

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

SYNARA PEREIRA DE BRITO

**Partição Floresta-Clique e Floresta-Estável de
Cografos**

NITERÓI

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

SYNARA PEREIRA DE BRITO

Partição Floresta-Clique e Floresta-Estável de Cografos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Otimização Combinatória.

Orientador:
Loana Tito Nogueira

NITERÓI

2008

Partição Floresta-Clique e Floresta-Estável de Cografos

Synara Pereira de Brito

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada por:

Profa. D.Sc. Loana Tito Nogueira / IC-UFF (Presidente)

Profa. D.Sc. Cláudia Regina Villela Maciel / UFF

Prof. D.Sc. Fábio Protti / UFRJ

Prof. D.Sc. Mitre Costa Dourado / UFRRJ

Profa. Ph.D. Sulamita Klein / UFRJ

Niterói, 19 de dezembro de 2008.

"O que não dá prazer não dá proveito.

Em resumo, senhor, estude apenas o que lhe agrada."

William Shakespeare

Agradecimentos

Agradecer a todos que me ajudaram, não só efetivamente na construção dessa Dissertação, mas aos amigos e colegas que se fizeram presentes, que se preocuparam, que foram solidários, que torceram por mim; não é tarefa fácil. O maior perigo está em cometer mais injustiças esquecendo pessoas que me ajudaram do que fazer jus a todas que merecem.

Mas se devo ser seletiva, começo por Aquele que é fundamental em minha vida, meu bom Deus que me incentivou a transpor todo e qualquer obstáculo, e atingir meus objetivos. Minha família merece poucas palavras, mas aquelas que me são mais caras. Obrigado por vocês existirem. Obrigado por depositarem em mim a confiança para todas as horas. Sei que vocês se orgulham por eu ter atingido uma etapa que nenhum outro de nós tinha atingido antes. Mas este orgulho que sentem por mim, converto numa obrigação de a cada dia ser mais digno de os representar. Agradeço em especial aos meus pais, por terem sido o contínuo apoio em todos estes anos, sua paciência infinita e sua crença absoluta na capacidade de realização a mim atribuída foram, indubitavelmente, os elementos propulsores desta dissertação. Agradeço em especial a meu pai, por ser minha inspiração intelectual e, de forma carinhosa à minha mãe, por principalmente confiar em mim. Agradeço ao meu irmão Emílio, que apesar da distância sempre demonstrou seu carinho.

Especial durante toda minha trajetória do mestrado, foram meus grandes e inesquecíveis amigos. Ao Lelo por estar presente em todo o tempo, soube compreender, como ninguém, a fase pela qual eu estava passando. Durante a realização deste trabalho, sempre tentou entender minhas dificuldades e minhas ausências. Às sempre presentes, Dani, Isa, Jú, Karla e Ra, por estarem inexplicavelmente tão perto.

Todos os que realizam um trabalho de pesquisa sabem que não o fazem sozinhos. O resultado desse estudo foi possível apenas pela cooperação e pelo esforço de pessoas brilhantes. Agradeço à minha grande orientadora Loana a consideração de ter aceito a orientação de minha dissertação, espero retribuir, com o meu trabalho, a confiança em mim depositada; e agradeço além de tudo, pela paciência que teve comigo, pelos ensinamentos, pelas horas de leituras gastas no meu trabalho e pela companhia em novas

experiências vividas nesse período. Incluo, de forma especial, os professores Fábio e Sula. Foi sorte terem cruzado meu caminho acadêmico nesta etapa de conclusão de mestrado. Suas idéias permearam e enriqueceram meu trabalho.

Agradeço também às pessoas que estiveram presentes nessa fase. Às meninas da Gaiola (Cris, Renathinha e Vivi) por me tirarem do foco quando preciso mas me cobrarem na hora certa, a presença de vocês foi substancial. Aos colegas do instituto. Aos colegas do trabalho por permitirem os meus afastamentos, entendendo as razões que me levaram a fazer estas solicitações para concluir a pesquisa no tempo exigido.

Resumo

Este trabalho considera o problema de verificar se o conjunto de vértices de um grafo G pode ser particionado em dois subconjuntos A e B com algumas propriedades. Por exemplo, consideramos o caso em que A é uma floresta e B uma clique, definido como o problema da (F,C) -partição. Da mesma forma, consideramos o caso em que A induz uma floresta e B um conjunto estável, conhecido como o problema da (F,S) -partição. Nós também consideramos os casos em que A induz um grafo livre de triângulos. Provamos que o problema da (F,C) -partição pode ser resolvido polinomialmente e fornecemos uma caracterização de cografos- (F,C) através de uma família de subgrafos proibidos. Mais especificamente, provamos que um cografo G admite uma partição numa floresta e numa clique se e somente se não contiver nenhum dos subgrafos da família como subgrafo induzido. Além disso, nós também fornecemos um algoritmo linear para reconhecer grafos- (F,C) . Com respeito ao problema da (F,S) -partição, provamos que o problema de reconhecer se um grafo perfeito G admite uma partição (F,S) é um problema NP -completo. Para os casos em que G é um cografo ou um grafo cordal, fornecemos uma caracterização através de subgrafos proibidos.

Palavras-chave: (F,C) -partição, (F,S) -partição, grafos perfeitos, cografos e grafos cordais.

Abstract

This work considers the problem of verifying if the set of vertices of a graph G can be partitioned into two subsets A and B , such that A and B have some properties. For example, we consider the case when A is a forest and B is a clique, defined as the (F,C)-partition problem. In the same way, we consider the case when A is a *forest* and B is a stable set, known as the (F,S)-partition problem. We also consider the previous problems when A is a triangle-free graph. We prove that the (F,C)-partition problem can be solved in polynomial time and we provide two characterizations of (F,C)-cographs, one structural and the other by forbidden subgraphs where we prove that a cograph G can be partitioned into a forest and clique if and only if it does not contain any of the graphs from this set of forbidden subgraphs as an induced subgraph. Moreover, we also provided a linear time algorithm to recognize (F,C)-cographs in linear time. With respect to the (F,S)-partition problem, we prove that the problem of recognizing if a perfect graph G admits a (F,S)-partition is *NP*-complete. For the case when G is a cograph or a chordal graph, we provide a characterization by forbidden subgraphs as well.

Keywords: (F,C)-partition, (F,S)-partition, perfect graphs, cographs and chordal graphs.

Palavras-chave

1. Grafos Perfeitos
2. Grafos Cordais
3. Cografos
4. Partição em grafos
5. Partição-(F,S)
6. Partição-(F,C)

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Definições e Notações	5
2.1 Teoria de Grafos	5
2.2 Teoria da Complexidade	8
2.3 Algumas classes especiais de grafos	10
2.3.1 Grafos Perfeitos	10
2.3.2 Grafos Cordais	11
2.3.3 Cografos	13
2.3.3.1 Propriedades Estruturais	13
2.3.3.2 Decomposição Modular	14
2.3.3.3 Co-árvore	16
2.3.3.4 Caracterização de cografos	16
2.3.4 Grafos <i>Threshold</i>	17
3 Problemas de Partição em Grafos	20
3.1 Grafos-(F,C) e Grafos-(TF,C)	21
3.1.1 Grafos-(F,C)	21
3.1.2 Cografos-(F,C)	24

3.1.2.1	Caracterização Cografos-(F,C)	24
3.1.2.2	Caracterização Cografos-(F,C) por subgrafos proibidos . .	28
3.1.2.3	Um algoritmo de tempo linear para reconhecimento de cografos-(F,C)	29
3.1.3	Grafos-(TF,C)	32
3.2	Grafos-(F,S) e Grafos-(TF,S)	33
3.2.1	Grafos-(F,S)	33
3.2.2	Grafos-(TF,S)	35
4	Conclusão	37
4.1	Trabalhos Futuros	37
	Referências	39

Lista de Figuras

1.1	(2,1)-partição	3
2.1	Um grafo cordal.	12
2.2	Um grafo não cordal.	12
2.3	Cografo G e sua respectiva árvore de decomposição modular	15
2.4	Grafo estrela $K_{1,6}$ e uma atribuição <i>threshold</i> com $t = 6$	19
3.1	Afirmção 1 (floresta livre de P_4)	24
3.2	Afirmção 3 ($v \in Q$ é parcial para alguma $S_i \rightarrow v$ não é adjacente a nenhum vértice das outras $S_j, j \neq i$)	25
3.3	Afirmção 4 ($x \in Q$ é parcial para S_i e $y \in Q$ é parcial para $S_j \rightarrow i = j$)	26
3.4	Afirmção 5 ($x \in Q_2$ é adjacente a algum vértice em $U \rightarrow x$ é adjacente a todos eles)	26
3.5	Subgrafos proibidos minimais.	30
4.1	Exemplo de um grafo pertencente à família infinita de sugrafos proibidos.	38

Lista de Tabelas

3.1	Reconhecimento de grafos (F,C) e (TF,C)	21
3.2	Caracterização de grafos (F,C) e (TF,C)	21
3.3	Reconhecimento de grafos (F,S) e (TF,S)	21
3.4	Caracterização de grafos (F,S) e (TF,S)	22

Capítulo 1

Introdução

A primeira evidência do uso de grafos foi em 1736, quando Euler utilizou-os para resolver o problema das Sete Pontes de Königsberg. Desde então, grafos têm sido utilizados em uma grande variedade de aplicações que vão desde circuitos elétricos até ciências sociais. Grafos são estruturas muito usadas para representar a existência ou não de relações entre elementos de um dado conjunto. Assim, redes de comunicação, fluxos em redes de transporte, mapas geográficos e relações binárias em geral podem ser representadas por grafos, e neste caso, várias questões de interesse podem ser investigadas. Por exemplo, qual o seu grau de vulnerabilidade (a eliminação de quantas arestas ou vértices causam a perda de conexidade), sua estabilidade (número máximo de vértices independentes em um grafo), qual o seu diâmetro (maior distância entre quaisquer dois de seus vértices), se podem ser particionados em um certo número de subgrafos com certa característica, entre outras.

Estamos interessados em problemas dessa natureza, onde G é um grafo com um conjunto de vértices V e arestas E , e deseja-se particionar o conjunto de vértices V em subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_k onde $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq k$, exigindo-se, porém, algumas propriedades sobre esses subconjuntos de vértices. Tais propriedades podem ser internas, ou seja, relação entre os vértices de um mesmo subconjunto; ou externas, relação entre os subconjuntos de vértices.

Como principal exemplo, podemos citar um dos problemas mais famosos que se insere neste contexto, o problema da k -coloração, no qual deseja-se verificar se é possível particionar os vértices de um dado grafo em k conjuntos independentes V_1, \dots, V_k (sem restrições externas). Sabe-se que esse problema é polinomial para $k \leq 2$ e NP-completo para $k \geq 3$.

Outro problema bastante conhecido de particionamento de grafos é verificar se um

dado grafo G é split, ou equivalentemente, verificar se o conjunto dos vértices de G pode ser particionado em dois subconjuntos, dos quais um é independente e o outro é uma clique. Provou-se que o reconhecimento de grafos split pode ser realizado em tempo linear [16].

Brandstädt propôs uma generalização de grafos split, que definiu uma nova classe de grafos, a classe dos *grafos*-(k, l), como sendo aquela formada pelos grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes e l cliques. Brandstädt considerou, em particular, as classes de grafos-(2, 1), grafos-(1, 2) e grafos-(2, 2), apresentando algoritmos polinomiais para reconhecer estas classes [2, 3]. Feder *et al.* [12] também apresentaram algoritmos polinomiais para o reconhecimento destas classes que surgiram como sub-produto de algoritmos de partição em subgrafos densos ($|E|$ próximo a $|V|^2$) e esparsos ($|E|$ muito menor que $|V|^2$). Por outro lado, sabe-se que reconhecer grafos-(k, l) para $k \geq 3$ ou $l \geq 3$ é NP-completo [2]. Como exemplo, podemos considerar a classe dos grafos-($k, 0$), que corresponde ao problema de reconhecer se um dado grafo é k -colorível (já mencionado anteriormente, cujo reconhecimento desta classe é NP-completo para $k \geq 3$).

