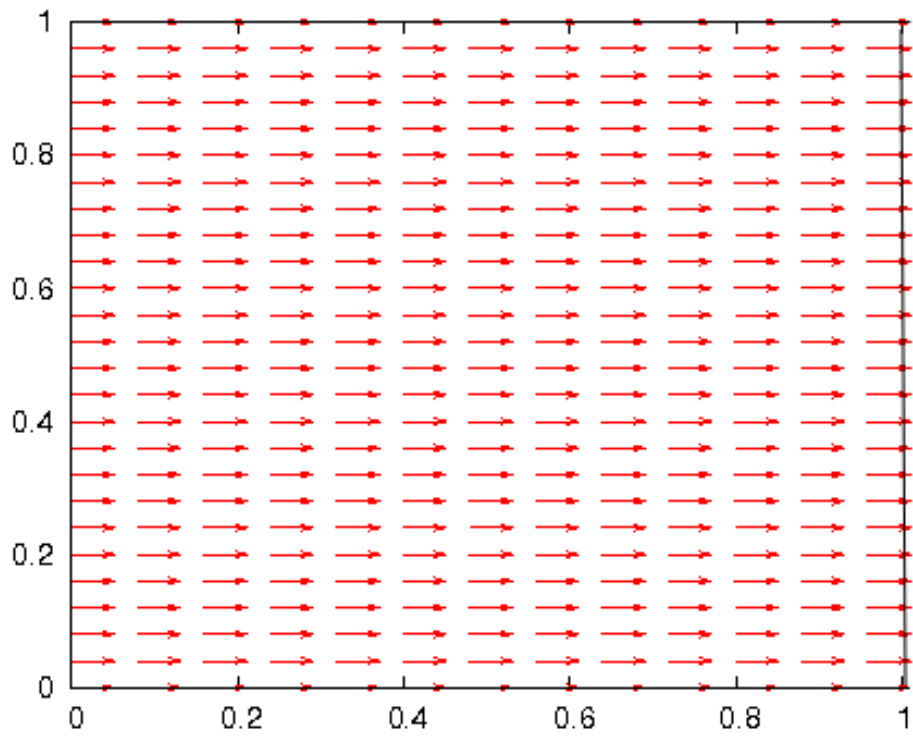


Figura 4.2: Permeabilidade homogênea

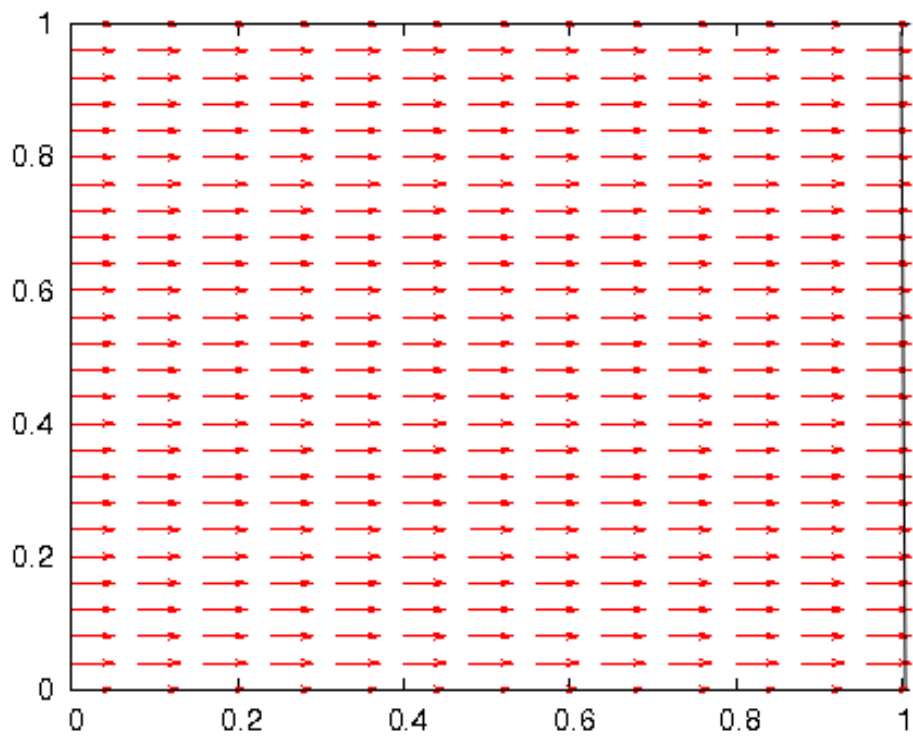


Figura 4.3: Permeabilidade homogênea e formulação com rotacional

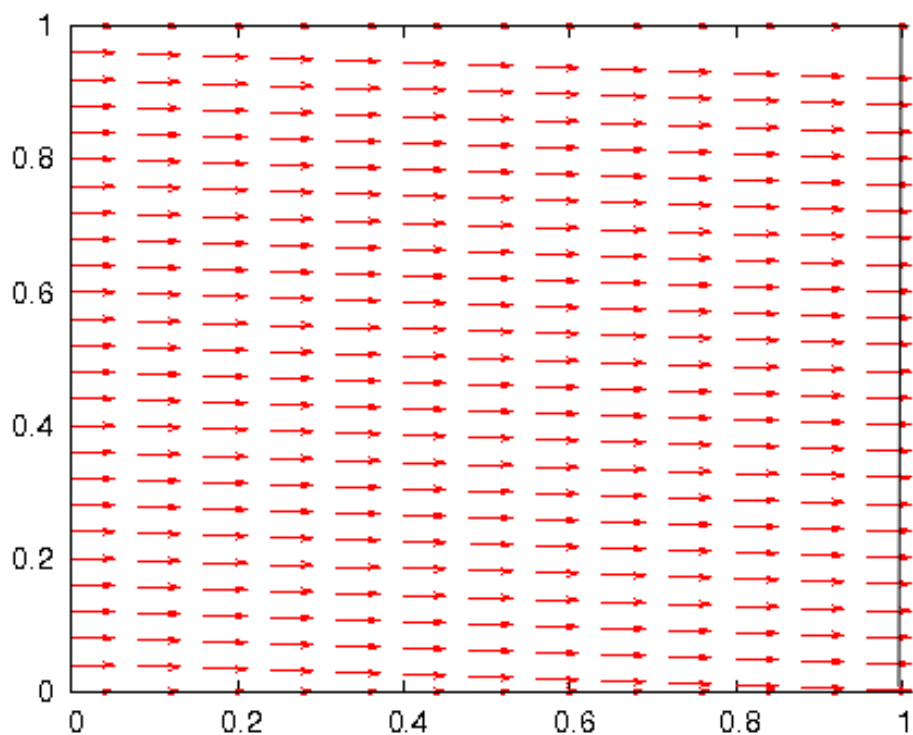


Figura 4.4: Permeabilidade homogênea e malha inclinada

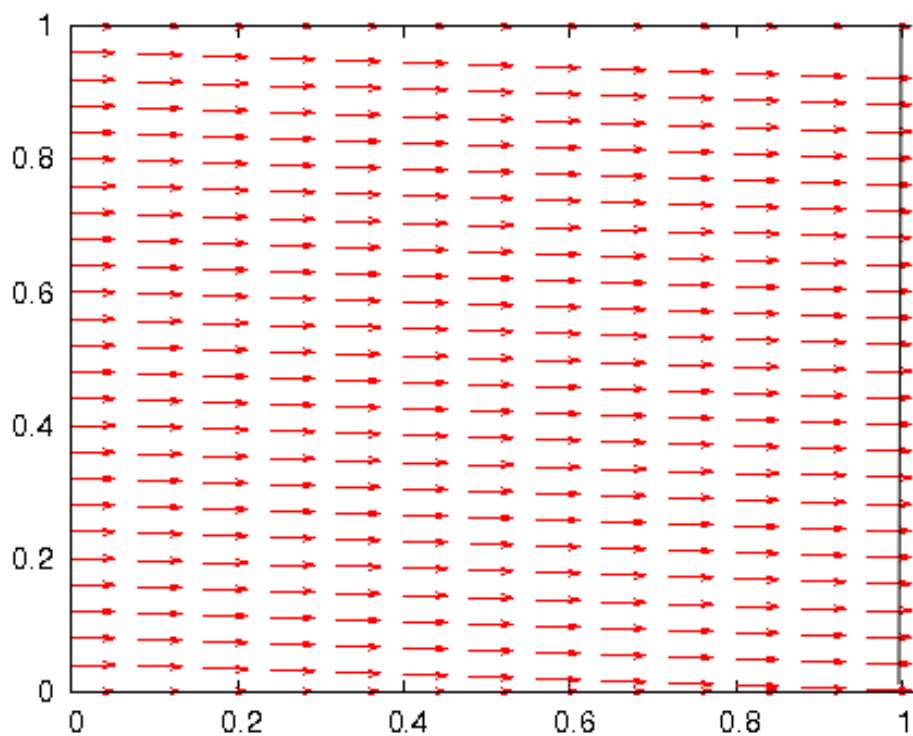


Figura 4.5: Permeabilidade homogênea, malha inclinada e formulação com rotacional

4.4.2 Exemplo 2

A seguir, o problema é aplicado a um meio heterogêneo (diferentes permeabilidades) como apresentado na Figura 4.6.

A Figura 4.7 apresenta resultados da formulação sem rotacional, onde podemos observar pequenas oscilações na velocidade próximo à região de baixa permeabilidade. A Figura 4.8 apresenta resultados da formulação com rotacional onde observa-se a não existência de oscilações e um perfil parabólico para velocidade.

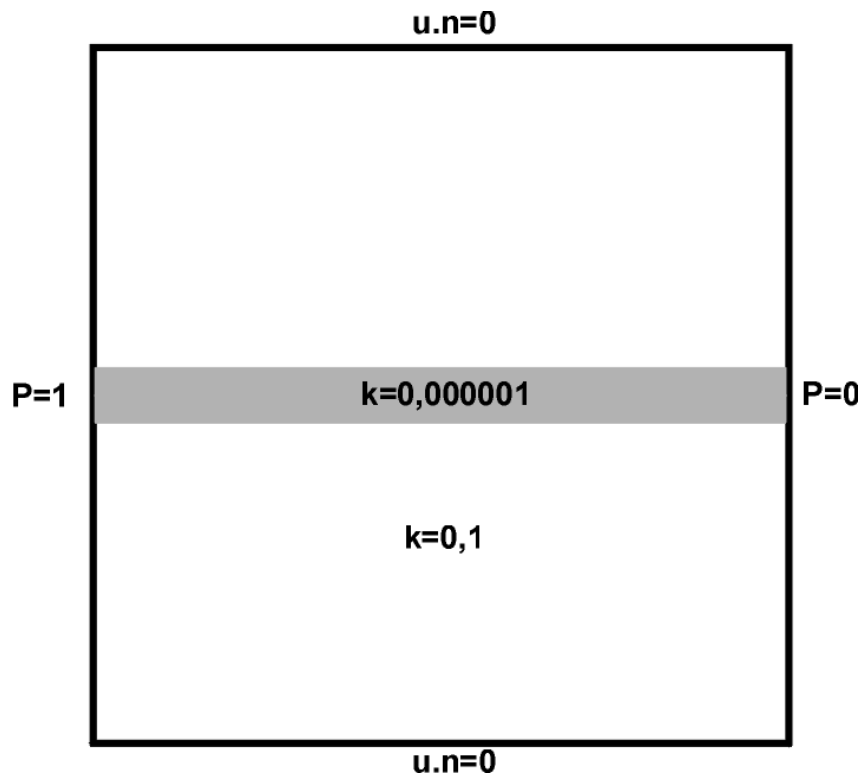


Figura 4.6: Domínio com permeabilidade heterogênea

Também para esse exemplo utilizamos uma malha regular e a malha apresentada na Figura 4.1, os resultados para a formulação de mínimos quadrados e formulação de mínimos quadrados com rotacional, são apresentados nas Figuras 4.7, 4.9 e nas Figuras 4.8, 4.10 respectivamente.