Em [12] Feder *et al.* foi definido o problema da M -partição, que generaliza o problema de grafos-(k, l), como segue: particionar o conjunto de vértices de um dado grafo em m partes A_1, A_2, \dots, A_m com certas exigências para cada A_i , $i = 1, \dots, m$, tais como: os vértices em A_i devem ser completamente adjacentes ou completamente não adjacentes (exigências internas) ou para cada par A_i, A_j , os vértices em A_i e A_j são completamente adjacentes ou não adjacentes entre si (exigências externas). Com o objetivo de capturar essas exigências de uma maneira bem simples, Feder *et al.* [12] definiram uma matriz simétrica M de ordem $m \times m$ em que cada elemento $M_{i,j}$, $i \neq j$, representa uma restrição externa entre A_i e A_j .

Mais especificamente, seja M uma matriz simétrica de ordem $m \times m$ onde cada elemento $M_{i,j}$ é igual a 0, 1, ou *. Uma *partição* M de um grafo G , ou uma *M -partição*, é uma partição do conjunto de vértices $V(G)$ em m partes A_1, A_2, \dots, A_m , tal que A_i é estável se $M_{i,i} = 0$, completo (isto é, uma clique) se $M_{i,i} = 1$ ou sem nenhuma restrição interna se $M_{i,i} = *$, e tal que A_i e A_j são completamente não-adjacentes se $M_{i,j} = 0$, ou completamente adjacentes se $M_{i,j} = 1$, ou sem restrição externa se $M_{i,j} = *$.

Na Figura 1.1 damos um exemplo de um grafo-(2, 1) seguido de sua matriz M . Nesta figura, também utilizamos uma representação simbólica (utilizada em [12], [14]) mostrando uma M -partição geral. O círculo vazio representa um conjunto estável (0 na diagonal principal de M), um círculo cruzado representa uma clique (1 na diagonal prin-

principal de M); similarmente, dois conjuntos serão ligados por uma linha dupla se eles são completamente adjacentes (1 fora da diagonal principal de M), ou sem nenhuma linha ligando-os se eles são completamente não-adjacentes (0 fora da diagonal principal de M). Além disso, representamos ausência de restrição interna por um círculo listrado (* na diagonal principal de M), enquanto ausência de restrição externa é representada por uma linha simples unindo dois conjuntos (* fora da diagonal principal de M).

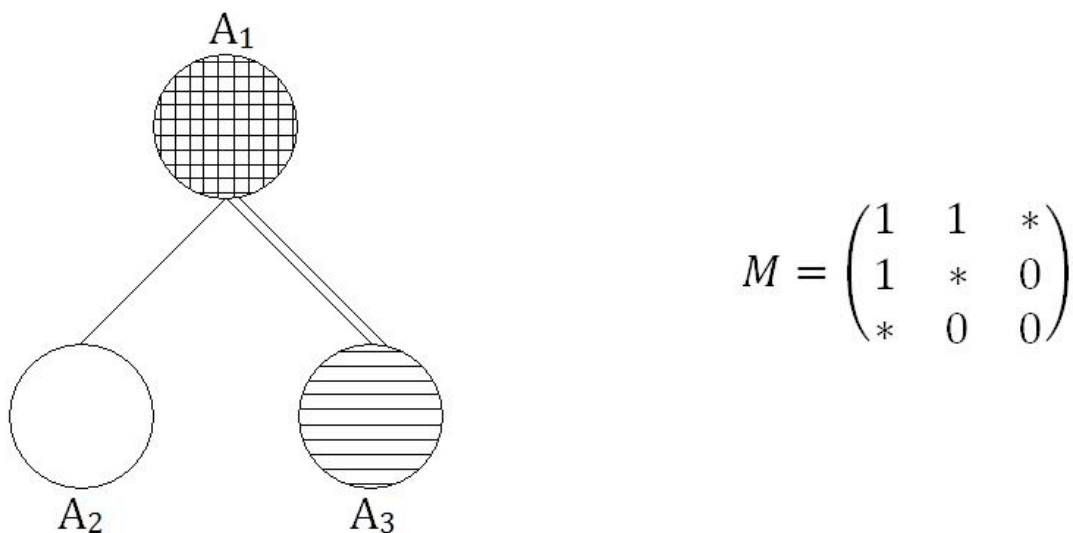


Figura 1.1: (2,1)-partição

Em [24] o resultado apresentado em [11] que caracteriza cografos-(2,1) e cografos-(2,2) em termos de estruturas proibidas foi estendido. Mais precisamente, foi apresentada uma caracterização por estruturas proibidas dos cografos que podem ser particionados em k conjuntos independentes e l cliques.

Teorema 1 [24] *Um cografo G é grafo- (k, l) se e somente se não contém nenhum subgrafo da família $(l + 1) * K_{(k+1)}$ como subgrafo induzido.*

Além desse resultado, também em [24] foi desenvolvido um algoritmo simples linear de reconhecimento dos cografos- (k, l) .

Recentemente, foi estudada por A. Yang e J. Yuan [27] uma nova partição em grafos, denominada *quase-bipartição*. Nesse estudo eles reconhecem grafos que podem ser particionados em um conjunto independente e um conjunto acíclico, denominados *grafos quase-bipartidos*, propondo uma caracterização para grafos com grau máximo 3 e diâmetro 2. Além disso, provaram que o reconhecimento dos grafos quase-bipartidos é NP-completo para grafos onde o grau máximo é 4 ou onde o diâmetro é 4.

Baseado nesses estudos, consideramos o problema de particionar um grafo em dois subconjuntos: A e B , em que A induz um grafo acíclico, ou equivalentemente uma floresta, e B induz uma clique, que pode ser vista como um transversal completo de ciclos. Tais grafos serão chamados *grafos*-(F,C). Da mesma forma, consideramos o caso em que A induz uma floresta, mas B induz um conjunto estável, denominados *grafos*-(F,S). Além disso, estudamos também o problema de particionar G num subconjunto A que induz um subconjunto livre de triângulos e num conjunto B que induz uma clique, tais grafos serão chamados *grafos*-(TF,C). Nesse caso a clique pode ser vista como um transversal de triângulos. Por último consideramos o caso em que A induz um subconjunto livre de triângulos e B um conjunto estável. Tais grafos serão chamados de *grafos*-(TF,S). Para cada um desses problemas, provamos que reconhecer tais grafos é resolvido em tempo polinomial ou é NP-completo. Em particular, para alguns desses grafos, provamos uma caracterização por subgrafos proibidos quando nos restringimos às classes dos cografos e dos grafos cordais.

Capítulo 2

Definições e Notações

2.1 Teoria de Grafos

Um *grafo simples* é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito não-vazio de *vértices*, denotado por $V(G)$ e E é um conjunto de pares não-ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*, e denotado por $E(G)$. Uma aresta entre dois vértices u e v de $V(G)$ será denotada por (u, v) . Utilizaremos a notação $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$ para denotarmos a cardinalidade de $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. No decorrer deste trabalho, iremos utilizar a denominação grafos para denotar o que definimos como grafos simples.

Um grafo G é dito *trivial* se $|V(G)| = 1$, isto é, G possui um único vértice.

Um vértice u é *adjacente* a outro vértice v em G se $(u, v) \in E(G)$. Neste caso, dizemos que u e v são *vizinhos* em G , e que a aresta $e = (u, v)$ é *incidente* a u e a v , ou que tem *extremos* u e v . Caso $(u, v) \notin E(G)$, dizemos que u e v são *não-adjacentes*.

Denotamos por $N(u)$ o conjunto de vértices adjacentes a u em G , tal conjunto é chamado de *vizinhança* de u , e por $N[u]$ o conjunto $N(u) \cup u$, chamado de *vizinhança fechada* de u . Um vértice u é dito *universal* quando $N(u) = V(G) - u$. Os vértices u, v são *gêmeos* se $N(u) - u, v = N(v) - u, v$.

O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes ao vértice v .

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Dado um conjunto de vértices $Y \subseteq V(G)$, $Y \neq \emptyset$, o *subgrafo de G induzido* por Y , denotado por $G[Y]$ é o subgrafo H de G tal que $V(H) = Y$ e $E(H)$ é o conjunto das arestas de G que

têm ambos os extremos em Y . Neste trabalho consideramos apenas subgrafos induzidos e portanto, quando nos referimos a subgrafo estaremos assumindo implicitamente que são subgrafos induzidos.

Um *caminho* em um grafo G é uma sequência finita de vértices e arestas da forma $(v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, a_{k-1}, v_k)$, em que toda aresta a_i tem v_i e v_{i+1} como extremos e cada v_i distinto.

Um *ciclo* em um grafo é um caminho fechado sem vértices repetidos. Mais precisamente, um ciclo é um caminho $(v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, a_{k-1}, v_k)$ com $k > 1$ onde $v_k = v_0$ mas $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ são distintos dois a dois.

Um grafo G é dito *cíclico* quando G contém um ciclo como subgrafo induzido. Caso contrário, dizemos que G é acíclico.

Um conjunto S é *maximal* (*minimal*) em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P , e todo conjunto S' que contém propriamente S (que está contido propriamente em S) não satisfaz P .

Definimos a *união disjunta* de $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, às vezes referida simplesmente como *união*, como sendo o grafo $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k = \{(V(G), E(G)) \mid V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i \text{ e } E(G) = \bigcup_{i=1}^k E_i\}$.

Da mesma forma, definimos a operação *join* de $G_1 + G_2 + \dots + G_k$ como sendo o grafo $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k = \{(V(G), E(G)) \mid V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i \text{ e } E(G) = \bigcup_{i=1}^k E_i \cup \{xy \mid x \in V_i \text{ e } y \in V_j, i \neq j\}\}$.

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices.

Um conjunto de vértices C de um grafo G é uma *clique* se $G[C]$ é um grafo completo. Denotamos por $\omega(G)$ o *número clique* de G , isto é, o tamanho da clique máxima de G :

$$\omega(G) = \max\{|V'| \mid \text{tal que } V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é uma clique de } G\}$$

Um conjunto de vértices S de um grafo G é um *conjunto estável* se $G[S]$ é um grafo sem arestas. Definimos por $\alpha(G)$ o tamanho do *conjunto estável máximo*, isto é:

$$\alpha(G) = \max\{|V'| \mid \text{tal que } V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é um conjunto estável de } G\}$$

Uma *coloração* de um grafo G é uma partição de $V(G)$ onde cada classe da partição é um conjunto estável. Uma k -*coloração* é uma partição de $V(G)$ em k classes. O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual existe uma k -coloração de G . Neste caso, dizemos que o grafo G é k -*cromático* ou k -*colorível*.

Um grafo G é *conexo* se para todo par de vértices distintos v e w de G existe um caminho de v a w . Caso contrário, G é dito *desconexo*. Um *componente conexo* de G é um subgrafo maximal conexo de G .

Sejam $v, w \in V(G)$. A *distância* entre v e w em G , denotada por $d_G(v, w)$, é o comprimento do menor caminho entre v e w em G .

A *excentricidade* de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $ex_G(v)$, é o valor:

$$ex_G(v) = \max_{w \in V(G)} d_G(v, w)$$

O *diâmetro* de um grafo é o valor $\max_{v \in V(G)} ex_G(v)$.

Uma *árvore* T é um grafo acíclico e conexo. Uma árvore T é denominada enraizada quando algum vértice $v \in V(T)$ é escolhido como especial. Este vértice é então chamado de *raiz da árvore*.

Sejam v, w dois vértices de uma árvore enraizada T de raiz R . Se v pertence ao caminho de R a w em T , então denominamos v ancestral de w e w descendente de v . Em particular, se $(v, w) \in E(T)$ então v é pai de w , denotado por $pai(w)$, sendo w o filho de v , denotado por $filho(v)$. Sejam z o pai de v e v o pai de w , denominamos z o avô de w , denotado por $avô(w)$. Dois vértices que possuem o mesmo pai são chamados de *irmãos*. A raiz R de uma árvore não possui pai, enquanto que todo vértice $v \neq R$ possui um único pai. Uma *folha* é um vértice que não possui filhos. Denomina-se *nível* de um vértice v de uma árvore a distância da raiz R a v .

Uma *floresta* F é um grafo acíclico.

O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} , é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices são adjacentes em \overline{G} se e somente se são não-adjacentes em G .

Um *kernel* de um grafo é um conjunto independente maximal. Observe $S \subseteq V$ é um kernel se e somente se S é uma clique maximal em \overline{G} .

Dizemos que uma classe de grafos C é *hereditária* se todo subgrafo induzido de um grafo em C também pertence a C .

Um grafo G é dito *bipartido* quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1, V_2 , tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2 , isto é, podemos particionar $V(G)$ em dois conjuntos estáveis. Um grafo é dito *bipartido completo* se é bipartido e possui uma aresta para cada par de vértices v_1, v_2 , sendo $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Denotamos por $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo, onde $|V_1| = n$ e $|V_2| = m$. Um grafo é k -partido quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos estáveis. Um grafo é *split* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto estável e uma clique.

Uma *cobertura k* de um grafo G é um subconjunto de vértices que é incidente a todas as arestas.

2.2 Teoria da Complexidade

Uma área da Ciência da Computação que teve um grande e rápido crescimento nos últimos 25 anos é o campo de *Algoritmos e Teoria da Complexidade*, em particular, o desenvolvimento e análise de algoritmos computacionais. O objetivo de pesquisa nesta área é o de estudar a natureza dos problemas que podem ser resolvidos através de um computador digital, para fornecer soluções para problemas resolvíveis, assim como classificá-los em categorias dependendo do seu grau de dificuldade ou intratabilidade.

Formalmente, um problema algorítmico π consiste em um conjunto D de todas as possíveis entradas para o problema, chamado *conjunto de instâncias*, e de uma *questão* Q sobre estas instâncias. Resolver um problema algorítmico é desenvolver um algoritmo cuja entrada é uma instância do problema e cuja saída é uma resposta à questão do problema.

Um problema é dito de *decisão* quando a questão exige uma resposta do tipo SIM ou NÃO. Como exemplo, seja π o seguinte problema: “Dado um grafo G , reconhecer se G pertence a uma determinada classe C de grafos.” O conjunto de instâncias de π é obviamente o conjunto de todos os grafos. O problema π pode ser assim esquematizado:

Instância genérica de π : um grafo G .

Questão: G pertence à classe C ?

Fica evidente que o problema π acima é um problema de decisão, em particular, um *problema de reconhecimento*. Resolver π significa elaborar um algoritmo de reconhecimento de grafos pertencentes à classe C .

Dizemos que um algoritmo é *polinomial* quando sua complexidade de tempo (medida

do número de passos que o algoritmo efetua) é uma função polinomial no tamanho da sua entrada. Os problemas de decisão para os quais existem algoritmos polinomiais constituem a classe P. Tais problemas são chamados *polinomiais*.

Um problema de decisão é *não-determinístico polinomial* quando qualquer instância que produz resposta SIM possui um *certificado* sucinto, isto é, uma comprovação de que a resposta SIM é de fato verificável em tempo polinomial no tamanho da instância. Esta classe de problemas de decisão é a classe *NP*.

A classe *Co-NP* é formada pelos problemas que possuem um certificado sucinto para as instâncias que produzem resposta NÃO.

Sejam $\pi_1(D_1, Q_1)$ e $\pi_2(D_2, Q_2)$ dois problemas de decisão. Uma *transformação* ou *redução polinomial* de π_1 em π_2 é uma função $f : D_1 \rightarrow D_2$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. f pode ser calculada em tempo polinomial;
2. para toda instância $I \in D_1$, tem-se que I produz resposta SIM para π_1 se e somente se $f(I)$ produz resposta SIM para π_2 .

Um problema de decisão π pertence à classe *NP-completo* quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\pi \in NP$;
2. para todo problema $\pi' \in NP$ existe uma transformação polinomial de π' em π .

Um problema pertencente à classe NP-completo é chamado NP-completo. Para provar que um certo problema π é NP-completo, basta mostrar que $\pi \in NP$ e que existe uma transformação de um problema NP-completo π' em π .

Analogamente, prova-se que um problema de decisão π pertence à classe *Co-NP-completo* (e, neste caso, π é dito Co-NP-completo) quando $\pi \in Co-NP$ e existe um problema π' (Co-)NP-completo tal que:

1. se π' é NP-completo, existe uma função f que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância I' de π' , tem-se que I' produz SIM para π' se e somente se $I = f(I')$ produz NÃO para π ;

2. se π' é Co-NP-completo, existe uma função f que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância I' de π' , tem-se que I' produz NÃO para π' se e somente se $I = f(I')$ produz NÃO para π .

Como fonte de referência para esta seção, indicamos [15, 26].

2.3 Algumas classes especiais de grafos

Grafos em geral, podem ser classificados em relação a certas características presentes em sua estrutura; definindo assim as classes de grafos.

A seguir, apresentamos algumas classes especiais e bastante estudadas na teoria dos grafos.

2.3.1 Grafos Perfeitos

Na teoria de grafos, um *grafo perfeito* é um grafo em que o número cromático de todo subgrafo induzido é igual ao seu número clique denotado por $\omega(G)$.

Em qualquer grafo, o número clique fornece um limite inferior para o número cromático, já que todos os vértices numa clique devem estar associados a uma cor distinta em qualquer coloração própria. Os grafos perfeitos são aqueles para os quais o limite inferior é “justo”, não apenas no grafo mas também em todos os seus subgrafos induzidos. Para grafos mais gerais, o número cromático e o número clique podem ser diferentes; por exemplo, um ciclo de tamanho 5 requer 3 cores em qualquer coloração mínima própria, mas sua maior clique tem tamanho 2.

Grafos perfeitos incluem muitas subfamílias de grafos perfeitos, e servem para unificar resultados relacionados à coloração e cliques nessas famílias. Por exemplo, em todos os grafos perfeitos, o problema de coloração de grafos, problema da clique máxima e o problema do conjunto estável máximo podem ser todos resolvidos em tempo polinomial [17] (Grötschel, Lovász e Schrijver, 1988).

Mais formalmente, dizemos que um grafo G é *perfeito* se satisfaz às seguintes propriedades para todo subgrafo induzido G' de G :

$$\omega(G') = \chi(G') \tag{2.1}$$

e

$$\alpha(G') = \theta(G') \quad (2.2)$$

É claro, por dualidade que o grafo G satisfaz a Equação 2.1 se e somente se seu complemento \overline{G} satisfaz a equação 2.2. Dizemos que um grafo é χ -perfeito se satisfaz a equação 2.1 e α -perfeito se satisfaz a equação 2.2.

A noção de grafos perfeitos foi introduzida por Berge em 1960 quando ele conjecturou que um grafo é perfeito se e somente se não contém, como subgrafo induzido, ciclo ímpar de tamanho maior ou igual a cinco ou seu complemento. Essa conjectura ficou conhecida como *Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos*. Finalmente, essa conjectura foi provada no ano de 2002 por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [7]; resultando no *Teorema Forte dos Grafos Perfeitos*.

Existem diversas famílias bem conhecidas de grafos perfeitos. Podemos citar como exemplo a classe dos grafos cordais e cografos, que serão estudados nesse trabalho, além dessas a classe dos grafos bipartidos, grafos de intervalo, grafos de comparabilidade, grafos split, dentre outros.

2.3.2 Grafos Cordais

Um grafo G é chamado *cordal* (também conhecido na literatura como grafo triangularizado ou grafo de eliminação perfeita) se todo ciclo de tamanho estritamente maior que três possui uma corda. Equivalentemente, G não contém um subgrafo induzido isomorfo a C_n para $n > 3$.

A classe dos grafos cordais é bastante estudada além de ter sido uma das primeiras a ser reconhecida como pertencente à classe dos grafos perfeitos. Vejamos alguns conceitos e propriedades desta família.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo, com $n = |V|$, e $v \in V$ um vértice qualquer de G . Dizemos que v é simplicial quando $N(v)$ é uma clique em G (isto é, o subgrafo $G[N(v)]$ de G induzido por $N(v)$ é um grafo completo). No grafo da Figura 2.1, por exemplo, os vértices b e e são simpliciais.

Um esquema de eliminação perfeita (EEP) de G , denotado por $\sigma(G)$, é uma ordenação dos vértices de G tal que, para cada vértice v , sua vizinhança $N(v)$ que ocorre depois de v na ordenação, forma uma clique. Um EEP pode ser melhor visualizado se percebermos

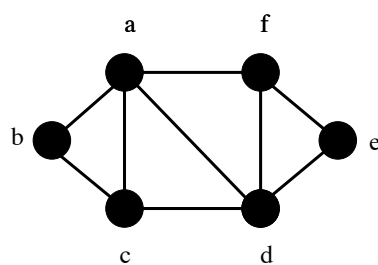


Figura 2.1: Um grafo cordal.

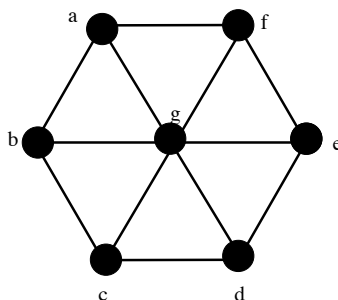


Figura 2.2: Um grafo não cordal.

que sua definição induz a dispor os vértices em uma seqüência

$$\sigma(G) = [\sigma(1), \dots, \sigma(n)], \quad (2.3)$$

de maneira que todo vértice seja simplicial no subgrafo de G induzido por ele e pelos que o seguem na seqüência σ . Assim, dada uma posição i na seqüência, $\sigma(i)$ denota o vértice que a ocupa e a inversa $\sigma^{-1}(v)$ corresponde a posição ocupada pelo vértice v .

Pela definição, é fácil determinar um EEP para um dado grafo. Inicia-se com uma seqüência vazia de vértices, que conterà um EEP ao final do processo. A cada passo, um vértice simplicial é escolhido, acrescentado à seqüência e excluído do grafo. Para o grafo da Figura 2.1, um possível EEP é a seqüência $[b, c, a, d, e, f]$.

Observe que no grafo da Figura 2.2 não existe vértice simplicial, portanto não é possível formar um EEP.

Como exemplo de grafo cordal temos o grafo da Figura 2.1. Um exemplo de grafo não cordal aparece na Figura 2.2; basta observar que o ciclo $[a, b, c, d, e, f]$, de comprimento 6, não tem corda.

A cordalidade equivale à existência de um EEP, conforme estabelecido no Teorema 2.

Teorema 2 ([16]) *Seja G um grafo. G é cordal se, e somente se, G tem um esquema de eliminação perfeita, que pode iniciar-se com qualquer vértice simplicial.*

Os algoritmos de reconhecimento de grafos cordais mais conhecidos e mais eficientes baseiam-se no Teorema 2 e constam de dois passos. Primeiramente, um percurso especial (por vizinhança máxima ou em largura lexicográfica, por exemplo) determina uma seqüência de vértices; em seguida, verifica-se se esta seqüência é um EEP. Esses dois passos podem ser implementados em algoritmos de complexidade linear em tempo e espaço. Se o grafo fornecido como entrada for sabidamente cordal, a seqüência de vértices produzida por este percurso constitui um esquema de eliminação perfeita para ele.

2.3.3 Cografos

Os cografos surgiram em diversas áreas da Matemática, sendo objeto de pesquisa de vários cientistas independentemente. Esta independência fez com que vários sinônimos para o termo cografo surgissem, dentre os quais podemos citar: grafos D^* , grafos sem P4, grafos HD, e grafos redutíveis por complemento.