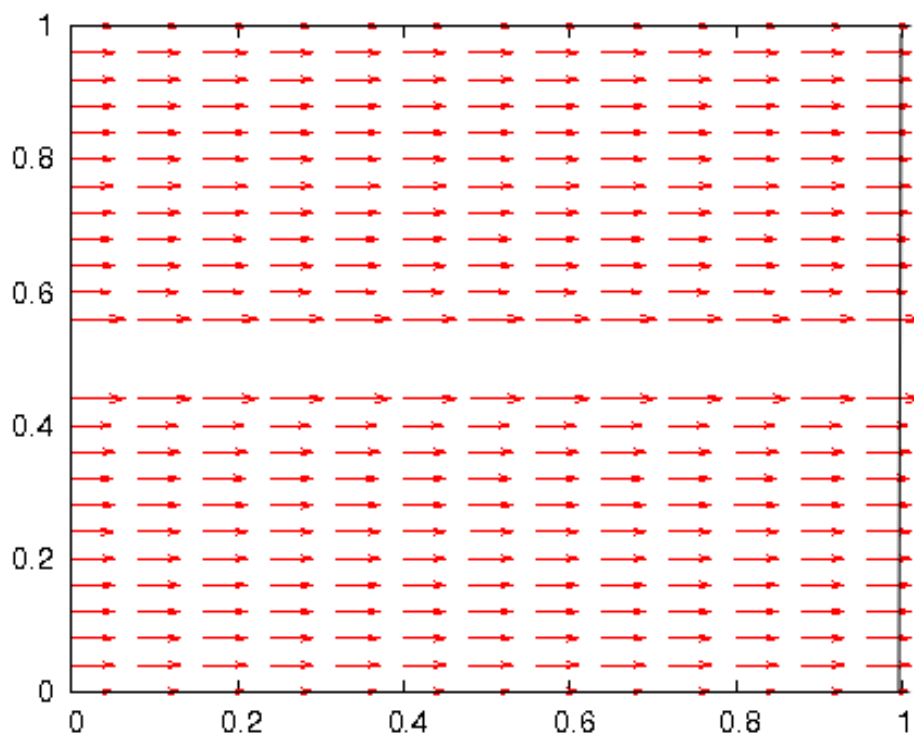


Figura 4.7: Permeabilidade heterogênea

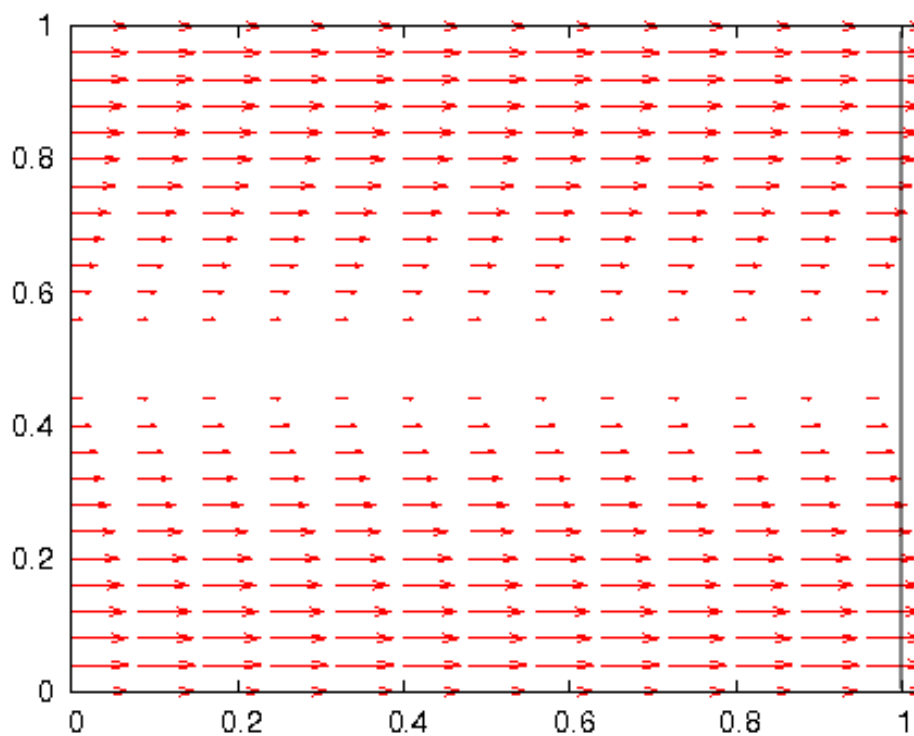


Figura 4.8: Permeabilidade heterogênea e formulação com rotacional

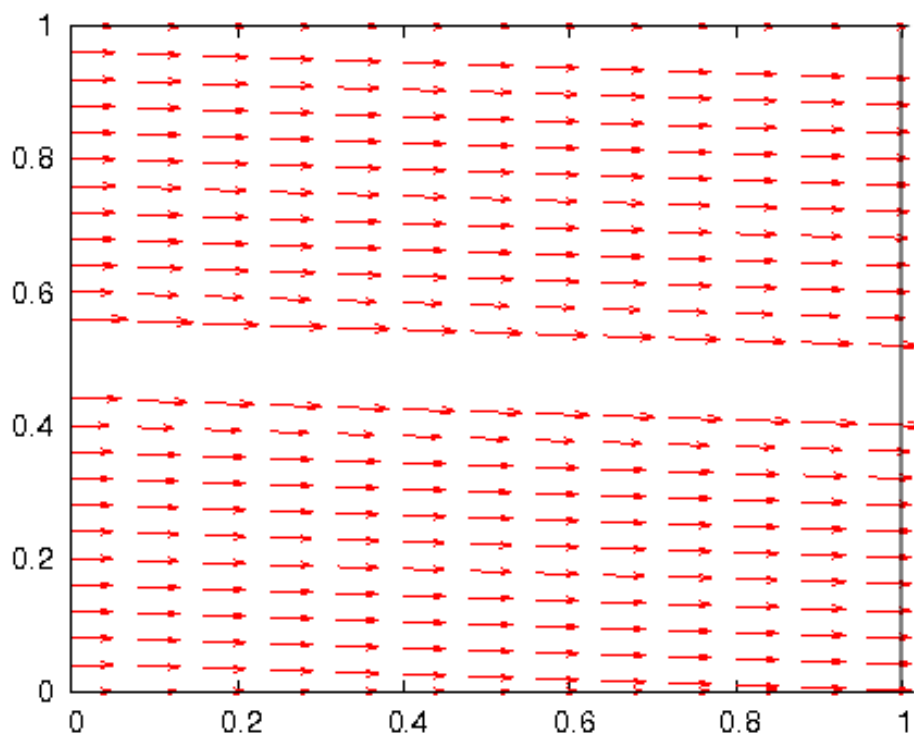


Figura 4.9: Permeabilidade heterogênea e malha inclinada

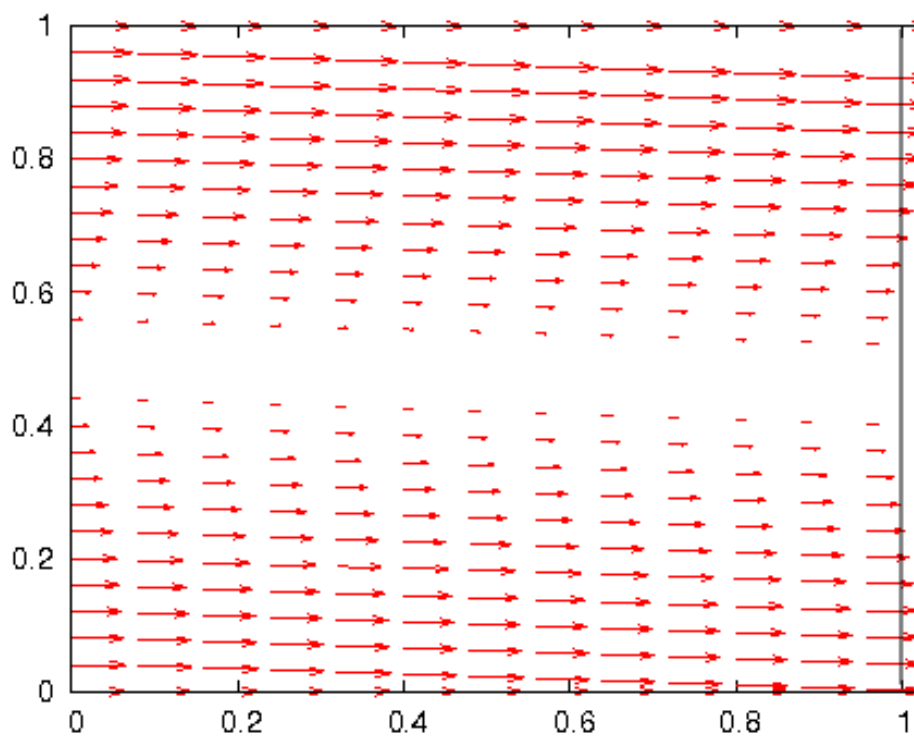
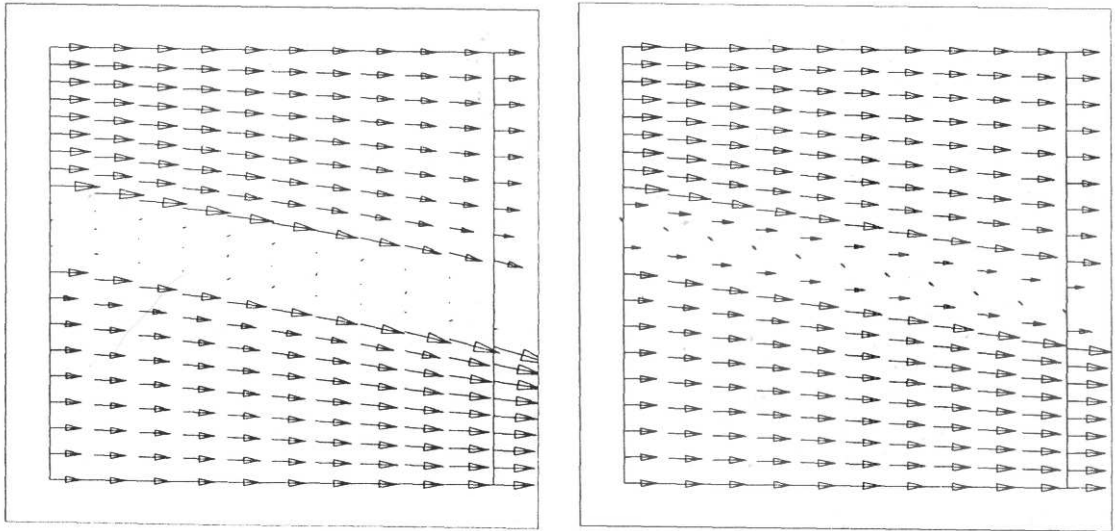
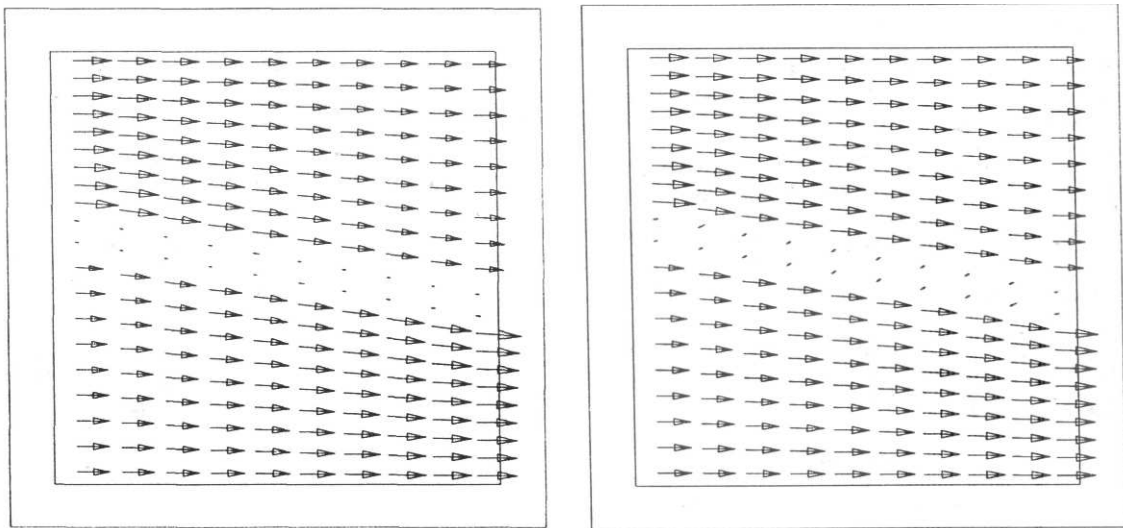


Figura 4.10: Permeabilidade heterogênea, malha inclinada e formulação com rotacional

Na Figura 4.9 podemos observar uma pequena oscilação nas velocidades próximo à região de baixa permeabilidade. Com a inclusão da equação $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ à formulação, apresentada na Figura 4.10, não há mais oscilação e aparece um perfil parabólico não captado em outras formulações. Para comparação apresentamos na Figura 4.11 resultados de formulações estabilizadas de Galerkin apresentadas em [1].



(a) Velocidades obtidas pelo pós-processamento global (contribuição do lado esquerdo) (b) Velocidades obtidas pelo pós-processamento global (contribuição do lado direito)



(c) Velocidades obtidas pelo pós-processamento local com tensor de permeabilidade diagonal (d) Velocidades obtidas pelo pós-processamento local com tensor de permeabilidade completo

Figura 4.11: Técnicas de Pós-Processamento para a Velocidade [1]

4.4.3 Exemplo 3

Neste exemplo o escoamento ocorre em função da diferença de pressão de uma região confinada nas laterais que possui duas barreiras perpendiculares à direção de escoamento, formando um canal por onde o fluido deve passar. As barreiras são representadas por região com baixa permeabilidade nas quais o fluido não deve penetrar (Figura 4.12).

As Figuras 4.13 e 4.14 apresentam resultados da velocidade para a formulação sem rotacional e com rotacional respectivamente e a Figura 4.15 apresenta resultados da pressão encontrada na formulação com rotacional. Pode-se observar nas Figuras 4.13 e 4.14 a continuidade das direções preferenciais dos vetores de velocidade.

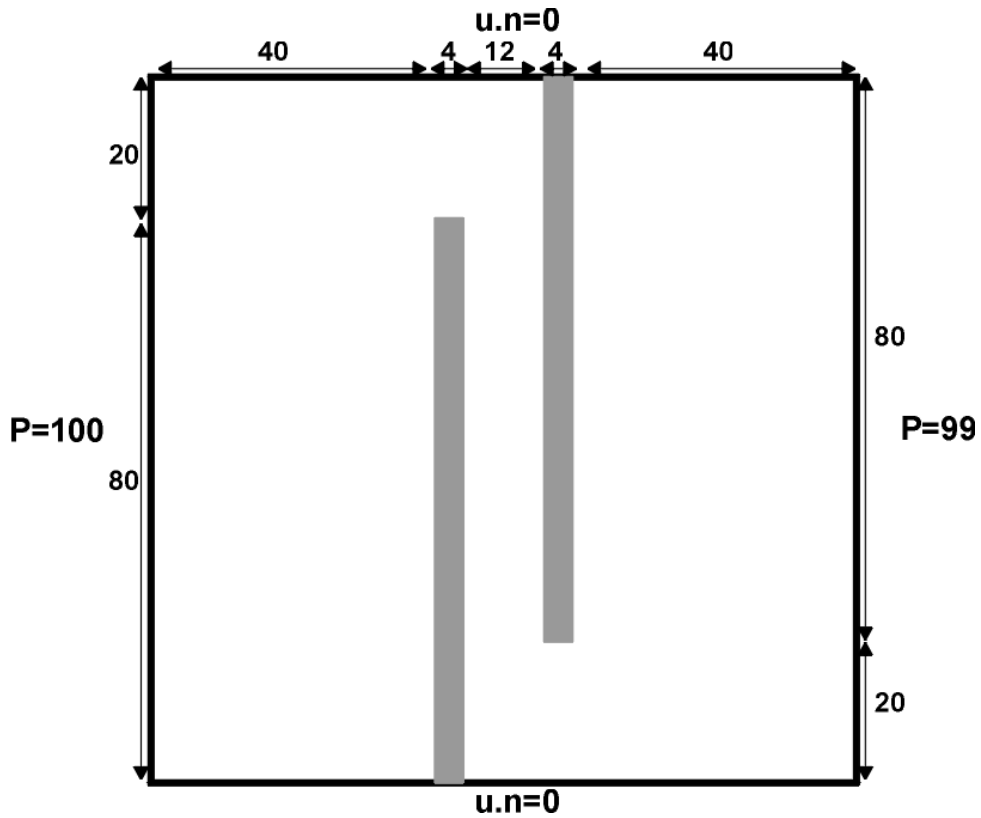


Figura 4.12: Domínio e condições de contorno [1]