Na década de 70, H. Lerchs introduziu o termo cografo, tal como conhecemos hoje. H. Lerchs estudou suas propriedades estruturais e algorítmicas, definindo assim a classe dos cografos [10]. Como uma extensão deste estudo, L. Stewart [25] desenvolveu um algoritmo com complexidade $O(n^2)$ para reconhecer tal classe. Posteriormente, um algoritmo mais eficiente, com complexidade linear, foi introduzido por Corneil *et al.* [10]. Outros algoritmos para reconhecer cografos com complexidade linear são conhecidos [19], [5].

Um cografo pode ser obtido a partir de um conjunto de grafos triviais, através de um número finito de operações de união e *join*. Ele pode ser representado de forma única por uma árvore especial, que recebe o nome de co-árvore. Considerando-se tal representação, obtêm-se diversas propriedades e características de um cografo, o que auxilia na solução de problemas considerados muito difíceis em outras classes de grafos.

2.3.3.1 Propriedades Estruturais

Definição 1 *Os cografos são definidos recursivamente [8] através da seguinte definição formal:*

- (i) O grafo trivial é um cografo, isto é, o K_1 é um cografo;
- (ii) Se G_1, \dots, G_k são cografos, então a união $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ também é cografo;
- (iii) Se G é cografo, então \overline{G} também é cografo.

Um resultado de suma importância, provado em [22], afirma que os cografos podem ser representados por uma árvore de decomposição única. Esta representação é a chave para o reconhecimento linear dos cografos [10].

2.3.3.2 Decomposição Modular

A decomposição modular facilita a resolução de diversos problemas em certas classes de grafos, e algoritmos para encontrá-la tem uma vasta história [23].

Definição 2 [1] *Um módulo de um grafo G é um subconjunto M de vértices de $V(G)$ tal que cada vértice de $V(G) \setminus M$ ou é adjacente a todo vértice de M ou a nenhum vértice de M .*

Definição 3 *Um módulo M é dito trivial se $|M| = 1$ ou $M = V(G)$.*

Definição 4 *Um grafo G é dito primal (ou primo) se G possui apenas módulos triviais.*

A decomposição modular é um processo para decompor um grafo. Em cada etapa, o subgrafo que está sendo decomposto é um módulo do grafo original. Cada um destes subgrafos é decomposto recursivamente. O processo continua até que todos os subgrafos que estão sendo decompostos contenham um único vértice.

Através da decomposição modular de um grafo G é possível construir uma árvore correspondente a G cuja estrutura é de grande importância para algumas aplicações. Dentre estas aplicações, citamos a construção de algoritmos eficientes para reconhecer diversas classes de grafos.

A decomposição modular de um grafo G particiona $V(G)$ em módulos, os quais podem ser classificados em *paralelo*, *serial* e *vizinhança*. Tal classificação é feita de acordo com a conectividade de G e \overline{G} .

A decomposição modular de um grafo não trivial G é usado recursivamente para definir a árvore de decomposição modular única. O módulo M é paralelo se $G[M]$ é desconexo, M é serial se $\overline{G[M]}$ é desconexo e M é vizinhança se $G[M]$ e $\overline{G[M]}$ são ambos conexos.

Árvore de decomposição

De acordo com o citado acima, a árvore de decomposição possui os módulos paralelo, serial e vizinhança. Os vértices do grafo G correspondem às folhas da árvore de decomposição. Cada módulo M de G está associado a um nó da árvore, cujas folhas descendentes de M correspondem aos vértices pertencentes ao módulo M .

No decorrer desta dissertação estaremos interessados em um caso particular de decomposição modular: o caso em que a árvore contém somente os módulos paralelo e serial. Vejamos na figura 2.3 uma representação de um grafo G (cografo), onde sua decomposição modular possui apenas os módulos paralelo e serial.

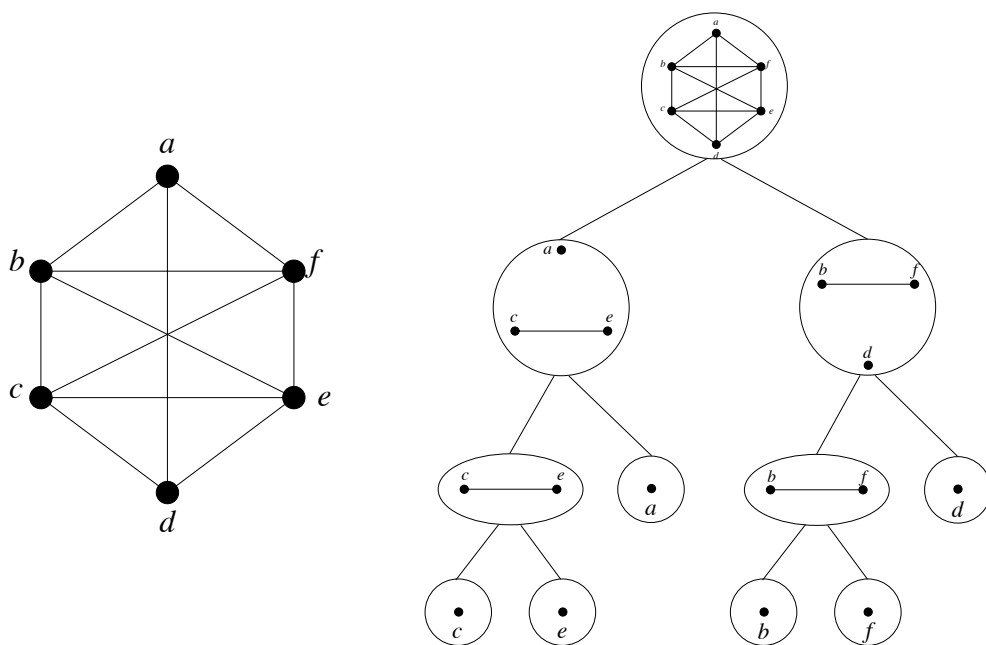


Figura 2.3: Cografo G e sua respectiva árvore de decomposição modular

2.3.3.3 Co-árvore

Definimos a *co-árvore* T de um cografo G como sendo a árvore de decomposição modular que contém apenas os módulos serial e paralelo.

O teorema dado a seguir caracteriza os cografos através de sua árvore de decomposição.

Teorema 3 [9] *Dado um grafo G , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. G é cografo;
2. G não contém um P_4 como subgrafo;
3. O complemento de todo subgrafo conexo não trivial de G é desconexo.

Dado um cografo G e sua respectiva co-árvore T , a seguinte propriedade é facilmente verificada a partir da definição de co-árvore.

Propriedade 1 *Dois vértices x e y de G são adjacentes (não-adjacentes) se e somente se o menor ancestral comum a x e a y for serial (paralelo).*

Outra propriedade importante dos cografos é:

Lema 1 *Todo subgrafo de um cografo é um cografo.*

Vale lembrar que o termo subgrafo empregado em todo texto possui o mesmo sentido que subgrafo induzido.

2.3.3.4 Caracterização de cografos

Dadas as diversas classes de grafos com suas propriedades estruturais particulares, é importante determinar se um grafo pertence ou não à uma certa classe. Para isto, busca-se identificar características e propriedades que sejam exclusivas da classe. A classe dos cografos possui uma estrutura própria e muito forte, o que permite uma fácil identificação.

A seguir, algumas definições que serão necessárias no decorrer desta seção.

Definição 5 *Um grafo G é um grafo dacey quando para toda clique maximal C de G e para todo par de vértices distintos u e v tal que $C \subseteq N(u)$ temos que $(u, v) \in E(G)$.*

Definição 6 Um grafo G é dacey hereditário (DH) se e somente se para todo subgrafo $G' \subseteq G$, G' é um grafo dacey.

Definição 7 Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que G tem a propriedade clique-kernel se para toda clique maximal C de G e para todo kernel K de G , $|C \cap K| = 1$.

O teorema a seguir, apresentado por Corneil, Lerchs e Burlingham [9], estabelece a equivalência entre sete diferentes caracterizações de cografos.

Teorema 4 [9] Dado um grafo G , as seguintes afirmações são equivalentes:

1. G é um cografo;
2. Todo subgrafo não trivial de G possui pelo menos um par de gêmeos;
3. Todo subgrafo de G tem a propriedade clique-kernel;
4. G não contém um P_4 como subgrafo;
5. O complemento de todo subgrafo conexo não trivial de G é desconexo;
6. G é um grafo DH;
7. Todo subgrafo conexo de G tem diâmetro menor ou igual a dois.

Observação 1 Se G é um cografo então G é um grafo perfeito.

De fato, todo cografo G é perfeito, pois G e seu complemento, \overline{G} , não possuem P_4 , logo não possuem ciclo ímpar induzido de tamanho maior ou igual a cinco.

2.3.4 Grafos *Threshold*

Nesta seção apresentamos brevemente os grafos *threshold*. Os grafos *threshold* foram introduzidos por Chvátal e Hammer [20] e foram definidos como aqueles grafos cujos subconjuntos estáveis podem ser distinguidos através de uma única desigualdade linear. A seguir, veja uma definição mais formal deste fato.

Seja $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o conjunto de vértices de um grafo G . Qualquer subconjunto $X \subseteq V$ pode ser representado por seu vetor característico $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde para todo i

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \in X, \\ 0 & \text{se } v_i \notin X. \end{cases}$$

Logo, os subconjuntos de vértices estão numa correspondência biunívoca com os vértices de um hipercubo unitário no R^n de acordo com as coordenadas de seus vetores característicos.

Considere a coleção de todos os subconjuntos de G . Temos a seguinte questão: existe um hiperplano que divida o n -espaço ao meio de tal forma que em um dos lados todos os vértices do hipercubo correspondem aos conjuntos estáveis de G e do outro correspondem a conjuntos não estáveis? Ou equivalentemente, é possível distinguir quais subconjuntos de V são conjuntos estáveis usando uma única desigualdade linear? Se a resposta for afirmativa, então o grafo em questão é um *grafo threshold*.

Assim, um grafo $G = (V, E)$ é *threshold* se existe uma atribuição *threshold* $[\alpha, t]$ consistindo de um rótulo (inteiro e não negativo) α aos vértices e um inteiro *threshold* t tais que:

(i) S é um conjunto independente se e somente $\alpha(v_1) + \alpha(v_2) + \dots + \alpha(v_p) \leq t$, onde $v_i \in S$, $1 \leq i \leq p$, e $S \subseteq V$.

Um exemplo de grafo *threshold* é o grafo estrela. Observe que um grafo estrela $K_{1,n}$, com vértice interno v e vértices externos v_1, v_2, \dots, v_n , é facilmente reconhecido como um grafo *threshold* atribuindo $\alpha(v) = n$, $\alpha(v_i) = 1$, para $i = 1, \dots, n$ e $t = n$.

Considere o grafo estrela $K_{1,6}$ da Figura 2.4.

Assim, temos a seguinte desigualdade que distingue os conjuntos estáveis dos não estáveis:

$$6v + v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 \leq 6.$$

De fato, os únicos subconjuntos estáveis possíveis são da seguinte forma:

$S = v$, i.e., aquele formado pelo vértice interno v ;

ou

$S = \{\text{qualquer subconjunto dos vértices externos}\}$.

Grafos *threshold* podem ser reconhecidos em tempo linear. Além disso, possuem uma caracterização por subgrafos proibidos, dado pelo seguinte teorema [20]:

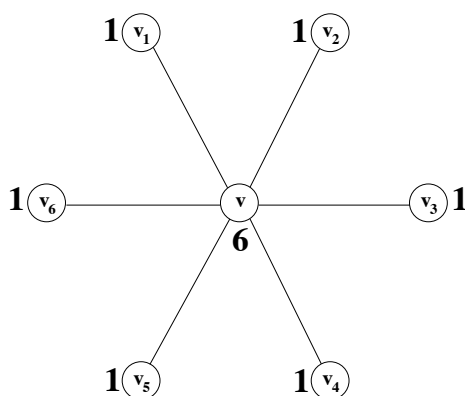


Figura 2.4: Grafo estrela $K_{1,6}$ e uma atribuição *threshold* com $t = 6$.