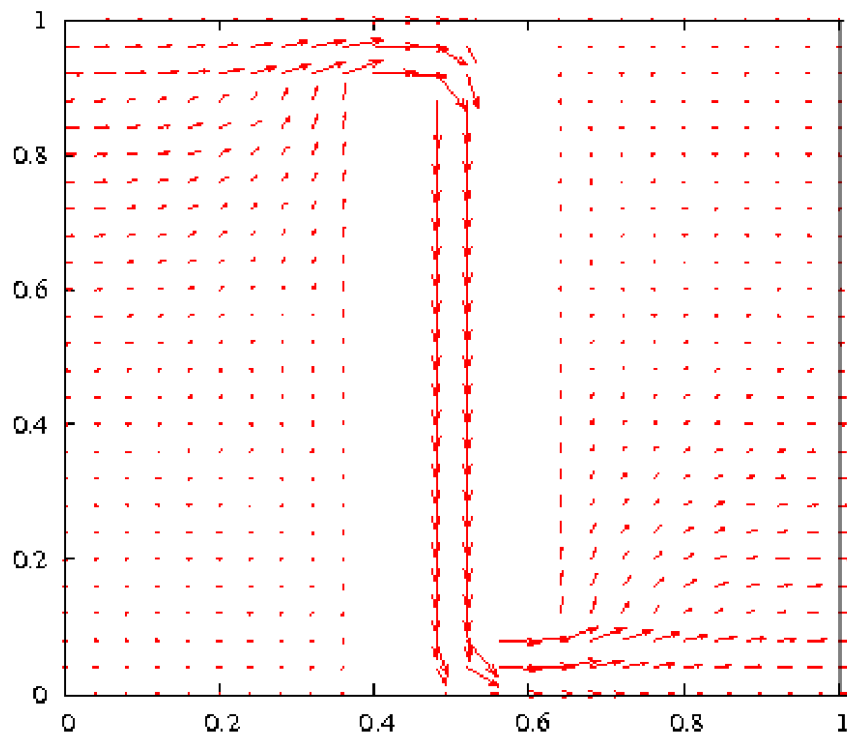


Figura 4.13: Formulação sem rotacional

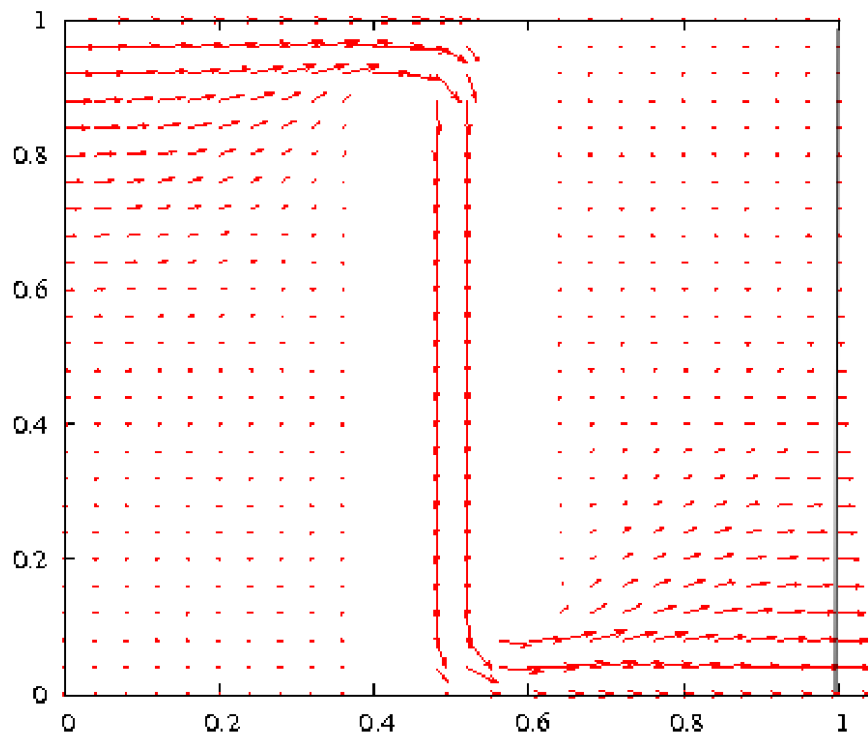


Figura 4.14: Formulação com rotacional

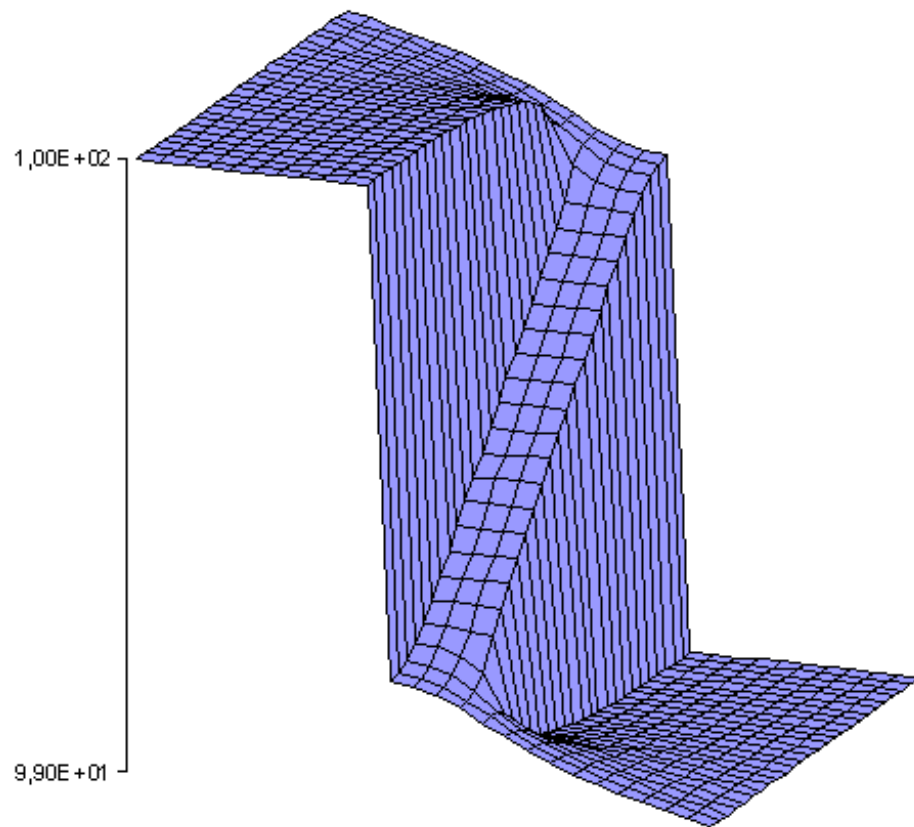


Figura 4.15: Representação da pressão na formulação com rotacional

Capítulo 5

Equação de Transporte

5.1 Introdução

Processos de convecção-difusão, governados por equações hiperbólicas, aparecem em diversos problemas de interesse como transporte de poluentes, escoamentos miscíveis, entre outros. Várias formulações têm sido propostas com o objetivo de minimizar oscilações espúricas ou amortecimento excessivo das soluções numéricas.

Recentemente formulações espaço-tempo de mínimos quadrados foram propostas apresentando resultados estáveis e soluções ótimas para o problema unidimensional puramente convectivo com número de Courant igual a 1 [19].

Formulações de mínimos quadrados com a equação de transporte descrita como um sistema de equações diferenciais equivalente e de 1ª ordem, começam a ser analisadas tanto com a formulação de mínimos quadrados semi-discreta [18], quanto espaço-tempo descontínua no tempo [19].

Neste capítulo apresentamos a formulação de mínimos quadrados aplicada à equação de transporte puramente convectiva, e para equação convecção-difusão descrita como um sistema de equações equivalente de primeira ordem, utilizando formulações espaço-tempo [2, 17, 19, 20] e formulações semi-discretas [4, 18].

A equação puramente convectiva foi analisada tanto descrita em sua forma usual, como uma equação escalar, quanto como um sistema de equações diferenciais equivalente com a utilização de uma variável auxiliar [18].

A equação convecção-difusão, por conter termos de 2ª ordem, é sempre analisada como um sistema de equações diferenciais equivalente de 1ª ordem.

5.2 Definição do problema

Sejam $\Omega \subset R^2$ um domínio limitado bidimensional, com fronteira Γ regular, tal que:

$$\begin{aligned}\Gamma_d \cup \Gamma_n &= \Gamma \\ \Gamma_d \cap \Gamma_n &= \emptyset\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde \emptyset é o conjunto vazio.

A equação de convecção-difusão é dada por:

$$\lambda \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(c) - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) = f \quad \text{em } \Omega \times (0, T)\tag{5.2}$$

sendo λ a porosidade do meio poroso e com condições de contorno e inicial:

$$c = g \quad \text{em } \Gamma_d \times (0, T)\tag{5.3}$$

$$\mathbf{D} \nabla c \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{em } \Gamma_n \times (0, T)\tag{5.4}$$

$$c = c_0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{para } t = 0,\tag{5.5}$$

onde c é a quantidade desconhecida que é transportada pelo termo convectivo constante $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, f é o termo fonte, \mathbf{D} é o coeficiente de difusão e g é o valor de contorno prescrito de c em Γ_d .

Para utilizar a formulação de mínimos quadrados a equação (5.2) pode ser reescrita de diferentes formas como um sistema de equações de primeira ordem, tais como:

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\partial c}{\partial t} - \mathbf{u} \cdot \nabla c + \nabla \cdot \mathbf{q} &= f \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{q} &= \mathbf{D} \nabla c \quad \text{em } \Omega \times (0, T)\end{aligned}\tag{5.6}$$

ou

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c - \nabla \cdot \mathbf{D} \mathbf{q} &= f \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{q} &= \nabla c \quad \text{em } \Omega \times (0, T)\end{aligned}\tag{5.7}$$

ou como

$$\begin{aligned}\lambda \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \mathbf{D} \mathbf{q} &= f \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{q} &= \nabla c \quad \text{em } \Omega \times (0, T)\end{aligned}\tag{5.8}$$

Na Seção 5.3 apresentamos formulações semi-discretas de mínimos quadrados e na Seção 5.4 formulações espaço-tempo que aplicamos à equação de convecção-difusão.

5.3 Formulação Semi-Discreta de Mínimos Quadrados

A seguir apresentamos a formulação semi-discreta de mínimos quadrados aplicada à equação de transporte, tanto para a equação escalar como sugerido em [4] para o problema puramente convectivo, quanto para formulações mistas utilizadas em [18].

5.3.1 Formulação Escalar

A formulação escalar de mínimos quadrados é aplicada particularmente para equações puramente convectivas que já são de primeira ordem. Para esse problema, utilizando a discretização de diferenças finitas para aproximar a derivada no tempo, temos:

$$\frac{c^{n+1} - c^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c^{n+1} = f^{n+1} \quad (5.9)$$

onde c^n representa $c(\mathbf{x}, t_n)$, Δt uma variação fixa de tempo dada por $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ e $f^{n+1} = f(\mathbf{x}, t_{n+1})$.

O funcional de mínimos quadrado associado à equação (5.9), é dado por:

$$J(c_h) = \frac{1}{2} \left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot c^{n+1} - f^{n+1}, \frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot c^{n+1} - f^{n+1} \right) \quad (5.10)$$

O problema de achar a solução baseado na minimização do funcional (5.10) em relação a c_h^{n+1} pode ser definido como:

Problema P₃: Achar c_h^{n+1} , tal que:

$$\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot c^{n+1} - f^{n+1}, \frac{v_h^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot v^{n+1} \right) = 0 \quad (5.11)$$

A discretização para c_h, v_h , é dada da forma usual, definida como:

$$\begin{aligned} c_h^{n+1} &= \sum_{j=1}^N \phi_j c_j^{n+1} \\ v_h^{n+1} &= \sum_{j=1}^N \phi_j v_j^{n+1} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde N é o número de nós do elemento e ϕ_j são as funções de interpolações usuais de elementos finitos descritas no Capítulo 2.

5.3.2 Formulações para Sistema de Equações

No caso da equação convecção-difusão onde escrevemos o problema em um sistema de equações diferenciais equivalente, apresentamos três diferentes formulações de mínimos quadrados, como sugerido em [18], aplicadas ao sistema de primeira ordem descrito como em (5.8).

- Formulação Implícita
- Formulação Ponderada de Mínimos Quadrados
- Formulação θ -Mínimos Quadrados

Formulações equivalentes podem ser obtidas para a equação puramente convectiva descrita como o sistema (5.8), desprezando-se nas formulações a serem apresentadas nessa seção, para equação de convecção-difusão, o termo relativo à difusão.

5.3.2.1 Formulação Implícita

Chamamos de formulação totalmente implícita quando todo o sistema está escrito no tempo t_{n+1} . Nesse caso, o funcional de mínimos quadrados associado ao sistema de equações (5.8) é dado por:

$$J(c_h, \mathbf{q}_h) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h - f^{n+1} \right), \right. \\ \left. \frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h - f^{n+1} \right) + (\mathbf{q}_h^{n+1} + \nabla c_h^{n+1}, \mathbf{q}_h^{n+1} + \nabla c_h^{n+1}) \right] \quad (5.13)$$

O problema de achar a solução do sistema (5.8) descrito, baseado na minimização do funcional (5.13) em relação a c_h^{n+1} e a \mathbf{q}_h^{n+1} pode ser definido como:

Problema P₄: Achar c_h^{n+1} e \mathbf{q}_h^{n+1} , tal que:

$$\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h, \frac{v_h^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}_h \right) + \\ (\mathbf{q}_h^{n+1} + \nabla c_h^{n+1}, \mathbf{p}_h^{n+1} + \nabla v_h^{n+1}) = \left(f^{n+1}, \frac{v_h^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^{n+1} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}_h \right) \quad (5.14)$$

A discretização para c_h , \mathbf{q}_h , v_h , \mathbf{p}_h é dada da forma usual, definida como:

$$\begin{aligned} c_h^{n+1} &= \sum_{j=1}^N \phi_j c_j^{n+1} \\ \mathbf{q}_h^{n+1} &= \sum_{j=1}^N \phi_j \mathbf{q}_j^{n+1} \\ v_h^{n+1} &= \sum_{j=1}^N \phi_j v_j^{n+1} \\ \mathbf{p}_h^{n+1} &= \sum_{j=1}^N \phi_j \mathbf{p}_j^{n+1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde N é o número de nós do elemento e ϕ_j são as funções de interpolações usuais de elementos finitos descritas no Capítulo 2.

5.3.2.2 Formulação Ponderada de Mínimos Quadrados

A formulação que chamamos de ponderada, baseada em formulações propostas por Jiang [4, 18] para outras equações, consiste em ponderar a equação transiente do sistema (5.8) por um fator θ , para se obter uma aproximação desta equação no tempo $t_{n+\theta}$, e considerar as equações estacionárias do sistema no tempo t_{n+1} .

A discretização no tempo $t_{n+\theta}$ da equação de concentração, feita pelo método de diferenças finitas, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h^{n+\theta} = f^{n+\theta} \Omega \quad (5.16)$$

para $0 \leq \theta \leq 1$.

O funcional discreto da formulação ponderada de mínimos quadrados neste caso é então dado por:

$$\begin{aligned} J(c_h, \mathbf{q}_h) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h^{n+\theta} - f^{n+\theta}, \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h^{n+\theta} - f^{n+\theta} \right) + (\mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla c_h^{n+1}, \mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla c_h^{n+1}) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

A formulação, da forma como está proposta, utiliza uma ponderação para aproximar $\mathbf{q}_h^{n+\theta}$ no funcional (5.17) para equação transiente. Para efetuar esta ponderação redefinimos $\mathbf{q}_h^{n+\theta}$ e $f^{n+\theta}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_h^{n+\theta} &= \theta \mathbf{q}_h^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{q}_h^n \\ f^{n+\theta} &= \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n \end{aligned} \quad (5.18)$$

Substituindo essas aproximações em (5.17) temos:

$$\begin{aligned}
J(c_h, \mathbf{q}_h) = \frac{1}{2} & \left[\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot (\theta \mathbf{q}_h^{n+1} + (1 - \theta) \theta \mathbf{q}_h^n) + \nabla \cdot \mathbf{D} (\theta \mathbf{q}_h^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{q}_h^n) - \right. \right. \\
& \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n, \frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot (\theta \mathbf{q}_h^{n+1} + (1 - \theta) \theta \mathbf{q}_h^n) - \nabla \cdot \mathbf{D} (\theta \mathbf{q}_h^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{q}_h^n) - \\
& \left. \left. \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n + (\mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla v_h^{n+1}, \mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla v_h^{n+1}) \right] \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Achar a solução do sistema (5.8) baseado na minimização do funcional (5.19) em relação a c^{n+1} e a \mathbf{q}^{n+1} é então:

Problema P₅: Encontrar $(c^{n+1}, \mathbf{q}^{n+1})$, tal que:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot (\theta \mathbf{q}_h^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{q}_h^n) + \nabla \cdot \mathbf{D} (\theta \mathbf{q}_h^{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{q}_h^n), \right. \\
& \left. \frac{v_h^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \theta \mathbf{p}_h^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{D} \theta \mathbf{p}_h^{n+1} \right) + (\mathbf{q}_h^{n+1} - \nabla c_h^{n+1}, \mathbf{p}_h^{n+1} - \nabla v_h^{n+1}) = \\
& \left(\theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n, \frac{v_h^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \theta \mathbf{p}_h^{n+1} + \nabla \cdot \mathbf{D} \theta \mathbf{p}_h^{n+1} \right) \quad (5.20)
\end{aligned}$$

5.3.2.3 Formulação θ -Mínimos Quadrados

Assim como na formulação anterior, na formulação θ -mínimos quadrados proposta em [18], todo o sistema está descrito no tempo $t^{n+\theta}$ e a aproximação ponderada por um fator θ está na variável escalar $c^{n+\theta}$.

Fazendo a discretização no tempo, pelo método de diferenças finitas, obtemos o seguinte funcional discreto para a formulação θ -mínimos quadrados:

$$\begin{aligned}
J(c_h, \mathbf{q}_h) = \frac{1}{2} & \left[\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} + \nabla \cdot \mathbf{D} \mathbf{q}_h^{n+\theta} - f^{n+\theta}, \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} + \nabla \cdot \mathbf{D} \mathbf{q}_h^{n+\theta} - f^{n+\theta} \right) + (\mathbf{q}_h^{n+\theta} - \nabla c_h^{n+\theta}, \mathbf{q}_h^{n+\theta} - \nabla c_h^{n+\theta}) \right] \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Nesta formulação aproximamos $c_h^{n+\theta}$ como:

$$c_h^{n+\theta} = \theta c_h^{n+1} + (1 - \theta) c_h^n. \quad (5.22)$$

Substituindo (5.22) em (5.21) temos:

$$J(c_h, \mathbf{q}_h) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} + \nabla \cdot \mathbf{D} \mathbf{q}_h^{n+\theta} - f^{n+\theta}, \right. \right.$$

$$\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} + \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h^{n+\theta} - f^{n+\theta} \right) + (\mathbf{q}_h^{n+\theta} - \nabla(\theta c_h^{n+1} + (1-\theta)c_h^n), \mathbf{q}_h^{n+\theta} - \nabla(\theta c_h^{n+1} + (1-\theta)c_h^n)) \quad (5.23)$$

Resolver o sistema (5.8) baseado na minimização deste funcional em relação a c_h^{n+1} e a $\mathbf{q}_h^{n+\theta}$ se reduz a:

Problema P_6 : Achar $(c_h^{n+1}$ e $\mathbf{q}_h^{n+\theta})$, tal que:

$$\left(\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_h^{n+\theta} + \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}_h^{n+\theta}, \frac{v_h^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_h^{n+\theta} + \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}_h^{n+\theta} \right) + (\mathbf{q}_h^{n+\theta} + \nabla(\theta c_h^{n+1} + (1-\theta)c_h^n), \mathbf{p}_h^{n+\theta} + \nabla\theta v_h^{n+1}) = \left(f^{n+\theta}, \frac{v_h^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}_h^{n+\theta} + \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}_h^{n+\theta} \right) \quad (5.24)$$

5.4 Formulações Espaço-Tempo de Elementos Finitos

Consideremos a partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ do intervalo $I = (0, T)$ e denotemos por $I_n = (t_n, t_{n+1})$ o n -ésimo intervalo. Para cada n , o domínio de integração espaço-tempo é a "fatia" definida como:

$$Q_n = \Omega \times I_n \quad (5.25)$$

com fronteira

$$P_n = \Gamma \times I_n \quad (5.26)$$

onde Ω é o domínio espacial d -dimensional com fronteiras Γ .

Para a n -ésima "fatia" espaço-tempo, o domínio espacial Ω é subdividido em $(N_e)_n$ elementos Ω_n , $e = 1, 2, \dots, (N_e)_n$. Então

$$Q_n = \bigcup_{e=1}^{(N_e)_n} \overline{Q}_n^e \quad Q_n^e = \Omega_n^e \times I_n \quad (5.27)$$

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{(N_e)_n} \overline{\Omega}_n^e \quad \Omega_n^i \cap \Omega_n^j = \emptyset \quad i \neq j \quad (5.28)$$

onde Q_n define o domínio do elemento espaço-tempo, na n -ésima "fatia".

Dentro de cada elemento espaço-tempo, a solução tentativa e as funções de ponderação são aproximadas por polinômios de interpolação de ordem k , P_k . Estas funções são assumidas contínuas em C^0 dentro de cada "fatia" espaço-tempo, porém descontínuas através das interfaces das "fatias". Os espaços dos elementos finitos são definidos como:

$$U_h^k = \{c_h \in C^0(Q_n), c_h|_{Q_n^e} \in P_k(Q_n^e), c_h = g \text{ em } P_{\text{ng}}\} \subset H^1(Q_n) \quad (5.29)$$

onde

$$P_{ng} = \Gamma_g \times I_n \quad (5.30)$$

Considerando que as funções de interpolação dos elementos finitos são descontínuas nas interfaces das "fatias" espaço-tempo, definimos:

$$c(x, t^\pm) = c(t^\pm) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} c(t_n + \epsilon) \quad (5.31)$$

e o salto da variável c em cada fatia do tempo é determinada por:

$$|[c(t_n)]| = c(t_n^+) - c(t_n^-) \quad (5.32)$$

As funções de interpolação de elementos finitos para a função teste e a função peso, c^h e v^h respectivamente, admitindo-se aproximações constantes no tempo, são definidas como:

$$c^h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_{np}} N_j(x) c_{j,n+1}^h \quad \text{para } x \in \Omega, t \in I_n \quad (5.33)$$

$$v^h(x, t) = \sum_{j=1}^{N_{np}} N_j(x) v_{j,n+1}^h \quad \text{para } x \in \Omega, t \in I_n \quad (5.34)$$

onde N_{np} é o número de pontos nodais, $N_j(x)$ é a função de interpolação para o nó j , $c_{j,n+1}^h$ é o valor nodal de c^h para o nó espacial j e para o tempo t_{n+1} e $v_{j,n+1}^h$ é a função peso correspondente para cada valor nodal.

5.4.1 Formulação Mínimos Quadrados Espaço-Tempo

Nesta seção apresentamos resultados preliminares da formulação mista de mínimos quadrados espaço-tempo descontínuo aplicada ao sistema (5.8), onde as equações estacionárias que aproximam o fluxo, são multiplicadas por um fator τ [29].

Escrevemos a forma bilinear $B(., .)$ e o funcional linear $L(.)$ em algum tempo $t = t_{n+\theta}$ com $\theta \in [0, 1]$, e:

$$c^h = \theta c^h(t_{n+1}^-) + (1 - \theta) c^h(t_n^-) \quad (5.35)$$

$$\mathbf{q}^h = \theta \mathbf{q}^h(t_{n+1}^-) + (1 - \theta) \mathbf{q}^h(t_n^-) \quad (5.36)$$

Considerando uma discretização constante no tempo, a formulação de mínimos quadrados espaço-tempo é aplicada ao sistema (5.8), obtendo:

Problema P_7 : Para $n = 1, 2, \dots, N$, encontrar c^h e \mathbf{q}^h tais que:

$$B_\theta(\{c^h, \mathbf{q}^h\}; \{w^h, \mathbf{p}^h\}) = L_\theta \quad (5.37)$$

onde,

$$\begin{aligned}
B_\theta(\{c^h, \mathbf{q}^h\}; \{w^h, \mathbf{p}^h\}) &= \theta \Delta t (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}^h(t_{n+1}^-) - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}^h(t_{n+1}^-), \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^h(t_{n+1}^-) - \\
&\nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}^h(t_{n+1}^-))_\Omega + (c^h(t_{n+1}^-), \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^h(t_{n+1}^-) - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}^h(t_{n+1}^-))_\Omega + \theta \tau^2 (\mathbf{q}^h(t_{n+1}^-) - \\
&\nabla c^h(t_{n+1}^-), \mathbf{p}^h(t_{n+1}^-) - \nabla w^h(t_{n+1}^-))_\Omega
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
L_\theta(w^h, \mathbf{p}^h) &= \Delta t (\theta - 1) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}^h(t_n^-) - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{q}^h(t_n^-), \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^h(t_{n+1}^-) - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}^h(t_{n+1}^-))_\Omega + \\
&(c^h(t_n^-), \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^h(t_{n+1}^-) - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}^h(t_{n+1}^-))_\Omega + \tau^2 (\mathbf{q}^h(t_{n+1}^-) - \nabla c^h(t_n^-), \mathbf{p}^h(t_{n+1}^-) - \\
&\nabla w^h(t_{n+1}^-))_\Omega + \Delta t (f(t_{n+\theta}^-), \mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^h(t_{n+1}^-) - \nabla \cdot \mathbf{D}\mathbf{p}^h(t_{n+1}^-))_\Omega
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Observa-se que o termo do salto introduz uma não simetria a essa formulação. Essa formulação apresentou resultados exatos para problemas unidimensionais para número de Courant (CFL) igual 1 e oscilações espúricas para CFL diferentes de 1 (Exemplo 1).

5.5 Resultados Numéricos

Para testar as formulações de mínimos quadrados semi-discreta e espaço-tempo de elementos finitos apresentamos inicialmente, nessa seção, resultados para o problema unidimensional de convecção pura. Para a formulação semi-discreta apresentamos resultados para diferentes números de Courant e vários valores de θ e para a formulação espaço-tempo de mínimos quadrados analisamos a influencia do fator τ para diferentes números de Courant e valores de θ .

A seguir o problema da velocidade inclinada com relação à malha é apresentado tanto para o problema puramente convectivo quanto para o problema com uma pequena pequena difusão. O comportamento das formulações em um domínio heterogêneo e também com velocidades variáveis são apresentados nos Exemplos 3 e 4 respectivamente.

5.5.1 Exemplo 1 - Convecção Pura Paralela à Malha

Para avaliar a formulação espaço-tempo de elementos finitos apresentamos inicialmente um problema onde o domínio espacial bidimensional é o quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, discretizado em 10×10 elementos isoparamétricos bilineares. O campo de velocidade é constante

($\|\mathbf{u}\| = 1$), com componente $u_1 = 1$ e $u_2 = 0$ e o termo fonte $f = 0$, com difusão nula, como mostrado na Figura 5.1.

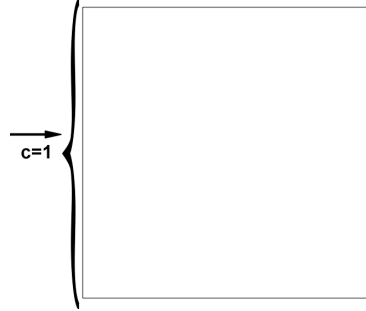


Figura 5.1: Domínio com velocidade unidirecional

As matrizes A_0 , A_1 , A_2 e B que descrevem o sistema de equações, para este exemplo, são dadas por:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

para

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Para mostrar a influência do CFL ($CFL = \frac{\Delta t |\mathbf{u}|}{h}$) e o desempenho da formulação de mínimos quadrados espaço-tempo, apresentamos resultados obtidos com as formulações espaço-tempo e semi-discretas para diferentes valores de CFL , τ e θ .

As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam resultados para as formulações semi-discretas ponde-

rada e θ -mínimos quadrados para CFL igual a 0,5, 1,0 e 2,0, no tempo 0,6, para θ igual a 0,1, 0,5, 0,55, 0,67 e 1,0.

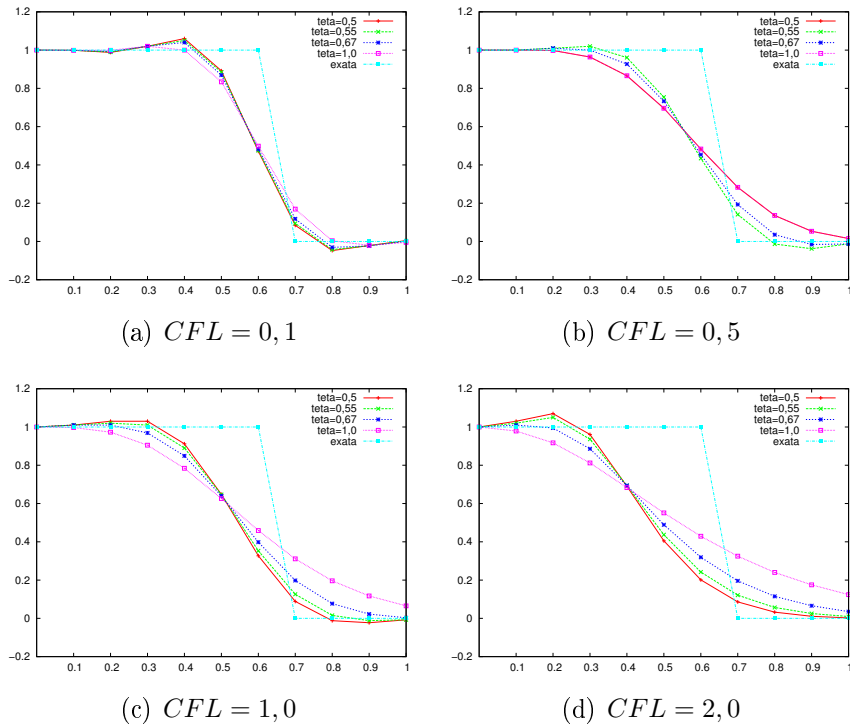


Figura 5.2: Formulação Semi-Discreta Ponderada

Para a formulação espaço-tempo mínimos quadrados apresentamos resultados para CFL igual a 0,5, 1,0 e 2,0, no tempo 0,6, para θ igual a 0,5, 0,55, 0,67 e 1,0, para τ igual a 10^{-10} , 10^{-4} , 10^{-1} , 1,0, 1,2 e 1,5.