Teorema 5 *Um grafo é threshold se e somente se não possui subgrafo induzido isomorfo a $2K_2$, C_4 ou P_4 .*

O teorema acima nos permite concluir que grafos *threshold* correspondem a um caso especial dos cografos e grafos *split*. Todo grafo que é, cografo e *split* é um grafo *threshold*.

Capítulo 3

Problemas de Partição em Grafos

Um problema combinatório que vem sendo bastante estudado é o problema da partição em grafos, que consiste em verificar se o conjunto de vértices de um dado grafo G pode ser particionado em subconjuntos V_1, \dots, V_k , com cada um deles satisfazendo certas propriedades. Pode-se, por exemplo, exigir que cada subconjunto V_i seja uma clique ou conjunto independente (restrições internas); ou ainda, exigir propriedades entre cada par de subconjuntos (restrições externas); por exemplo, que os pares V_i, V_j sejam completamente adjacentes (ou não adjacentes), isto é, cada vértice v_i , do subconjunto V_i , é adjacente (ou não adjacente) a todos os vértices v_j do conjunto V_j .

Neste capítulo consideramos as partições (F,C), (F,S), (TF,C) e (TF,S).

Uma partição (F,C) de um grafo G é uma partição do conjunto de vértices de G em dois subconjuntos não vazios F e C tais que F induz uma floresta, ou equivalentemente um grafo acíclico e C uma clique. Grafos que podem ser assim particionados são chamados grafos-(F,C), ou simplesmente (F,C). Da mesma forma, dizemos que G é um grafo-(F,S) ou simplesmente (F,S) se seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma floresta F e em um conjunto estável S . Neste caso, tal partição é chamada de partição-(F,S) de G . Além disso, definimos os grafos que podem ser particionados em um subgrafo que não possui ciclos de tamanho igual a três, isto é, livre de triângulo, e numa clique (ou um conjunto estável). Tais grafos são denominados grafos-(TF,C) (grafos-(TF,S)).

As Tabelas a seguir apresentam o estado-da-arte destes problemas (Os resultados em azul correspondem às contribuições desta dissertação). As Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam os resultados em relação à caracterização e reconhecimento das classes (F,C) e (TF,C) para grafos gerais e quando restritas às classes de grafos perfeitos, grafos cordais e cografos.

Da mesma forma, as Tabelas 3.3 e 3.4 apresentam os resultados em relação à caracte-

Reconhecimento (Grafos Gerais)	
Partições-(F,C)	Polinomial
Partições-(TF,C)	Polinomial [29]

Tabela 3.1: Reconhecimento de grafos (F,C) e (TF,C)

Caracterização		
	Partição-(F,C)	Partição-(TF,C)
Grafos Gerais	?	350 subgrafos minimais proibidos [29]
Cografos	Caracterização por subgrafos proibidos	Caracterização por subgrafos proibidos [24]
Cordais	G cordal é (F,C) $\Leftrightarrow G$ é (2,1)	G cordal é (TF,C) $\Leftrightarrow G$ é (2,1)
Perfeitos	Polinomial	G perfeito é (TF,C) $\Leftrightarrow G$ é (2,1)

Tabela 3.2: Caracterização de grafos (F,C) e (TF,C)

rização e reconhecimento das classes (F,S) e (TF,S) para grafos gerais e quando restritas às classes de grafos perfeitos, grafos cordais e cografos.

Reconhecimento (Grafos Gerais)	
Partições-(F,S)	Polinomial para grafos com grau ≤ 3 e NP-completo para grafos com grau ≤ 4 ou diâmetro 4 [29]
Partições-(TF,S)	NP-completo para grafos com grau ≤ 4 e polinomial para grafos com grau ≤ 3 [29]

Tabela 3.3: Reconhecimento de grafos (F,S) e (TF,S)

3.1 Grafos-(F,C) e Grafos-(TF,C)

3.1.1 Grafos-(F,C)

Uma *partição floresta-clique* ou partição-(F,C) de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em dois subconjuntos F e C tal que F induz uma floresta ou equivalentemente um grafo acíclico e C induz uma clique. Nesse caso, C pode ser visto como um transversal de ciclo (um subconjunto de vértices que intersecta em aresta todos os ciclos do grafo, com a propriedade adicional de ser completo). Grafos que admitem uma partição floresta-clique são chamados *grafos-(F,C)*.

Caracterização		
	Partição-(F,S)	Partição-(TF,S)
Grafos Gerais	?	Família infinita de grafos minimais não (TF,S) (<i>trabalhos futuros</i>)
Cografos	Caracterização por subgrafos proibidos	$G \text{ é (TF,S)} \Leftrightarrow G \supseteq K_4$
Cordais	$G \text{ cordal é (F,S)} \Leftrightarrow G \text{ é (0,3)}$	$G \text{ cordal é (TF,S)} \Leftrightarrow G \supseteq (2,1)$
Perfeitos	NP-completo para grafos com grau máximo 4	$G \text{ perfeito é (TF,S)} \Leftrightarrow G \supseteq K_4$

Tabela 3.4: Caracterização de grafos (F,S) e (TF,S)

No estudo dessa nova partição provamos a polinomialidade do reconhecimento de tais grafos para grafos gerais. Definimos também uma caracterização por subgrafos proibidos quando nos restringimos às classes de grafos cordais e cografos.

Nas definições dadas acima, é importante ressaltar que a clique não é necessariamente maximal.

Uma partição floresta-clique pode ser vista no contexto de partições esparso-denso gerais [13]. Sejam S e D duas classes de grafos, chamadas esparso e denso, respectivamente, satisfazendo as seguintes restrições:

1. Ambas S e D são fechadas por inclusão.
2. Existe uma constante c tal que a interseção $S \cap D$ tem no máximo c vértices, para qualquer $S \in S$ e $D \in D$.

Uma partição esparso-denso de um grafo G , em relação às classes S e D , é uma partição de $V(G)$ em duas partes $V(G) = S \cup D$, tal que $S \in S$ (S é esparso) e $D \in D$ (D é denso). No caso dos grafos-(F,C), ‘esparso’ significa ‘acíclico’ e ‘denso’ significa ‘completo’, e temos $c = 2$.

Informalmente, um grafo com relativamente poucas arestas pode ser classificado como ‘esparso’, e um grafo com muitas arestas como ‘denso’. Alguns autores empregam o seguinte critério: um grafo G é esparso se $|E(G)| = O(|V(G)|)$, e denso se $|E(G)| = O(|V(G)|^2)$. Alguns exemplos conhecidos de grafos que admitem partições esparso-denso são: grafos- (k, ℓ) [2], que admitem partições em k conjuntos estáveis e ℓ conjuntos completos (seja $c = k\ell$); grafos split [16], que correspondem precisamente aos grafos-(1,1);

grafos que admitem partições em um subgrafo induzido com número clique no máximo a e um subgrafo induzido com número de estabilidade no máximo b (nesse caso, c pode ser calculado a partir do número Ramsey $R(a + 1, b + 1)$) [13]; e grafos que admitem partições planar-clique (seja $c = 4$).

O reconhecimento de grafos gerais (F,C) pode ser feito em tempo polinomial. A seguir apresentamos um algoritmo que utiliza o reconhecimento de grafos (2,1), para reconhecer em tempo polinomial grafos (F,C).

Algoritmo 1 Reconhecimento polinomial de grafos-(F,C)

Entrada: Grafo G

se G é (2,1) **então**

para todo clique C de uma partição (2,1) **faça**

 se $G - C$ é acíclico **então**

 Retorne “ G é (F,C)”

senão

 Retorne “ G não é (F,C)”

fim se

fim para

fim se

A correctude do algoritmo segue da Obesrvaçao 1 e do Teorema 5. A Observação 1 baseia-se no fato que, se não é possível encontrar uma clique que seja transversal de ciclos ímpares, ou seja, uma clique C que ao ser removida de um grafo G , $G - C$ forma dois conjuntos independentes (conjunto bipartido), então também não é possível encontrar em G uma clique, tal que $G - C$ é uma floresta, ou seja, não possui ciclos.

Obervação 2 *Se G não puder ser particionado em dois conjuntos independentes e uma clique, então G também não pode ser particionado em uma floresta e uma clique.*

Na maioria dos exemplos dados de partições esparso-denso, as classes S e D são reconhecidas em tempo polinomial. Acontece que, no caso da partição-(2,1), a existência de uma partição esparso-denso pode ser feita em tempo polinomial. Então, de fato, em tal caso todas as partições esparso-denso podem ser encontradas em tempo polinomial.

Teorema 6 [13] *Sejam S e D , classes de grafos esparsos e densos, respectivamente. Um grafo com n vértices tem no máximo n^{2c} diferentes partições esparso-denso. Dessa forma, todas essas partições podem ser encontradas em tempo proporcional a $n^{2c+2}T(n)$, onde $T(n)$ é o tempo de reconhecimento de grafos esparso e denso.*

3.1.2 Cografos-(F,C)

No que segue, apresentamos uma caracterização simples que fornece uma descrição estrutural completa e uma caracterização por subgrafos proibidos dos cografos que podem ser particionados em uma clique e uma floresta, cografos-(F,C).

3.1.2.1 Caracterização Cografos-(F,C)

A seguir apresentamos uma caracterização estrutural dos cografos-(F,C).

Seja $G = (V, E)$ um cografo do qual o conjunto de vértices V possui uma partição $V = F \cup C$ tal que F induz uma floresta em G e C é uma clique em G . Denote por (F, C) a classe dos cografos que possuem tal partição. É conhecido que G é um cografo se e somente se é livre de P_4 .

As seguintes afirmações são triviais. Algumas delas são apresentadas sem prova.

Afirmção 1 *Uma floresta livre de P_4 é uma união disjunta de estrelas.*

Observe que numa floresta G livre de P_4 cada componente conexa G_i é uma árvore cujo o comprimento do maior caminho tem tamanho 2. Portanto, cada G_i é um subgrafo isomorfo a um dos grafos da Figura 3.1. E portanto, uma união disjunta de estrelas.

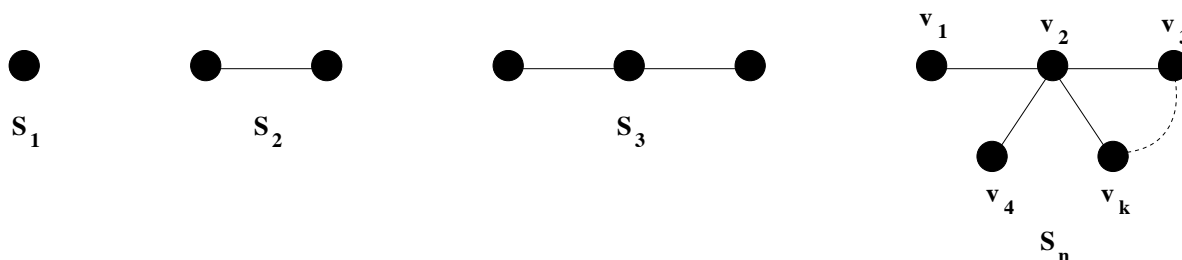


Figura 3.1: Afirmção 1 (floresta livre de P_4)

Afirmção 2 *Se u é um vértice universal em G então $G \in (F, C)$ se e somente se $G - u \in (F, C)$.*

Um vértice v é parcial para algum subgrafo H de G se v é adjacente a algum vértice de H mas não adjacente a todos, ou seja, v possui necessariamente uma adjacência em H e uma não adjacência em H . Em outras palavras, existem x e $y \in V(H)$ tal que $(v, x) \in E(H)$ e $(v, y) \notin E(H)$.