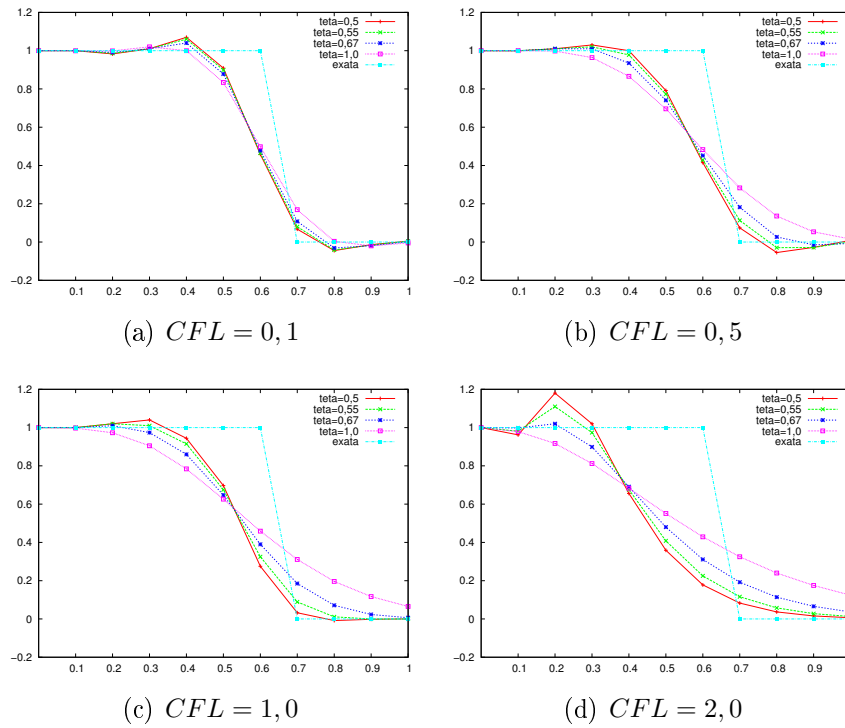


Figura 5.3: Formulação Semi-Discreta θ -Mínimos Quadrados

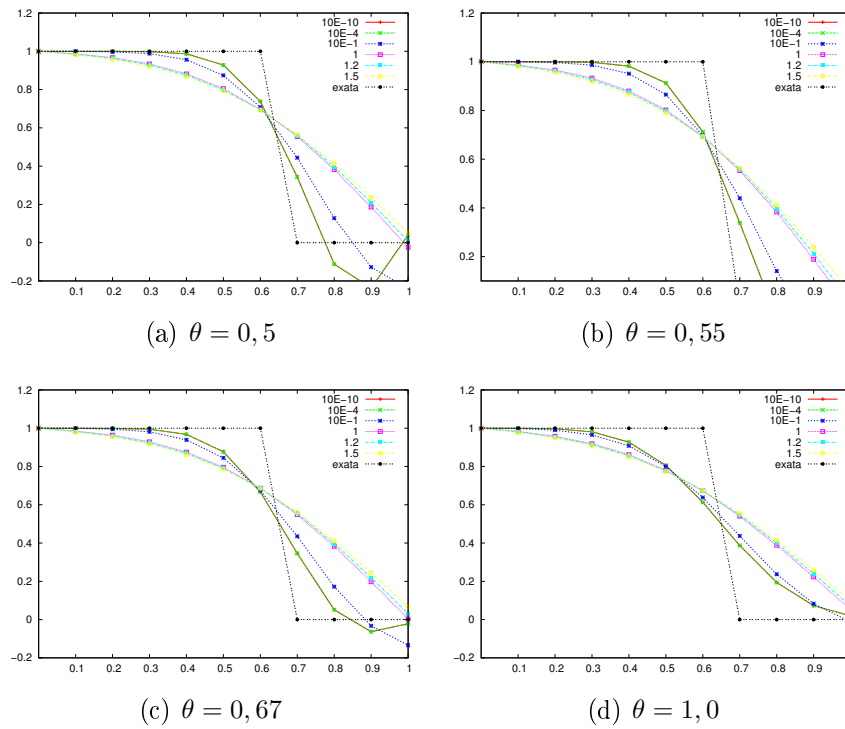


Figura 5.4: Formulação Espaço-Tempo - $CFL = 0,5$

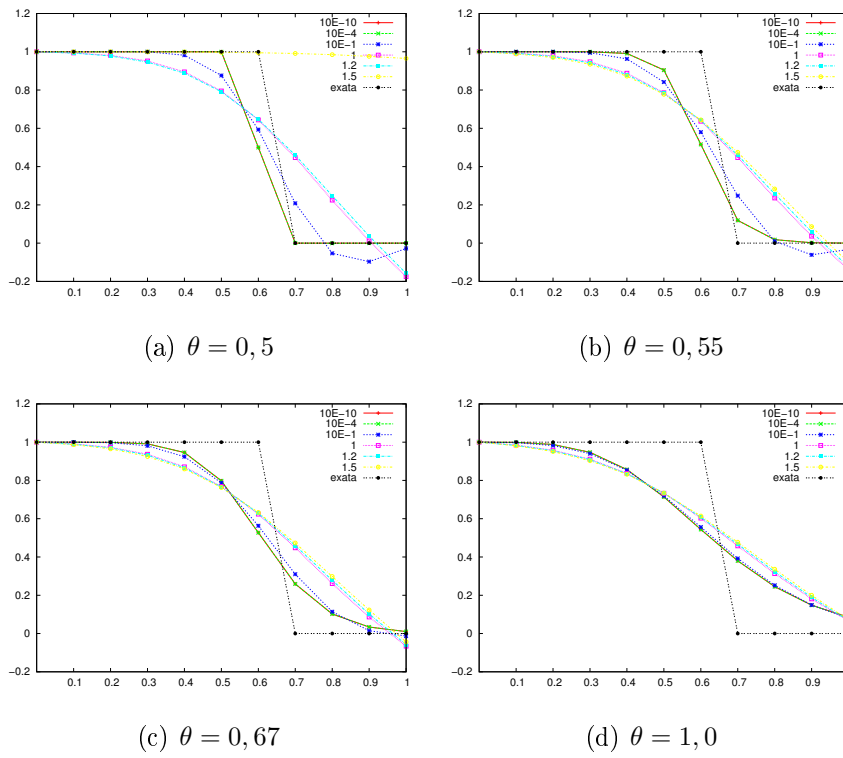


Figura 5.5: Formulação Espaço-Tempo - $CFL = 1,0$

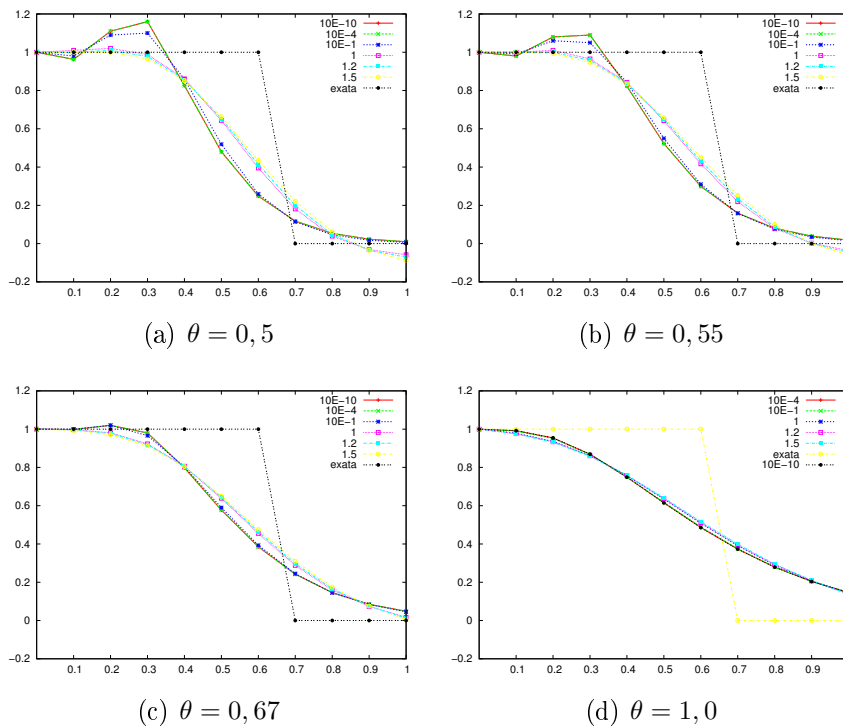


Figura 5.6: Formulação Espaço-Tempo - $CFL = 2,0$

5.5.2 Exemplo 2 - Convecção Pura e Convecção-Difusão Inclinada à Malha

Para este exemplo, o domínio bidimensional é o quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, discretizado numa malha de 25×25 elementos isoparamétricos bilineares, com condições de contorno apresentadas na Figura 5.7. O campo de velocidade é constante ($\|\mathbf{u}\| = 1$), com componentes $u_1 = \cos\alpha$ e $u_2 = \sin\alpha$, e o termo de fonte é $f = 0$. A constante de difusividade para o problema de convecção-difusão é $k = 10^{-3}$ e para o problema de convecção pura $k = 0$. São apresentados resultados para valores de α igual a $22,5^\circ$, 45° e $67,5^\circ$ e θ igual a $0,5$, $0,67$ e $1,0$. Todos os resultados são mostrados no instante $t = 3, 4$.

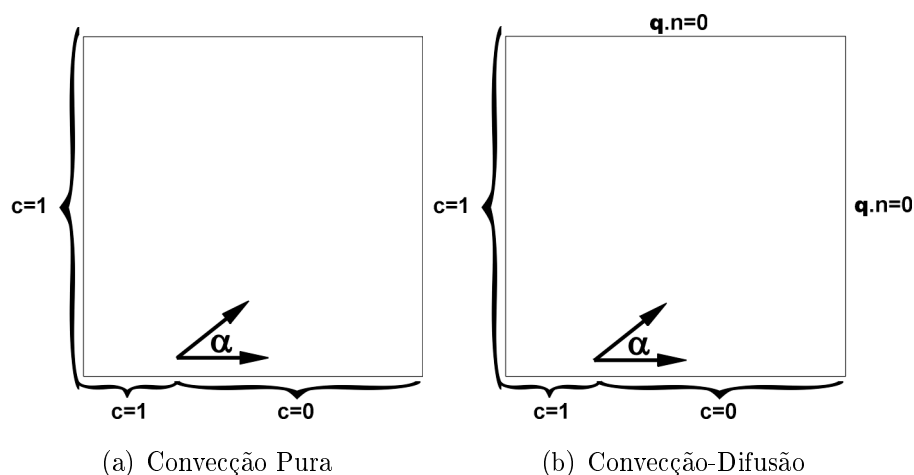


Figura 5.7: Condições de contorno para convecção-difusão(a) e convecção pura(b)

As matrizes A_0 , A_1 , A_2 e B que descrevem o sistema de equações, para este exemplo, são dadas por:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

para

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

As Figuras 5.8 a 5.13 apresentam gráficos para concentração. Nas formulações semi-discretas utilizamos $\Delta t = 0,2$ e para formulação espaço-tempo $\Delta t = 0,02$, para as formulações θ -Mínimos Quadrados, ponderada e espaço-tempo $\theta = 0,5$ e na formulação semi-discreta implícita $\theta = 1,0$.

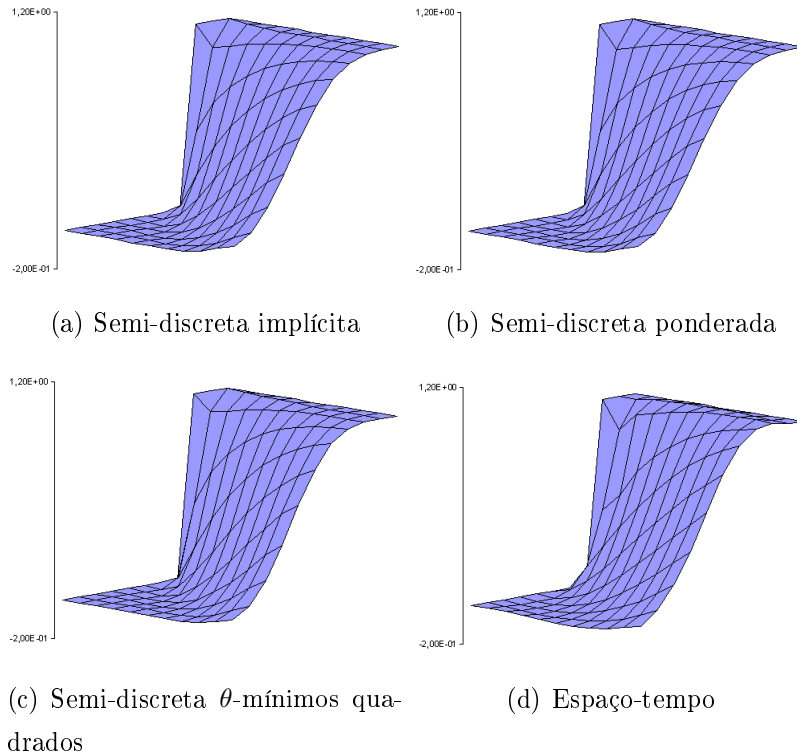
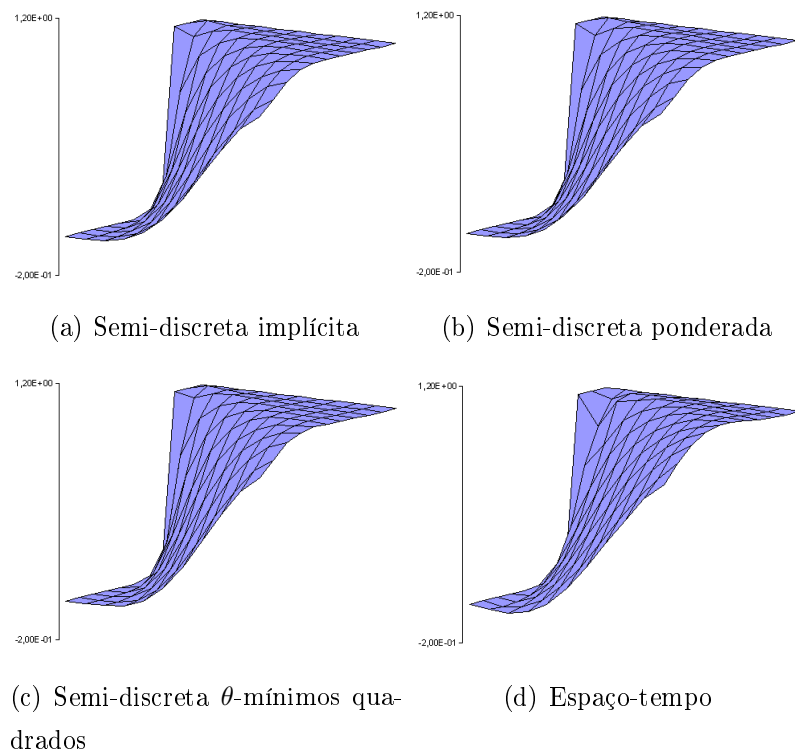
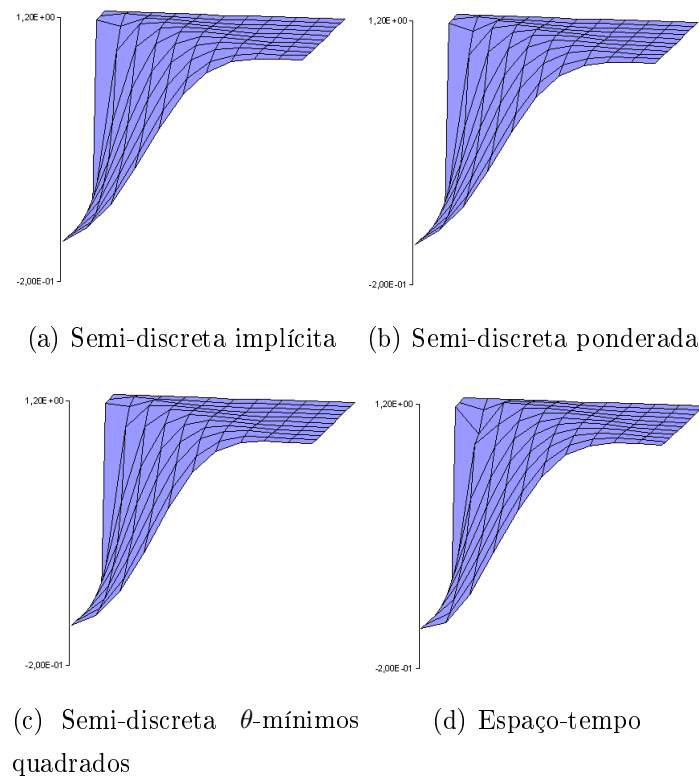
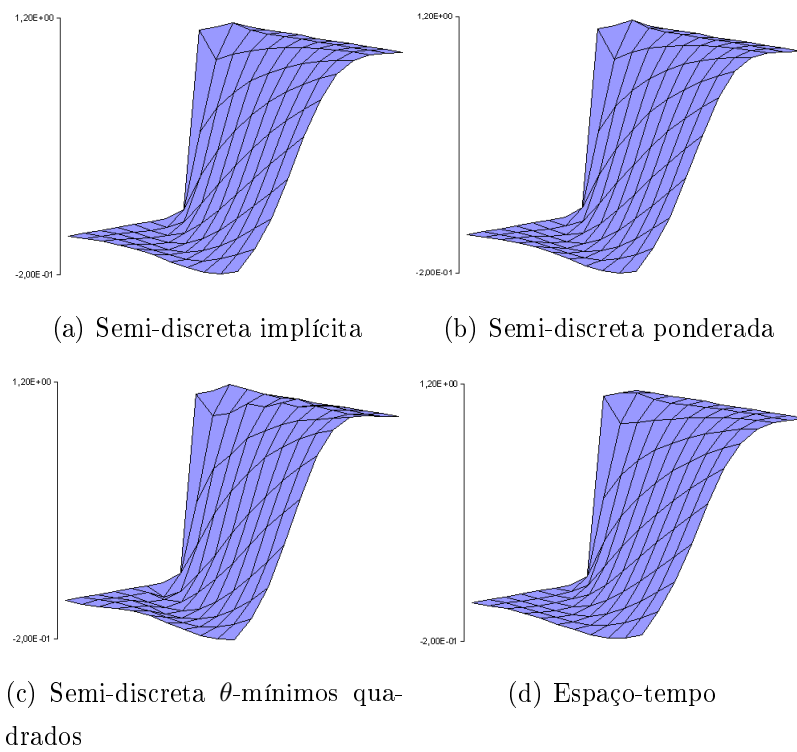
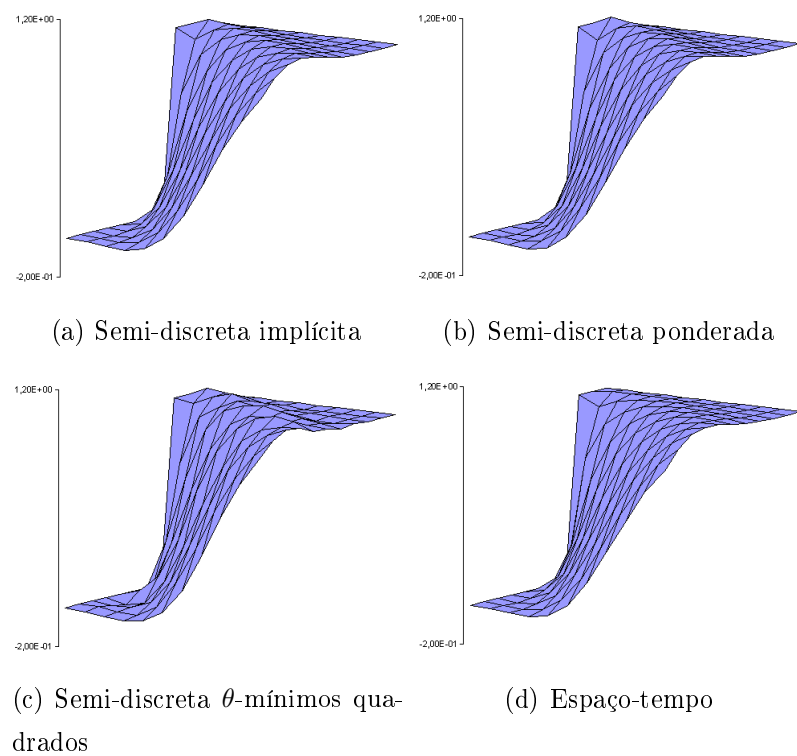


Figura 5.8: Convecção-difusão - $\alpha = 22,5^\circ$

Figura 5.9: Convecção-difusão - $\alpha = 45^\circ$ Figura 5.10: Convecção-difusão - $\alpha = 67,5^\circ$

Figura 5.11: Convecção pura - $\alpha = 22,5^\circ$ Figura 5.12: Convecção pura - $\alpha = 45^\circ$

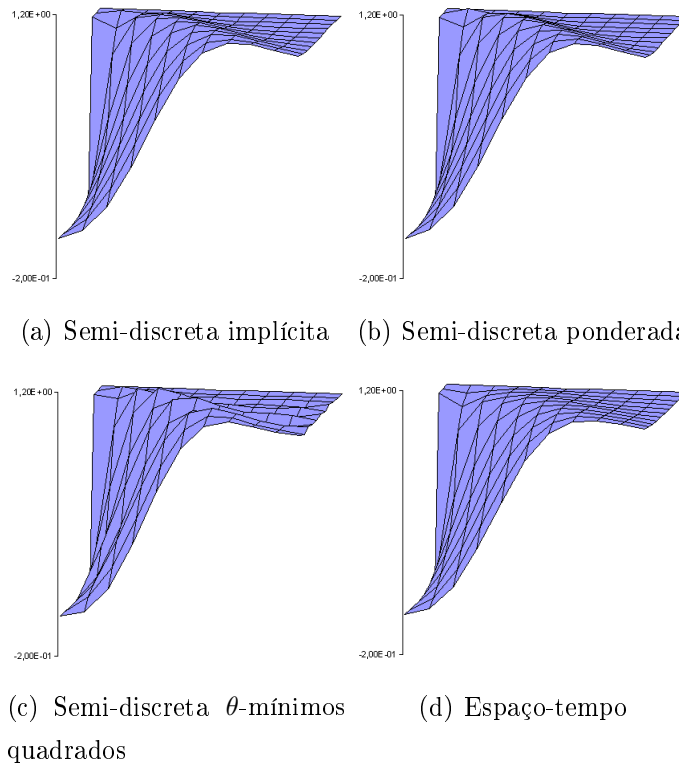


Figura 5.13: Convecção pura - $\alpha = 67,5^\circ$

5.5.3 Exemplo 3 - Domínio Heterogêneo

Para testar os métodos propostos apresentamos o cálculo da concentração para as velocidades variáveis encontradas no Exemplo 2 do Capítulo 4, com malha inclinada apresentada na Figura 4.1 e formulação com rotacional.