No que segue, considere G (F,C) com clique Q e floresta $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ para algumas estrelas S_i , $i \in 1, \dots, k$. Pela Afirmação 2, podemos assumir que nenhum vértice em G é universal, ou seja, todo vértice em Q é parcial para alguma estrela S_i . Pela Afirmação 1, podemos assumir que todas, exceto uma componente conexa de G são estrelas. No caso trivial, todas as componentes são estrelas. Se uma das componentes não é uma estrela então essa é uma componente não trivial. Consideramos agora a estrutura com uma componente, isto é, assumimos que G é conexo e não é uma estrela.

Afirmação 3 *Se $v \in Q$ é parcial para alguma S_i então v não é adjacente a nenhum vértice das outras S_j , $j \neq i$.*

Observe que se v for adjacente a algum vértice de outra estrela S_j , teríamos um P_4 em G . Veja Figura 3.2.

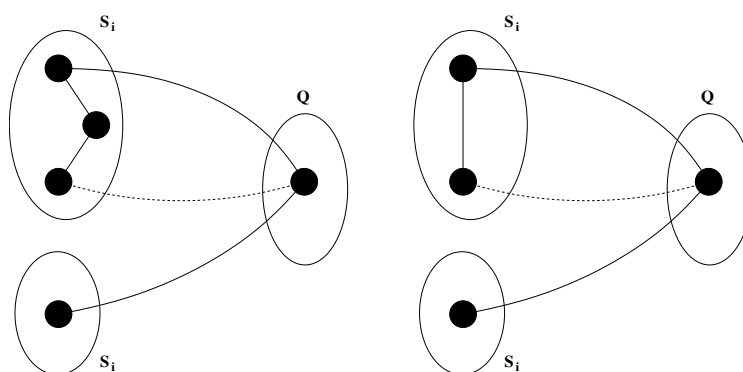


Figura 3.2: Afirmação 3 ($v \in Q$ é parcial para alguma $S_i \rightarrow v$ não é adjacente a nenhum vértice das outras S_j , $j \neq i$)

Afirmação 4 *Se $x \in Q$ é parcial para S_i e $y \in Q$ é parcial para S_j então $i = j$.*

Pela mesma observação anterior, G conteria um P_4 . Veja Figura 3.3.

Dessa forma, todos os vértices de Q são parciais para a mesma estrela, digamos S_1 , e não são adjacentes a nenhum vértice de outra estrela, ou seja, como G é conexo, $k = 1$ (temos uma única estrela). Assim, podemos assumir que G tem uma partição em uma clique Q e uma estrela S . Seja m o ponto interno da estrela, e seja $U = \{u_1, \dots, u_k\}$ os pontos externos da estrela. Particionamos Q em $Q_1 = \{x \in Q \mid (x, m) \in E(G)\}$ e $Q_2 = \{x \in Q \mid (x, m) \notin E(G)\}$.

Afirmação 5 *Se um vértice $x \in Q_2$ é adjacente a algum vértice em U então x é adjacente a todos eles (caso contrário, G conteria um P_4 induzido). Veja Figura 3.4.*

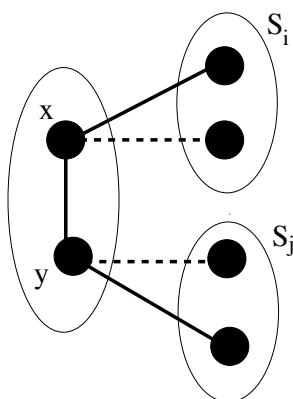


Figura 3.3: Afirmação 4 ($x \in Q$ é parcial para S_i e $y \in Q$ é parcial para $S_j \rightarrow i = j$)

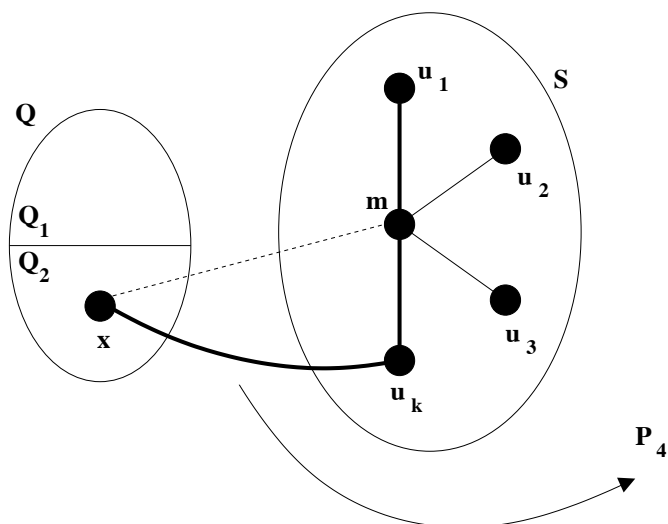


Figura 3.4: Afirmação 5 ($x \in Q_2$ é adjacente a algum vértice em $U \rightarrow x$ é adjacente a todos eles)

Portanto, Q_2 pode ser particionado em $Q_2 = Q'_2 \cup Q''_2$ com $Q'_2 = \{x \in Q_2 | x \text{ é adjacente a todos os vértices de } U\}$ e $Q''_2 = \{x \in Q_2 | x \text{ é não adjacente a todos os vértice de } U\}$. Assuma que $U \neq \emptyset$. (No caso em que $U = \emptyset$, G é um grafo Threshold (grafo limiar) com um vértice no conjunto independente). Se $Q'_2 \neq \emptyset$ e $Q''_2 \neq \emptyset$ então para $x \in Q'_2$, $y \in Q''_2$, e $u \in U$, então x, y, u, m induzem um P_4 em G . Assim obtemos a seguinte afirmação:

Afirmação 6 *Se $Q'_2 \neq \emptyset$ então $Q''_2 = \emptyset$.*

Temos dois casos possíveis:

Caso 1. $Q'_2 \neq \emptyset$. Neste caso G consiste de um grafo threshold $G[Q_1 \cup \{m\} \cup U]$ e uma clique Q'_2 cujos vértices são adjacentes a todos os vértices de $G[Q_1 \cup \{m\} \cup U]$ exceto um, isto é, vértices cujo grau é $n - 2$. Para identificar os vértices de Q'_2 , a condição de grau não é suficiente já que todos os vértices em Q_1 podem ter grau $n - 2$. Portanto, definimos a seguinte relação de equivalência (\prec) entre vértices de grau $n - 2$ (i.e. vértices com exatamente um não vizinho): $x \prec y$ se e somente se x e y possuem o mesmo não vizinho. Observe que existe uma única classe de tal equivalência em Q_1 já que G é cografo e, portanto, livre de P_4 . Logo, existem apenas duas classes de equivalência, e uma delas é Q'_2 que, se apagada, resulta num grafo threshold.

Caso 2. $Q'_2 = \emptyset$. Se $Q''_2 = \emptyset$ então G é um grafo threshold. Assim, suponha que $Q''_2 \neq \emptyset$. Seja $x \in Q''_2$, $y \in Q_1$, $u \in U$ tais que y é não adjacente a u (lembre-se que y é parcial para S). Então x, y, m, u induzem um P_4 em G e este caso não pode ocorrer.

Temos portanto o seguinte:

Teorema 7 *Seja G um cografo conexo sem vértice universal. Então $G = (V, E)$ com $|V| = n$ é um grafo (F,C) se e somente se G admite uma partição numa clique Q cujos vértices possuem grau $n - 2$ e um mesmo não vizinho m , e num grafo threshold $G[V \setminus Q]$ com m universal em $G[V \setminus Q]$.*

É fácil ver que esta propriedade pode ser testada em tempo linear e, portanto, cografos-(F,C) podem ser reconhecidos em tempos linear como segue:

1. Verifique se todas as componentes de G são estrelas, com exceção de no máximo uma. Em caso negativo, G não é (F,C). Em caso afirmativo, se todas as componentes de G são estrelas, então G é (F,C), caso contrário, considere a componente conexa de G que não é estrela (i.e, de agora em diante, assumimos que G é um grafo conexo que não é estrela)

2. Determine o conjunto U de todos os vértices universais em G e reduza G a $G' = G[V \setminus U]$. Como G é (F,C) se e somente se $G[V \setminus U]$ é (F,C). G é (F, C) se e somente se G' satisfaz as condições do Teorema 7.

Vale mencionar que o resultado anterior foi desenvolvido em conjunto com os professores Andreas Brandstädt, Fábio Protti, Loana Nogueira e Sulamita Klein e está sendo submetido à revista *Discrete Mathematics*.

A seguir apresentamos um outra caracterização de cografos-(F, C).

3.1.2.2 Caracterização Cografos-(F,C) por subgrafos proibidos

Nesta seção, uma caracterização de cografos-(F,C) por subgrafos proibidos é apresentada. Tal caracterização é obtida diretamente a partir de algumas observações em relação à decomposição modular dos cografos [9].

Teorema 8 [6] *Seja G um cografo. G é (F,C) se e somente se G não contém nenhum dos subgrafos mostrados na Figura 3.5 como um subgrafo induzido.*

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém qualquer um dos subgrafos na Figura 3.5 então G não é um cografo-(F, C).

(\Leftarrow) Seja G um cografo não-(F, C). Neste caso, G contém um subgrafo induzido G' não (F,C) que é minimal por vértices em relação à propriedade de ser (F,C), ou seja, para todo $v \in V(G')$, $G' - v$ é (F,C). Para simplificar, assuma sem perda de generalidade que $G' = G$. Devemos mostrar que G é um dos subgrafos na Figura 3.5. Procedemos considerando dois casos:

Caso 1: G é desconexo. Escreva $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i conexo. Pela minimalidade de G , cada G_i é (F,C). Além disso, G_i não é árvore, caso contrário $G' = G - G_i$ seria (F,C), e $G' \cup G_i$ também seria (F,C), uma contradição. Então, cada G_i deve conter um ciclo (C_3 ou C_4 , sendo que G é um cografo). Como G não é (F,C) e é minimal, então $G = G_1 \cup G_2$. Portanto, G é um dos subgrafos $C_3 \cup C_3$, $C_3 \cup C_4$, ou $C_4 \cup C_4$.

Caso 2: G é conexo. Pelas propriedades da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Como G é minimal, concluímos que

$k \geq 2$ e cada G_i desconexo. Assim, cada G_i contém um par de vértices não adjacentes. Se $k \geq 3$ então, por minimalidade de G , $G = I_2 + I_2 + I_2$. Resta analisar o caso onde $k = 2$. Consideramos três subcasos:

Caso 2.1: Ambos G_1 e G_2 contém I_3 . Então, por minimalidade de G , $G = I_3 + I_3$.

Caso 2.2: Ambos G_1 e G_2 não contém I_3 . Observe que, sobre essa suposição $\overline{G_1}$ e $\overline{G_2}$ são cografos livres de triângulos e, dessa forma, bipartidos; ou equivalentemente, G_1 é uma união disjunta de duas cliques assim como G_2 . Sejam C_h, C'_h duas cliques tais que $G_h = C_h \cup C'_h$ e $|C_h| \geq |C'_h|$ para $h = 1, 2$. Claramente, $|C'_h| \geq 2$ para algum $h \in 1, 2$, caso contrário G seria (F,C). Logo por minimalidade de G , $G = I_2 + 2K_2$.

Caso 2.3: G_1 contém um I_3 e G_2 não contém. Vamos mostrar que esse caso é impossível. Observe que sobre essas suposições $\overline{G_2}$ é novamente um cografo livre de triângulos, ou seja, G_2 é uma união disjunta de duas cliques C_2 e C'_2 . Assuma que $|C_2| \geq |C'_2|$. Se $|C'_2| \geq 2$ então $G = G_1 + G_2$ não é minimal, pois contém propriamente $I_2 + 2K_2$. Então, temos que $|C'_2| = 1$. Consideramos mais dois subcasos:

– G_1 é um grafo split. Então $V(G_1)$ pode ser particionado em um conjunto independente I_1 e uma clique C_1 . Portanto, G é (F,C), admitindo a partição floresta-clique $(I_1 \cup C'_2, C_1 \cup C_2)$. O que é impossível.