A soluções encontradas para concentração são mostradas nas Figuras 5.15 a 5.17 nos tempos $t = 0,12$ e $t = 0,4$ para cada formulação e $\Delta t = 0,04$, para a formulação espaço-tempo utilizamos $\tau = 10^{-12}$.

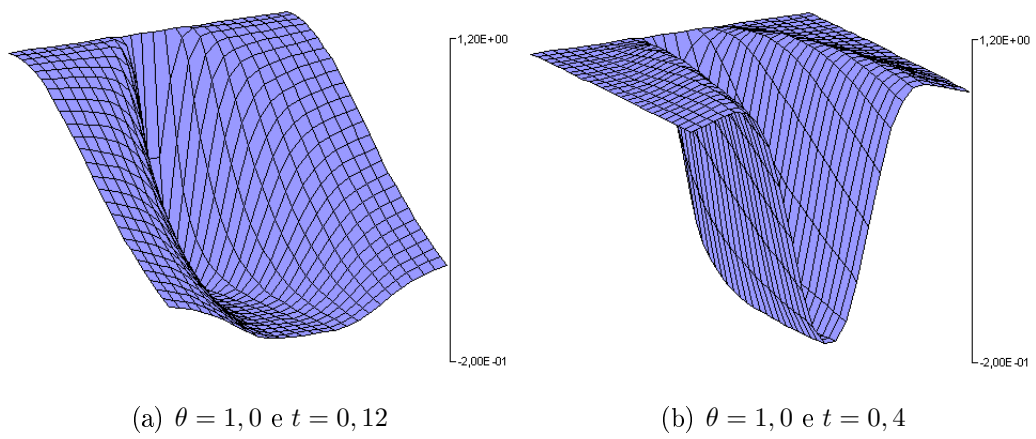


Figura 5.14: Formulação Implícita

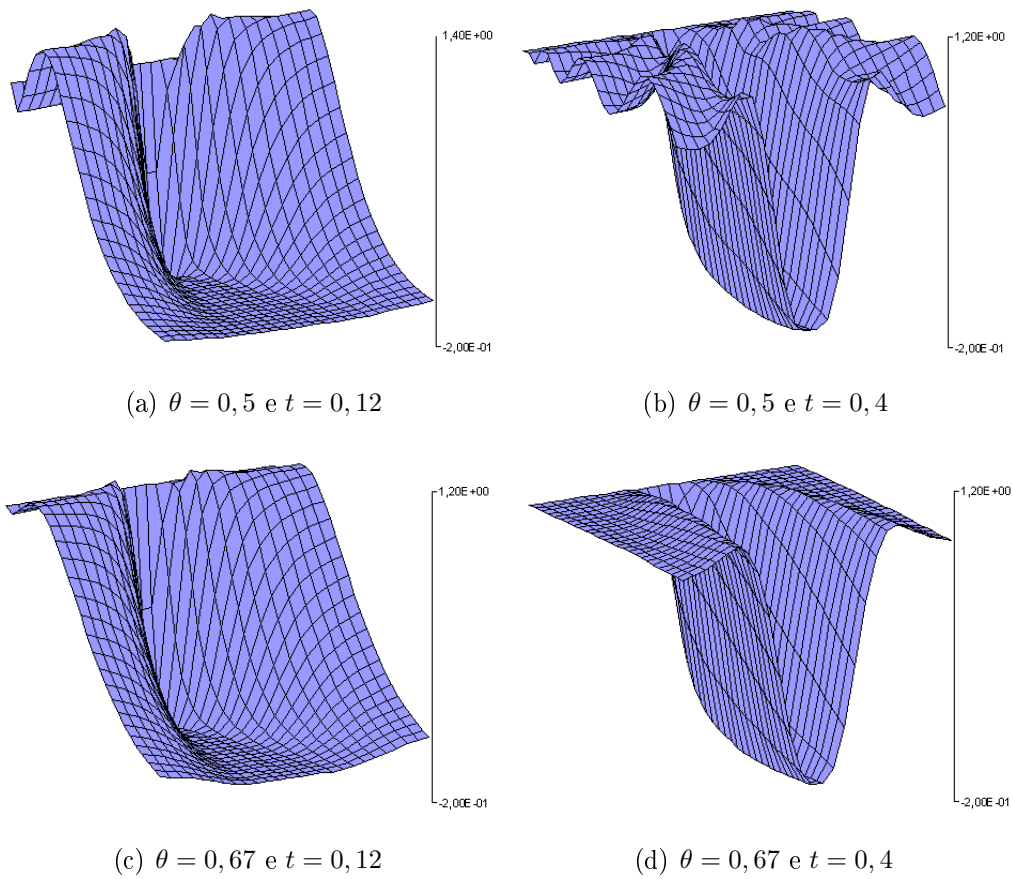
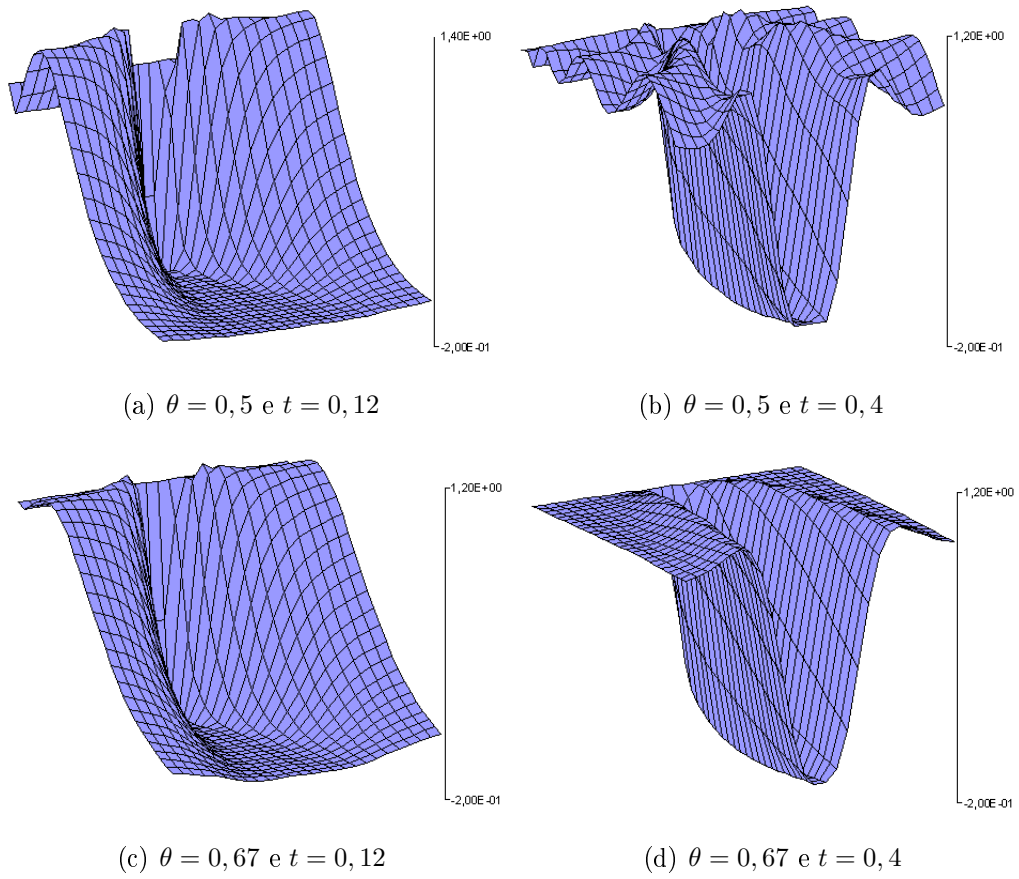


Figura 5.15: Formulação Ponderada

Figura 5.16: Formulação θ -Mínimos Quadrados

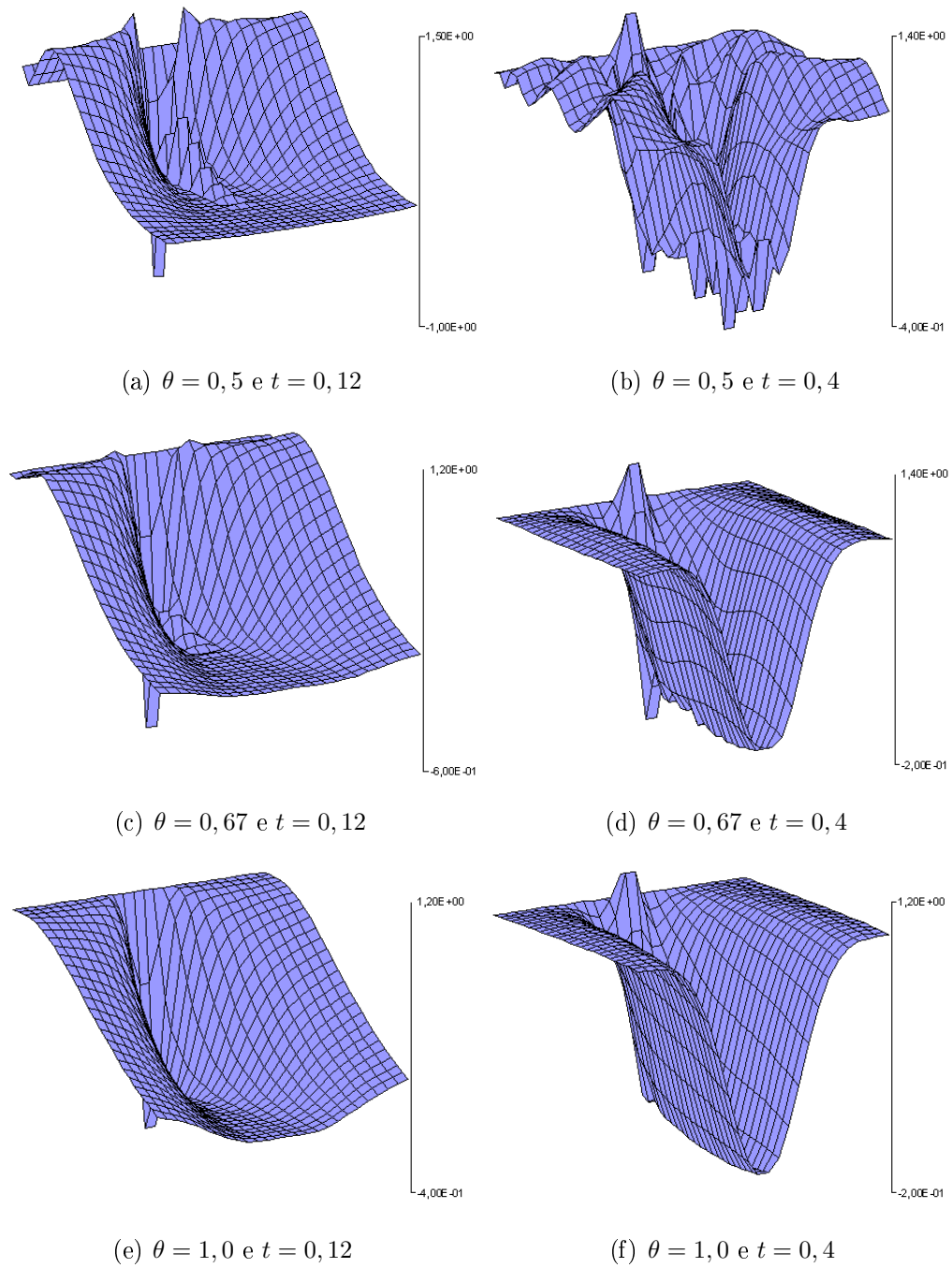


Figura 5.17: Formulação Espaço-Tempo

5.5.4 Exemplo 4 - Velocidades variáveis

Para testar o funcionamento das formulações quando o vetor velocidade é variável foi feita uma simulação proposta por Jiang [4], onde o problema de 5 poços é modelado por uma equação transiente puramente convectiva, com as velocidades definidas explicitamente

por:

$$u_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \quad (5.50)$$

$$u_2(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{y - 1}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \quad (5.51)$$

A formulação escalar foi resolvida por Jiang [4] para $\theta = 1$, ou seja, formulação implícita.

A título de comparação essa equação foi reescrita como um sistema equivalente, conforme (5.8) e utilizamos as formulações semi-discretas mostradas neste capítulo. Como a formulação espaço-tempo não apresentou bons resultados para velocidades variáveis, esses resultados não são apresentados para este exemplo.

O domínio bidimensional quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$ é discretizado em uma malha de 25×25 elementos isoparamétricos bilineares, com condição de contorno $c(0, 0, t) = 1$ e condição inicial $c(x, y, 0) = 0$.

A soluções encontradas são mostradas no tempo $t = 0,12$ e $t = 0,348$ para cada formulação e $\Delta t = 0,004$.

Para este problema, as matrizes A_0 , A_1 , A_2 e B para as formulações propostas, podem ser dadas por:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

e A_0 é a matriz que multiplica o termo da derivada temporal.

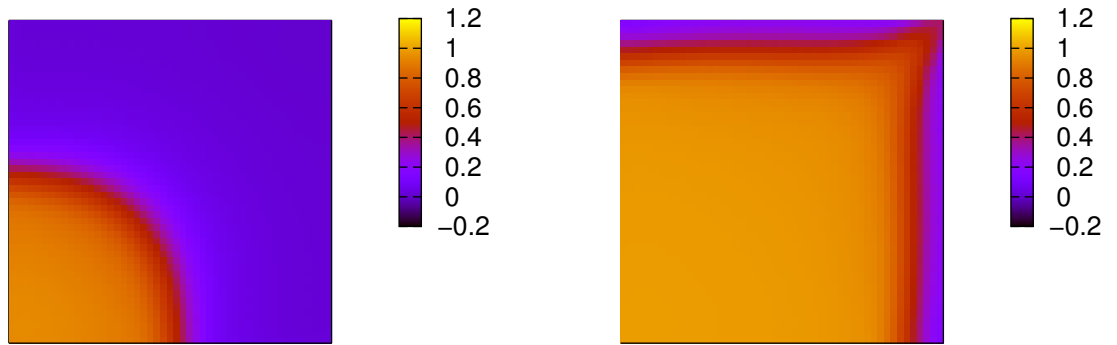


Figura 5.18: Formulação implícita escalar em $t = 0,12$ e $t = 0,348$

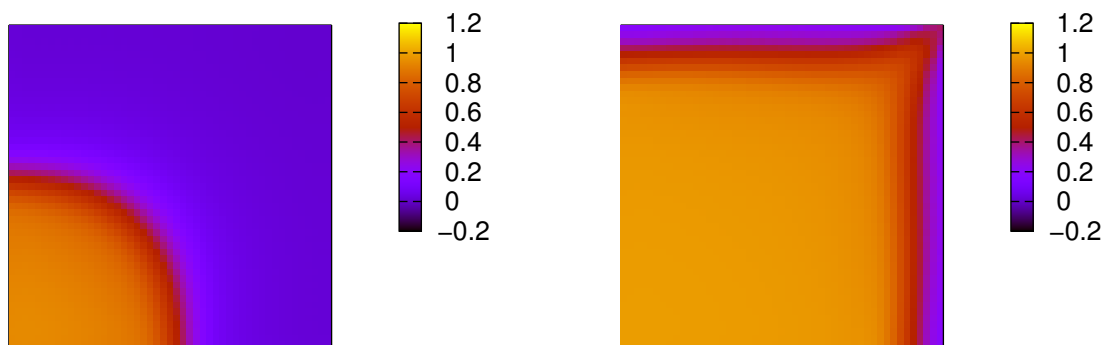


Figura 5.19: Formulação implícita sistema em $t = 0,12$ e $t = 0,348$

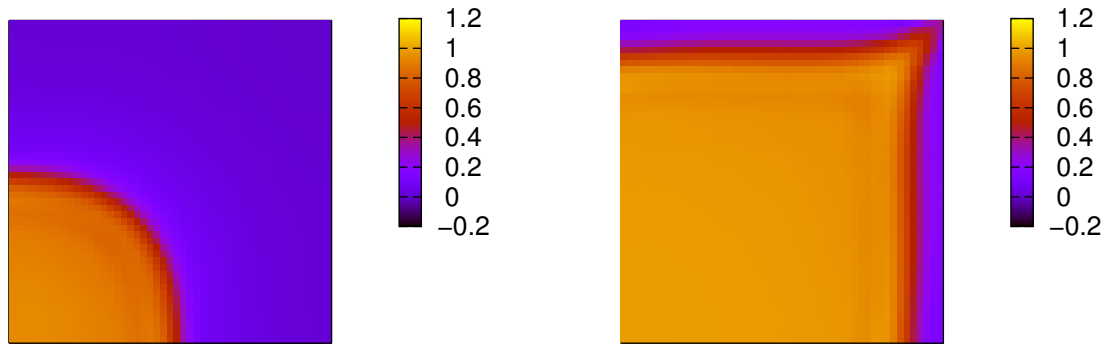


Figura 5.20: Formulação ponderada $\theta = 0,5$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$

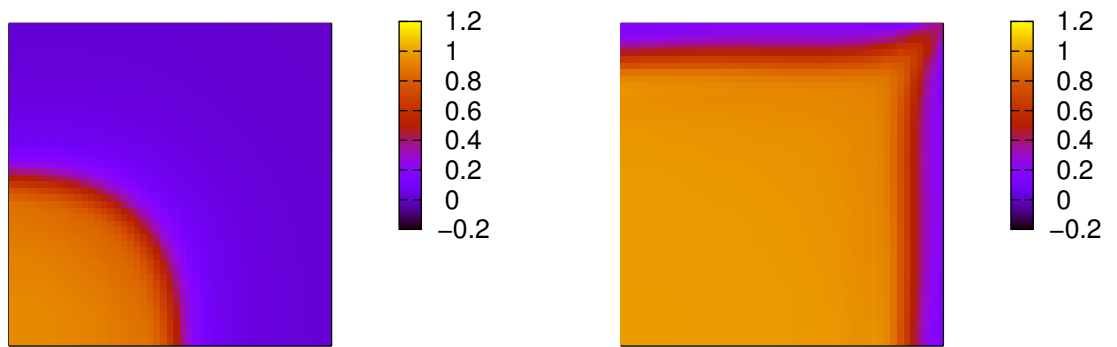


Figura 5.21: Formulação ponderada $\theta = 0,67$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$

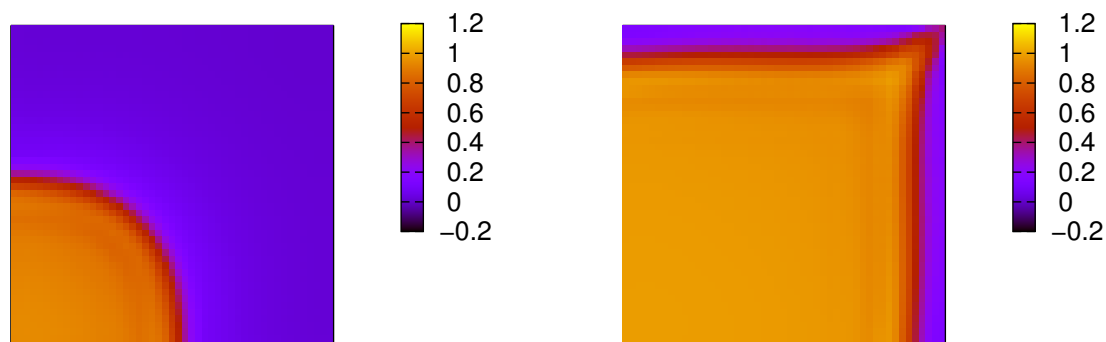


Figura 5.22: Formulação θ -mínimos quadrados $\theta = 0,5$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$

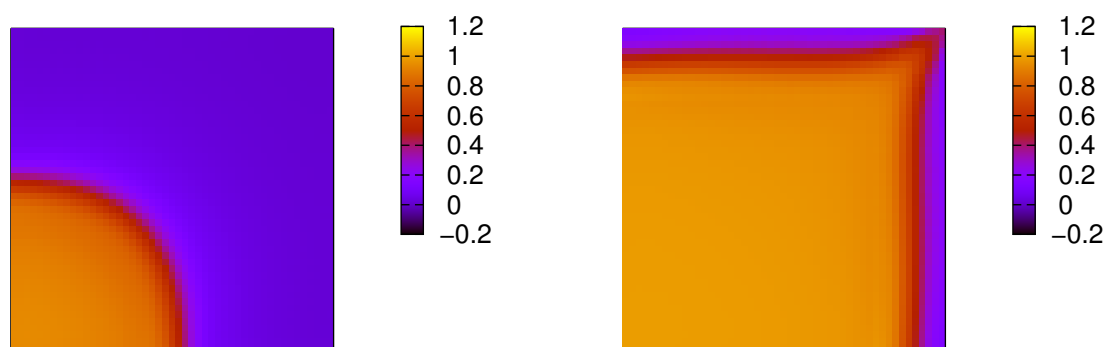


Figura 5.23: Formulação θ -mínimos quadrados $\theta = 0,67$ em $t = 0,12$ e $t = 0,348$

Como a formulação espaço-tempo não apresentou bons resultados para problemas com velocidade variável ela não será utilizada na continuidade do presente trabalho. Resultados para essa formulação com o sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente descrito de outra forma, são apresentados em [29].

Capítulo 6

Escoamentos Miscíveis: Simulação Numérica

Neste capítulo apresentamos resultados numéricos para o problema de escoamentos miscíveis. Nosso problema de interesse é simular casos de recuperação terciária em campos de petróleo, que têm suas condições naturais alteradas, pela injeção de um fluido, com o objetivo de aumentar a pressão interna e conseqüentemente a vazão dos poços produtores. O modelo matemático utilizado é descrito no Capítulo 3, composto de um sub-sistema elíptico e uma equação de transporte envolvendo as variáveis pressão, velocidade e concentração.

Tendo em vista os resultados encontrados nos capítulos anteriores, as velocidades são obtidas pela formulação de mínimos quadrados com rotacional e a concentração é encontrada aplicando-se as formulações semi-discretas de mínimos quadrados. Como no nosso exemplo de interesse o termo de fonte é representado por *deltas de Dirac*, apresentamos uma técnica de remoção de singularidades proposta em [1, 9, 10]. O algoritmo implícito seqüencial é utilizado no presente trabalho e para todas as simulações consideramos os exemplos encontrados em [1, 2, 11]

6.1 Método Implícito Seqüencial

Como descrito em capítulos anteriores é necessário se obter a variável velocidade com boa precisão para o cálculo preciso da concentração. Assim utilizamos para o sub-sistema elíptico em questão, a formulação com rotacional e, como em [1, 10] aplicamos o método implícito seqüencial, ou seja:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^n = f^n \quad (6.1)$$

$$\mathbf{u}^n = -\frac{k(\mathbf{x})}{\mu(c^n)} \nabla p^n \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \Big|_{t=t_{n+1}} + \mathbf{u}^n \cdot \nabla c^{n+1} - \nabla \cdot D(\mathbf{u}^n) \nabla c^{n+1} + c^{n+1} f^{n+1} = \widehat{c}^{n+1} f^{n+1} \quad (6.3)$$

6.2 Configuração de Cinco-Poços

A técnica de recuperação terciária de petróleo trata do escoamento monofásico com duas componentes em um meio poroso bidimensional (óleo+solvente). Para esse problema o campo de petróleo é dividido em poços de injeção e poços de produção.

Para as simulações realizadas nesse trabalho consideramos, como usual, uma configuração alternada de poços de injeção e produção representada por um arranjo de cinco poços apresentado na Figura 6.1, onde o reservatório é composto por vários blocos iguais.

Por causa da simetria, o domínio para todas as simulações deste capítulo representa um quarto de arranjo de cinco poços de lado $L = 1000ft$, com um poço de injeção I localizado no ponto $(0,0)$ e um poço produtor P no ponto $(1000,1000)$ como mostra a Figura 6.1.

As simulações são feitas em um reservatório homogêneo, com a malha discretizada em 50×50 elementos isoparamétricos bilineares, com tensor de permeabilidade de componentes $k_x = k_y = 100mD$, porosidade $\lambda = 0,1$, coeficiente de difusividade molecular $\alpha_m = 0,0$, coeficientes de dispersão longitudinal e transversal $\alpha_l = 1,0$ e $\alpha_t = 0,0$. O poços de injeção opera com uma vazão de $200 \frac{ft^3}{dia}$ em um tempo correspondente a 5% do volume poroso, ou seja:

- volume total do meio poroso: $1000ft \cdot 1000ft \cdot 1ft = 10^6 ft^3$
- volume injetado: $10^6 ft^3 \cdot 5\% \cdot \lambda = 5000 ft^3$
- tempo de injeção: $\frac{5000 ft^3}{200 \frac{ft^3}{dia}} = 25 dias$

Portanto, o poço injetor opera com uma vazão de $200 \frac{ft^3}{dia}$ durante 25 dias, logo $\widehat{c} = 1$ até tempo igual a 25 dias e $\widehat{c} = 0$ para tempo maior que 25 dias.

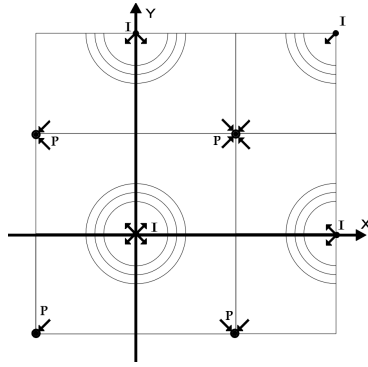


Figura 6.1: Configuração de um quarto de arranjo de cinco poços [2]

6.3 Fontes Singulares

Na aplicação do modelo matemático descrito nas Equações 3.1-3.6, o termo de fonte é modelado por *deltas de Dirac* no poços de injeção e produção, trazendo sérias implicações na resolução do sub-sistema elíptico, como a perda de regularidade do campo de velocidade. Apresentamos a seguir uma forma de contornar esse problema apresentada em [9] e utilizada em [1, 10].

Para um arranjo de N_p poços, em cada intervalo de tempo t_n , decompomos o campo velocidade u^n do sub-sistema elíptico em:

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}_s^n + \mathbf{u}_r^n \quad (6.4)$$

onde \mathbf{u}_r^n é a parte regular do campo das velocidades em $t = t_n$, e \mathbf{u}_s^n é a parte singular dada por:

$$\mathbf{u}_s^n = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{u}_s^{n,i} \quad (6.5)$$

Assim, como em [9], a equação $\nabla \cdot \mathbf{u} = f$ é resolvida como:

i) *parte singular*:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s^{n,i} = f^n \quad (6.6)$$

onde

$$f^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} Q_i \delta(x_i, y_i), \quad (6.7)$$

sendo $\delta(x_i, y_i)$ o delta de Dirac em (x_i, y_i) e Q_i são fluxos especificados nos N_p poços de produção e injeção.

ii) *parte regular*:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_r^n = 0 \quad (6.8)$$

substituindo a equação (6.4) na condição de contorno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, a parte regular do problema fica com condição de contorno não-homogêneas em \mathbf{u}_r^n , ou seja:

$$\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{u}_s^n \cdot \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma \quad (6.9)$$

A pressão no instante t_n também é decomposta na parte singular e regular como:

$$p^n = p_s^n + p_r^n \quad (6.10)$$

A parte singular do problema é dada pela resolução do seguinte problema:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \cdot \delta(x_i, y_i) \quad (6.11)$$

$$\mathbf{u} = \nabla p \quad (6.12)$$

tem solução analítica [9] dada por:

$$p_s^n = \sum_{i=1}^{N_p} p_s^{n,i} = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{Q_i}{2\pi(k_i/\mu_i)} \ln|x - x_i| \quad (6.13)$$

onde $k_i = k(\mathbf{x}_i)$ e $\mu_i = \mu(c^n(\mathbf{x}_i))$ são os valores de k e μ no poço i no instante t_n .

Assim, com a decomposição das velocidades (6.4) a parte regular do sistema é dada por:

$$\mathbf{u}_r^n = -\frac{k(\mathbf{x})}{\mu^n} \nabla p_r^n + \sum_{i=1}^{N_p} \left(\frac{k(\mathbf{x})\mu_i}{\mu(c^n(\mathbf{x}))k_i} - 1 \right) \mathbf{u}_s^{n,i} \quad (6.14)$$

com \mathbf{u}_s sendo calculada explicitamente a partir da Equação (6.13).

O resultado das operações apresentadas nesta seção fornece um sistema em \mathbf{u}_r^n e p_r^n com mais regularidade, sem termo de fonte (6.8) e com condições de contorno não-homogêneas (6.9).

6.4 Simulação de Injeção de Traçadores

Diversos processos na simulação numérica de reservatório de petróleo são modelados pelo escoamento de um fluido incompressível através de outro num meio poroso. A injeção de traçadores, por exemplo, é modelada pelo escoamento de um fluido (solvente) que possibilitará a caracterização do reservatório, como a direção do escoamento. O tempo de

chegada e a concentração do traçador nos poços de produção são informações importantes que permitem caracterizar o reservatório. Geralmente o traçador não interfere nas propriedades do fluido residente e pode-se considerar a mistura dos fluidos com razão de mobilidade unitária. Nesse caso $\mu(c)$, dado pela Equação (3.12) é constante e o sub-sistema elíptico é resolvido somente uma vez.

Resultados numéricos para concentração são apresentados nas Figuras 6.2 a 6.4 para ($M = 1$) e intervalo de tempo $\Delta t = 1$ dia. Apesar da discretização menos refinada, os resultados fornecidos nas formulações utilizadas nesse trabalho, apresentam resultados comparáveis aos encontrados em outros trabalhos [1, 2, 10, 11] utilizando formulações de Galerkin estabilizadas e malhas mais refinadas.