– G_1 não é um grafo split. Então G_1 contém um subgrafo H isomorfo a um $2K_2$ ou um C_4 . Seja a um vértice pertencente ao I_3 induzido mas não à $V(G)$. Então G não é minimal, já que $G - a$ contém propriamente um $I_2 + 2K_2$ (se $H = 2K_2$) ou um $I_2 + I_2 + I_2$ (se $H = C_4$). Novamente, isso é impossível.

A prova está completa.

■

3.1.2.3 Um algoritmo de tempo linear para reconhecimento de cografos-(F,C)

O algoritmo a seguir está baseado na prova do Teorema 8.

Algoritmo para reconhecimento de cografos-(F,C)

1. Sejam G_1, G_2, \dots, G_k os filhos de G na árvore de decomposição modular [9].
2. Se G é desconexo, então:

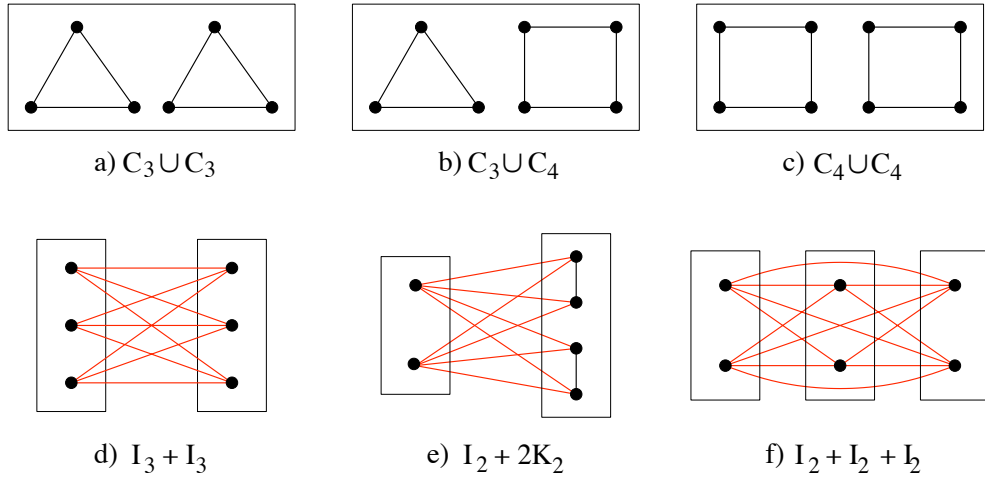


Figura 3.5: Subgrafos proibidos minimais.

- (a) Se todo filho de G é acíclico, retorne a partição floresta-clique $(V(G), \emptyset)$.
 - (b) Se existem dois filhos não acíclicos G_i, G_j ($i \neq j$) de G , considere B_h como sendo um ciclo de G_h , $h = i, j$, e retorne o subgrafo proibido $B_i \cup B_j$.
 - (c) Se existe um único filho não acíclico G_i de G , aplique recursivamente o algoritmo em G_i , e analise as duas situações adicionais abaixo:
 - i. Se G_i é (F,C) com partição floresta-clique (F_i, C_i) , retorne a partição floresta-clique $(V(G) \setminus C_i, C_i)$.
 - ii. Se G_i não é (F,C) com subgrafo proibido H_i , retorne H_i .
3. Se G é conexo, então:
- (a) Se todo filho de G é trivial, retorne a partição floresta-clique $(\emptyset, V(G))$.
 - (b) Se existem pelo menos três filhos de G que são desconexos, retorne o subgrafo proibido $I_2 + I_2 + I_2$.
 - (c) Se existem exatamente dois filhos G_i, G_j de G que são desconexos, então:
 - i. Se ambos G_i, G_j contém I_3 , retorne o subgrafo proibido $I_3 + I_3$.
 - ii. Se ambos G_i, G_j não contém I_3 , sejam C_h, C'_h as cliques tais que $G_h = C_h \cup C'_h$ e $|C_h| \geq |C'_h|$ para $h = i, j$. Se $|C'_h| < 2$ para $h \in i, j$ então retorne a partição floresta-clique $(C'_i \cup C'_j, C_i \cup C_j \cup D)$, onde $D = \bigcup_{t \neq i, j} V(G_t)$.
 - iii. Se exatamente um entre G_i e G_j contiver um I_3 , digamos G_i , sejam C_j, C'_j as cliques tais que $G_j = C_j \cup C'_j$ e $|C_j| \geq |C'_j|$. Se $|C'_j| \geq 2$, então retorne o subgrafo proibido $I_2 + 2K_2$, caso contrário verifique se G_i é um grafo split: se for, retorne a partição floresta-clique $(I_i \cup C'_j, C_i \cup C_j \cup D)$, onde $V(G_i)$ é particionado em um conjunto independente I_i e uma clique

C_i , e $D = \bigcup_{t \neq i,j} V(G_t)$; caso contrário, se G_i não é um grafo split, tome um subgrafo induzido H de G_i isomorfo a um $2K_2$ ou um C_4 , e retorne o subgrafo proibido $(I_2 + 2K_2)$ (se $H = 2K_2$) ou $I_2 + I_2 + I_2$ (se $H = C_4$).

(d) Se existe um único filho G_i de G que é desconexo, aplique recursivamente o algoritmo em G_i e analise as seguintes possibilidades adicionais:

- i. Se G_i é (F,C) com partição floresta-clique (F_i, C_i) , retorne a partição floresta-clique $(F_i, V(G) \setminus F_i)$.
- ii. Se G_i não é (F,C) com subgrafo proibido H_i , retorne H_i .

O teorema a seguir prova a corretude do algoritmo 3.1.2.3.

Teorema 9 *O algoritmo de reconhecimento de grafos-(F,C) está correto.*

Prova. A correção do algoritmo segue diretamente da prova do Teorema 8, mais as seguintes observações: nos itens 2.3 e 3.4 do algoritmo, G é (F,C) se e somente se G_i é (F,C). Dessa forma, a chamada recursiva está correta. ■

Teorema 10 *O algoritmo de reconhecimento para cografos-(F,C) é executado em tempo linear.*

Prova. O resultado segue trivialmente se a árvore de decomposição modular tem altura 0 ou 1. Assuma que a árvore de decomposição modular de G tem altura $h > 1$, e que o resultado é verdadeiro para árvores com altura menor que h . Seja $|V(G_i)| = n_i$ e $|E(G_i)| = m_i$. Analisaremos os itens separadamente: Item 1: O algoritmo de decomposição modular padrão leva tempo linear [9];

Item 2.1: verificar se cada G_i é acíclico leva tempo $O(n_i + m_i)$;

Item 2.2: encontrar os ciclos B_i, B_j leva tempo $O(n_i + m_i + n_j + m_j)$;

Item 2.3: pela hipótese de indução a chamada recursiva em G_i leva tempo $O(n_i + m_i)$;

Item 3.1: trivialmente leva tempo linear;

Item 3.2: verificar se cada G_i é conexo leva tempo $O(n_i + m_i)$;

Item 3.3.1: um grafo desconexo contém I_3 se e somente se o número de componentes é pelo menos três ou uma delas contém um par de vértices não adjacentes - esse teste é trivial;

Item 3.3.2: se um grafo é uma união disjunta de duas cliques, encontrá-las é trivial;

Item 3.3.3: verificar se G_i é um grafo split leva tempo $O(n_i + m_i)$, tanto quanto encontrar um certificado (uma partição split ou um subgrafo proibido), veja [16];

Item 3.4: pela hipótese de indução a chamada recursiva em G_i leva tempo $O(n_i + m_i)$.

Portanto, o algoritmo tem complexidade linear (dada por $O(|V(G)| + |E(G)|)$). ■

3.1.3 Grafos-(TF,C)

Uma importante superclasse dos grafos-(F,C) é a classe dos grafos-(TF,C). Dizemos que um grafo G é um grafo-(TF,C), ou simplesmente (TF,C), se G contém uma clique que intersecta em aresta todos os triângulos de G , ou equivalentemente, se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos, um deles induzindo um subgrafo livre de triângulos e o outro induzindo uma clique. Nesse caso, a clique C pode ser vista como um transversal de triângulos. Em [29] tais grafos são também conhecidos como grafos (1,2)-split. Grafos-(TF,C) admitem uma caracterização por uma família finita de subgrafos proibidos [18, 28], mas encontrar uma descrição explícita de tal família é um problema difícil; em [29] alguns avanços com relação a esta questão são apresentados. Nesse mesmo trabalho foi provado que verificar se G é um grafo (1,2)-split pode ser feito em tempo polinomial (em relação ao tamanho da entrada).

Quando G é um grafo perfeito, reconhecer grafos-(TF, C) é equivalente a reconhecer grafos-(2,1). Para isso, observe que um grafo perfeito G contém uma clique que intersecta todos os triângulos se e somente se G pode ser particionado em um grafo completo e um grafo bipartido [14]. Da mesma forma, quando nos restringimos à classe dos grafos cordais, verificamos que, sendo G um grafo cordal, dizer que G é grafo-(TF,C) é o mesmo que verificar se G é grafo-(2,1). Uma caracterização por subgrafos proibidos para grafos cordais que admitem partição (2,1), equivalentemente (TF,C), foi estudada em [21].

Sendo G um cografo, verificar se G é um grafo-(TF,C) é equivalente a verificar se G é (2,1). Observe que se um cografo G é (2,1) então G é trivialmente (TF, C). Por outro lado, se G é (TF,C) então G possui uma clique que toca todos os triângulos. Como os únicos ciclos ímpares que um cografo G admite são triângulos, segue que G é também (2,1).

3.2 Grafos-(F,S) e Grafos-(TF,S)

3.2.1 Grafos-(F,S)

Em [27], Yang e Yuan definiram uma classe de grafos, a classe dos grafos quase-bipartidos, a qual chamamos neste trabalho de grafos-(F,S). Seja G um grafo. Dizemos que G é um grafo-(F,S) se G pode ser particionado em dois subgrafos induzidos F e S , tal que F induz uma floresta e S induz um conjunto estável; com $F \cup S = G$ e $F \cap S = \emptyset$.

Yang e Yuan consideraram em particular, os grafos com grau no máximo três e aqueles com diâmetro dois, apresentando uma caracterização para tais grafos. Eles mostraram que o reconhecimento dos grafos-(F,S) é NP-completo para grafos onde o grau máximo é quatro ou onde o diâmetro é quatro.

Como o reconhecimento dos grafos-(F,S) para grafos com grau máximo 4 ou diâmetro 4 é NP-completo, resolvemos considerar o caso em que G é perfeito e obtivemos o seguinte resultado de NP-completude:

Teorema 11 *Seja G um grafo perfeito. O problema de reconhecer se G pode ser particionado em uma floresta e um conjunto independente é NP-completo.*

Prova.

É fácil verificar que o problema encontra-se em NP. O resto da demonstração segue de um resultado de Groshaus *et al.* [17]. Eles mostraram que dado um grafo G com grau máximo 4 e um inteiro $l > 0$, o problema de decidir se G possui um conjunto com no máximo l vértices que intercepte todos os ciclos C_k é NP-completo. A demonstração deste resultado utiliza uma redução de uma versão especial de SAT, $3 - SAT_{2+1}$, onde cada cláusula contém no máximo 3 literais, e cada literal ocorre exatamente 3 vezes, duas positivamente e uma negativamente. Eles provaram que um fórmula F de $3 - SAT_{2+1}$ é satisfeita se e somente se G admite um conjunto de vértices de tamanho $3n$ que intercepta todos os C_k 's.