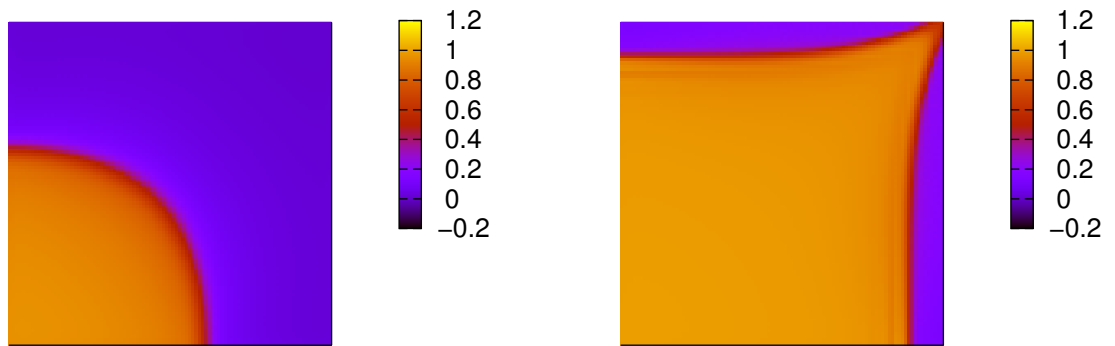


Figura 6.2: Formulação implícita em $t = 300$ e $t = 1500$ dias

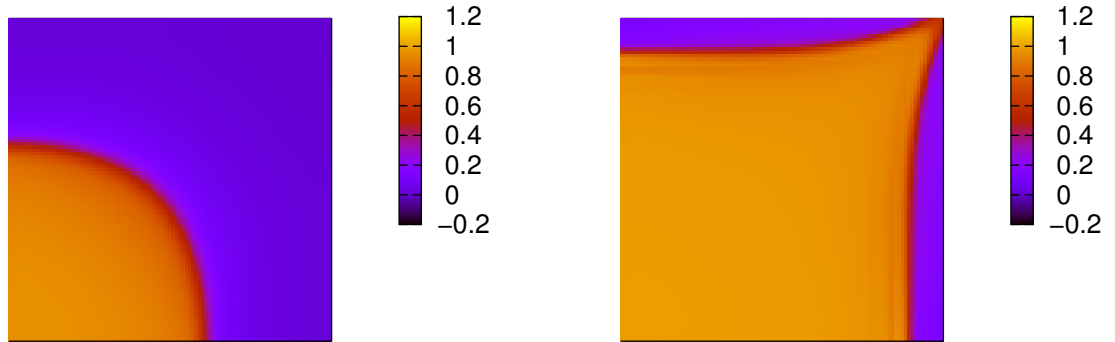


Figura 6.3: Formulação ponderada ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias

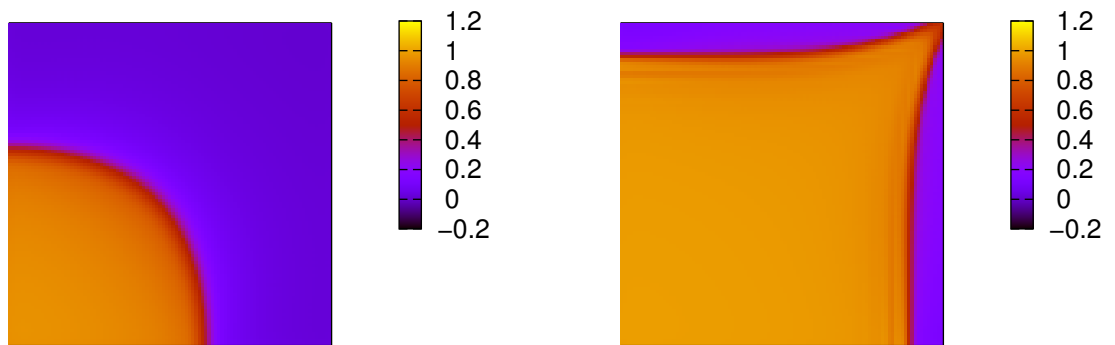


Figura 6.4: Formulação θ -Mínimos Quadrados ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias

6.5 Simulação com razão de mobilidade adversa

A razão de mobilidade adversa acontece quando o fluido injetado é menos viscoso que o fluido residente. Variações de M e parâmetros de dispersão são fatores diretamente

relacionados a taxa de recuperação do reservatório, que tende a diminuir a partir do aumento da razão de mobilidade M [11].

Em escoamentos miscíveis com razão de mobilidade adversa é freqüente se encontrar resultados numéricos com oscilações espúrias, como os mostrados na Figura 6.5 [1, 2]. Além disso esse problema apresenta elevado custo computacional pois neste caso, o sub-sistema elíptico tem que ser resolvido a cada instante de tempo.

Resultados numéricos são apresentados nas Figuras 6.6 a 6.8 para ($M = 41$), com intervalo de tempo $\Delta t = 10$ dias.

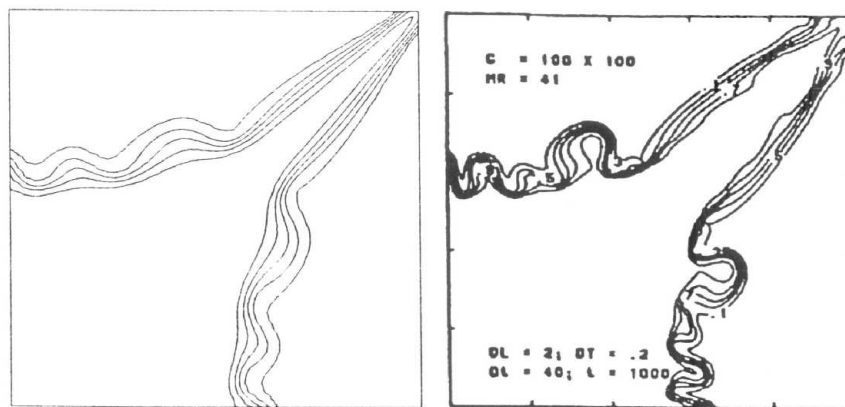


Figura 6.5: Oscilações espúrias [1, 2]

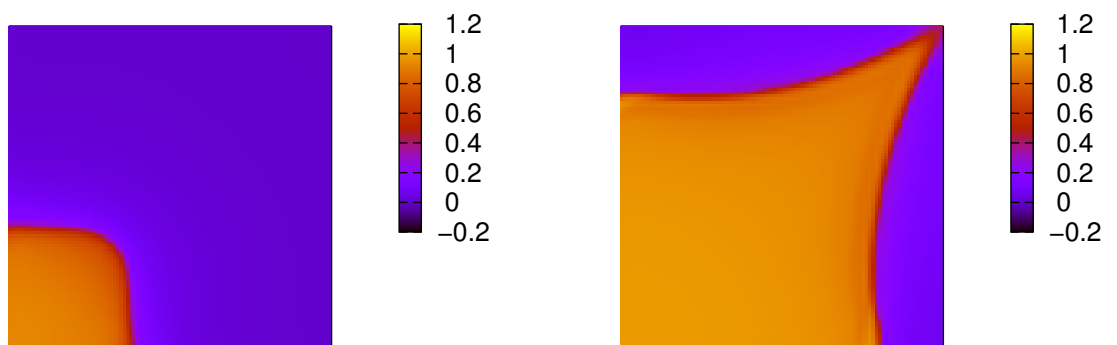


Figura 6.6: Formulação implícita em $t = 300$ e $t = 1500$ dias

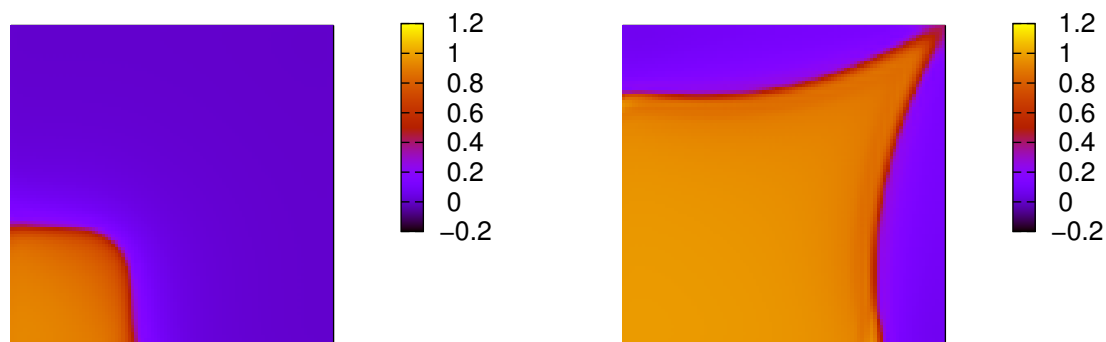


Figura 6.7: Formulação ponderada ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias

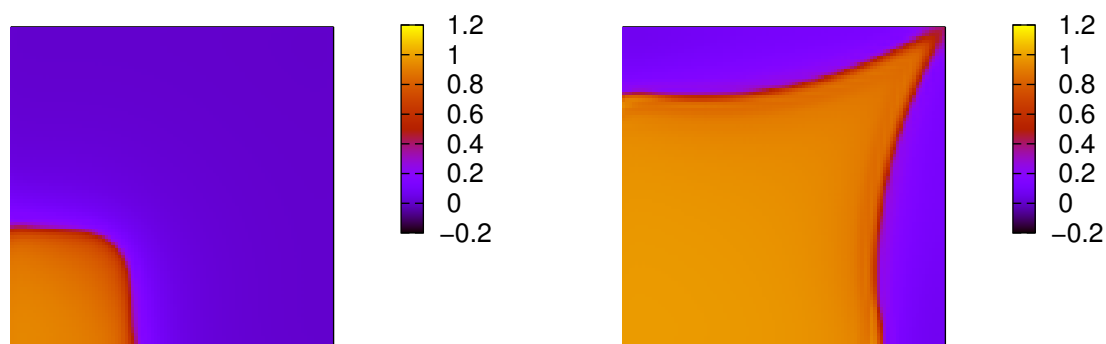


Figura 6.8: Formulação θ -Mínimos Quadrados ($\theta = 0,5$) em $t = 300$ e $t = 1500$ dias

Em todos os exemplos analisados foram encontradas soluções estáveis e com o comportamento físico previsto, mesmo com a utilização de uma malha de 50×50 elementos bilineares.

Capítulo 7

Conclusão

Nesse trabalho apresentamos a formulação de mínimos quadrados aplicada a problemas de escoamentos miscíveis. Avaliamos o comportamento dessa formulação aplicada ao sub-sistema elíptico e a equação de transporte, predominantemente convectiva.

Para o sub-sistema elíptico observamos, nos exemplos analisados, que a formulação mista em pressão e velocidade apresenta resultados comparáveis aos encontrados na literatura para as mesmas aplicações. Apesar de, nesse problema, estarmos resolvendo um sistema de equações com 3 incógnitas por nó, a matriz resultante é simétrica positiva definida.

A inclusão da equação de irrotacionalidade do fluxo, não aumenta o número de equações desse sistema e melhora as taxas de convergência obtidas por essa formulação. Isso pode ser observado no Exemplo 2 do Capítulo 4 onde foi possível captar inclusive, o perfil parabólico do comportamento da velocidade.

Para a equação de transporte observamos, para algumas aplicações, excelentes resultados para a formulação espaço-tempo descontínuo de elementos finitos, no entanto essa formulação merece ser melhor analisada para melhor compreensão dos parâmetros envolvidos (θ , τ , Δt), embora nesse caso, a formulação perca a simetria devido ao termo do salto.

Em relação a formulação semi-discreta, os melhores resultados, em termo de estabilidade e precisão, se comparados com resultados encontrados na literatura, foram encontrados com a formulação totalmente implícita ($\theta = 1$) e para a formulação θ -mínimos quadrados. Cabe ressaltar que essas formulações resultam em uma matriz simétrica positiva definida mas por terem sido descritas como um sistema equivalente de equações diferenciais de 1ª ordem, apresentam uma variável escalar e uma vetorial como incógnitas

nodais.

Esses resultados mostram que as formulações de mínimos quadrados, tanto para problemas estacionários como para problemas transientes, se constituem em uma opção para as formulações clássicas e para as formulações estabilizadas em uso, merecendo continuidade no entendimento de seu comportamento.

Referências

- [1] GARCIA, E. L. M. Formulações de elementos finitos bi e tridimensionais para simulação em paralelo de escoamentos em reservatórios de petróleo. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Doutorado, 1997.
- [2] CASTRO, R. G. S. Análise numérica de formulações de elementos finitos espaço-tempo para escoamentos miscíveis. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Doutorado, 1999.
- [3] LEAL-TOLEDO, R. C. P. Estudo de uma formulação de mínimos quadrados para o método dos elementos finitos. Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE - Tese de Doutorado, 1992.
- [4] JIANG, B.-N. The least-squares finite element method. Springer, 1998.
- [5] HUGHES, T. J. R. The finite element method - linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall.
- [6] BECKERA, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. Finite elements - an introduction. Springer, v. 1, 1998.
- [7] ASSAN, A. E. Método dos elementos finitos. Editora Unicamp, 2003.
- [8] PEACEMAN, D. W. Fundamentals of numerical reservoir simulation. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977.
- [9] EWING, R. E. The mathematics of reservoir simulation. Elsevier Scientific Publishing Company, 1977.
- [10] MALTA, S. M. C. Análise numérica de métodos de elementos finitos para escoamentos miscíveis. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Doutorado, 1995.
- [11] NEY, W. G. Um estudo comparativo sobre formulações estabilizadas e adaptatividade na simulação de deslocamentos miscíveis em meios porosos pelo método dos elementos finitos. 2002. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Mestrado.
- [12] KARAM-FILHO, J. Uma formulação de elementos finitos mistos para escoamentos incompressíveis. 1989. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Tese de Mestrado.
- [13] PEHLIVANOV, A. I.; CAREY, G. F. Error estimates for least-squares mixed finite elements. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, v. 28, n. 5, p. 499–516, 1994.
- [14] AZIZ, A. K.; KELLOGG, R.; STEPHENS, A. B. Least squares methods for elliptic systems. *Mathematics of Computation*, v. 44, n. 169, p. 53–70, 1985.

- [15] CAREY, G. F.; JIANG, B. N. Least-squares finites elements for first hyperbolic systems. *Intertational Journal for Numerical Methods in Engineering*, n. 24, p. 1–13, 1987.
- [16] CHANG, C. L.; JIANG, B. An error analysis of least-squares finite element method of velocity - pressure - vorticity formulation for stokes problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, v. 84, p. 247–255, 1990.
- [17] NGUYEN, H.; REYNEN, J. A space-time least-square finite element scheme for advection-diffusion equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engeneering*, North-Holland, v. 42, p. 331–342, 1984.
- [18] VASCONCELOS, M. dos S. Formulação semi-discreta de mínimos quadrados aplicada a problemas de difusão pura e de advecção. Universidade Federal Fluminense - Tese de Mestrado, 2001.
- [19] BARRETO, M. de F. S. M. Formulação de mínimos quadrados aplicada a problemas de advecção-difusão. Universidade Federal Fluminense - Dissertação de Mestrado, 1999.
- [20] LEAL-TOLEDO, R. C. P. et al. Discontinuos mixed space-time least-square formulation for transient transport equations. XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE, Belém/PA – 2006.
- [21] BRAMBLE, J. H.; SHATZ, A. H. Least squares methods for $2m$ th order elliptic boundary - value problems. *Mathematics of Computation*, v. 25, n. 113, January 1971.
- [22] JOHNSON, C.; NAVERT, U.; J., P. Finite element methods for linear hiperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 45, p. 285–312, 1984.
- [23] DENNIS, B. H.; DULIKRAVICH, G. S. Optimization of magneto-hydrodynamic control of diffuser flows using micro-genetic algorithms and least-square finite elements. *Finite Elements in Analasis and Design*, v. 37, p. 349–363, 2001.
- [24] SETTARI, C. A. P.; PRICE, H. S.; DUPONT, T. Development and aplication of variational methods for simulation of miscible displacement in porous media. *Journal Society Petroleum Engineers*, p. 228–246, 1977.
- [25] YOUNG, L. C. A finite element method for reservoir simulation. *Society Petroleum Engineers*, 1981.
- [26] RUSSEL, T. F.; WHEELER, M. F.; CHIANG, C. Large-scale simulation of miscible displacement by mixed and characteristic finite element methods. *Anais do SIAM Conference on Mathematical and Computacional Methods in Seismic Exploration and Reservoir Modeling*, Houston - Texas - USA, v. 44, p. 53–70.
- [27] PINTO, A. C. C. Esquemas de alta resolução para controle de dispersão numérica em simulação de reservatórios. Universidade Estadual de Campinas - Tese de Mestrado, 1991.
- [28] COUTINHO, A. L. G. A.; ALVES, J. D. Parallel finite element simulation of miscible displacement in porous media. *Journal of Society of Petroleum and Engiereering*, v. 1, n. 4, p. 487–500, 1996.

-
- [29] NOVO, C. C. et al. Discontinuous mixed space-time least-square formulation for transient advection-diffusion-reaction equations. XV Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, Santa Fé – Argentina – 2006.