Observamos que na demonstração deste resultado, o grafo G construído era, na verdade, um grafo perfeito, e que F é satisfeita se e somente se G admite um conjunto independente com $3n$ vértices que intercepta todos os ciclos de G . E portanto, nosso resultado segue. ■

Estudamos a seguir o problema da partição-(F,S) para algumas subclasses dos grafos

perfeitos, mais especificamente para grafos cordais e cografos. Para estas classes específicas de grafos perfeitos, o problema mostrou-se polinomial.

Teorema 12 *Seja G um grafo cordal. G é um grafo-(F,S) se e somente se G é 3-colorível.*

Prova. Um grafo cordal G é (F,S) se e somente se G admite um conjunto estável S cuja remoção resulta num grafo livre de ciclos (e portanto, bipartido). Observe que os únicos ciclos que os grafos cordais admitem são triângulos. ■

O teorema a seguir apresenta uma caracterização por subgrafos proibidos dos cografos-(F,S).

Teorema 13 *Seja G um cografo. G é um grafo-(F,S) se e somente se não contém K_4 e $I_2 + I_2 + I_2$ como um subgrafo induzido.*

Prova.

(\Rightarrow) Se $G = K_4$ ou $G = I_2 + I_2 + I_2$, podemos ver facilmente que G não possui uma partição-(F,S).

(\Leftarrow) Seja G um cografo minimal em relação à propriedade de não ser (F,S).

1. Se G é desconexo, então $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i sendo conexo, e por minimalidade de G , cada G_i é um grafo-(F,S). Sendo assim G é um grafo-(F,S), com $S = S[G_1] \cup S[G_2] \cup \dots \cup S[G_k]$ e $F = F[G_1] \cup F[G_2] \cup \dots \cup F[G_k]$. Uma contradição.
2. Se G é conexo, então $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i desconexo. Por minimalidade de G , cada G_i é um grafo-(F,S). No que segue, dividimos a prova em três casos ($k = 2$, $k = 3$ ou $k \geq 4$):

(a) $k = 2$.

Seja $G = G_1 + G_2$.

- i. G_1 é um conjunto independente. Nesse caso, G_2 deve conter um ciclo, caso contrário G seria (F,S). Sendo G um cografo, os únicos ciclos que G_2 admite são C_3 e C_4 . Se G_2 contém um C_3 , então G contém K_4 , o que é uma

contradição. Assim, o único ciclo que G_2 admite é um C_4 e, nesse caso, G_2 é um grafo bipartido com bipartição (B_1, B_2) . Em tais casos, se $|G_1| = 1$, então G é (F,S) com partição $B_1 \in S$ e $(B_2 + G_1) \in T$, o que é uma contradição. Pelo outro lado, se $|G_1| > 1$ então G contém um $(I_2 + I_2 + I_2)$ como um subgrafo induzido, e, novamente obtemos uma contradição.

ii. G_1 não é um conjunto independente. Nesse caso se G_2 é um conjunto independente, então obtemos uma contradição, como observado anteriormente, ou G_2 contém uma aresta, implicando que G contém um K_4 . Uma contradição.

(b) $k = 3$.

Seja $G = G_1 + G_2 + G_3$. Se pelo menos um dos grafos G_i , $i = 1, 2, 3$ contém uma aresta, então G contém um K_4 como um subgrafo induzido, e temos uma contradição. Dessa forma, G_1 , G_2 e G_3 devem ser conjuntos independentes. Nesse caso, temos uma contradição mostrando que G é um grafos-(F,S) ou concluímos que G contém um $(I_2 + I_2 + I_2)$ como um subgrafo induzido.

(c) $k \geq 4$.

$G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 4$. Nesse caso, G contém um K_4 . Uma contradição.

■

3.2.2 Grafos-(TF,S)

Seja G um grafo. Dizemos que G é um grafo-(TF,S), se G contém um conjunto independente que é transversal por vértices de todos os triângulos de G , ou equivalentemente, se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subgrafos, tal que um deles induz um conjunto independente (um grafo esparso) e o outro um subgrafo livre de triângulos. Não se sabe até o momento se o problema de reconhecimento dos grafos-(TF,S) pode ser resolvido em tempo polinomial. Quando G está restrito à classe dos grafos perfeitos, reconhecer grafos-(TF,S) corresponde ao problema da 3-colorabilidade. Note que um grafo perfeito é (TF,S) se e somente se existe um conjunto independente, que, quando removido, resulta num grafo sem ciclos ímpares, e dessa forma, num grafo bipartido. Temos o seguinte teorema direto:

Teorema 14 [4] *Seja G um grafo perfeito. G é um grafo-(TF, S) se e somente se G não contém K_4 como um subgrafo induzido.*

Prova.

(\Rightarrow): É claro que se G possui um K_4 então G não admite um conjunto estável cuja remoção resulta num grafo livre de triângulos.

(\Leftarrow): Seja G um grafo perfeito livre de K_4 , então a clique máxima de G possui tamanho no máximo 3, então G é 3-colorível. Portanto, G pode ser particionado num conjunto estável e num grafo livre de triângulos. ■

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho apresentamos novas partições em grafos. Introduzimos o problema de particionamento de um grafo em dois subconjuntos A e B , tal que A induz uma floresta e B um subgrafo denso (ou esparso), denominado problema da Partição-(F,C) (Partição-(F,S)). Além disso, consideramos o caso em que A induz um subgrafo livre de triângulos e B induz um grafo denso (ou um esparso), denominado problema da partição-(TF,C) (partição-(TF,S)). Provamos a polinomialidade do problema da partição-(F,C) e apresentamos a caracterização dos cografos-(F,C), uma estrutural e a outra através de subgrafos proibidos [6]. Além disso, apresentamos um algoritmo linear para reconhecer tal classe de grafos. No caso da partição-(F,S), provamos que o problema de reconhecer se um grafo G admite uma partição (F,S) é um problema NP -completo mesmo quando restrito a grafos perfeitos. No caso específico em que G é um cografo ou um grafo cordal, fornecemos uma caracterização dos grafos que admitem uma partição-(F,S) através de subgrafos proibidos.

4.1 Trabalhos Futuros

No contexto de partição de grafos em subconjuntos A e B conforme acima, propomos os seguintes problemas:

1. estudo da caracterização de grafos-(F,C), para o caso em que G é geral;
2. estudo da caracterização de grafos-(TF,S), para o caso de grafos gerais;

Na verdade, para este último problema, alguns avanços já foram feitos:

Verificamos que existe uma família infinita TF de subgrafos induzidos proibidos para grafos-(TF,S). Essa família TF é formada pelos grafos que possuem a seguinte configuração. Seja G um grafo pertencente a família TF :

- (a) G é formado por um ciclo C de tamanho 4 ou um ciclo ímpar C de tamanho maior que três. Denote por c_1, c_2, \dots, c_l os vértices de C , onde l é o tamanho do ciclo.
- (b) Para vértices adjacentes c_i e c_j de C , existe um triângulo formado por c_i, c_j e um terceiro vértice s_i não pertencente a C , e o triângulo formado por c_1, c_l e um novo vértice s_l .
- (c) Existe uma aresta (s_i, s_{i+1}) , para $i \leq (l - 1)$, e a aresta (s_l, s_1) .

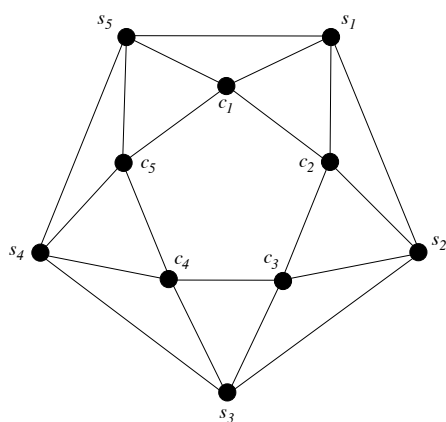


Figura 4.1: Exemplo de um grafo pertencente à família infinita de sugrafos proibidos.

Um grafo G , com ciclo C de tamanho 5, pertencente a família TF é mostrado na Figura 4.1.

Tal família de subgrafos induzidos proibidos resulta no seguinte resultado:

Teorema 15 *Seja G um grafo. Se G contém qualquer grafo da família F como subgrafo induzido, então G não é um grafo- (TF, S) .*

3. A caracterização da partição- (TF, S) para o caso de grafos gerais;
4. Reconhecer grafos- (F, C) e grafos- (F, S) para outras classes de grafos.

Referências

- [1] M. F. Andrielli and C. P. de Mello. Conjunto fonte máximo em grafos de comparabilidade. Technical Report IC-96-07, icunicamp, 1996.
- [2] A. Brandstädt. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics*, 152:47–54, 1996.
- [3] A. Brandstädt. Corrigendum. *Discrete Mathematics*, pages 186–295, 1998.
- [4] A. Brandstädt, S. Brito, S. Klein, L. Nogueira, and F. Protti. Forest-clique partitions of cographs, 2008. Manuscript.
- [5] A. Bretscher, D. G. Corneil, M. Habib, and C. Paul. A simple linear time lexbfs cograph recognition algorithm. In *29th WG Workshop*, pages 119–130, 2003.
- [6] S. Brito, S. Klein, L. Nogueira, and F. Protti. Forest-clique partitions of cographs. *Annals of the International Symposium on Combinatorial Optimization*, 01:10–10, March 2008.
- [7] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Progress on perfect graphs. *Mathematical Programming, Series B*, 97:405–422, 2003.
- [8] D. G. Corneil, H. Lerchs, and L. S. Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3:163–174, 1981.
- [9] D. G. Corneil, H. Lerchs, and L. S. Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3:163–174, 1981.
- [10] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart. A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing*, 14(4):926–934, 1985.
- [11] M. Demange, T. Ekim, and D. de Werra. Partitioning cographs into cliques and stable sets. *Discrete Optimization*, 2:145–153, 2005.
- [12] T. Feder, P. Hell, S. Klein, and R. Motwani. Complexity of graph partitions problems. *Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on the Theory of Computing STOC'99*, pages 464–472, 1999.
- [13] T. Feder, P. Hell, S. Klein, and R. Motwani. List partitions. *SIAM Journal Discrete Mathematics*, 16:449–478, 2003.
- [14] Tomas Feder and Pavol Hell. Matrix partitions of perfect graphs. *Creation and recreation: a tribute to the memory of Claude Berge*, 306:2450–2460, 2006.
- [15] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, New York, 1979.

-
- [16] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [17] M. Groshaus, P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. Cycle transversals in bounded degree graphs. Manuscript.
- [18] A. Gyàrfàs. Generalized split graphs and ramsey numbers. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 81:255–261, 1998.
- [19] M. Habib and C. Paul. A simple linear time algorithm for cograph recognition. *Discrete Applied Mathematics*, 145:183–197, 2005.
- [20] P. L. Hammer and V. Chvatal. Set-packing and threshold graphs. Technical report, Waterloo, 1973.
- [21] P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 141:185–194, 2004.
- [22] H. Lerchs. *On cliques and kernels*. Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, 1971.
- [23] R. M. McConnell and J. P. Spinrad. *Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs*.
- [24] L. T. Nogueira, R. S. Francisco, and S. Klein. Characterizing (k, l) -partitionable cographs. *Electronic Notes in Discrete Applied Mathematics*, 22:277–280, 2005.
- [25] L. Stewart. Cographs, a class of tree representable graphs. Master thesis, University of Toronto, Toronto, Ontario, 1978.
- [26] J. L. Swarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Rio de Janeiro, 1983.
- [27] A. Yang and J. Yuan. Partition the vertices of a graph into one independent set and one acyclic set. *Discrete Mathematics*, 306:1207–1216, 2006.
- [28] I. E. Zverovich. r -bounded k -complete bihypergraphs and generalized split graphs. *Discrete Mathematics*, 247:225–244, 2002.
- [29] I. E. Zverovich and I. I. Zverovich. An improvement of gyàrfàs’ bounds on the maximal order of a minimal forbidden induced subgraph for $(1, 2)$ -split graphs. *Rutcor Research Report RRR 37-2002*, 2001.