UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

**RAFAEL AUGUSTO DE MELO**

# Modelos de Programação Inteira para o Problema do Torneio com Viagens com Estádios Fixos

NITERÓI

2007

Universidade Federal Fluminense

**RAFAEL AUGUSTO DE MELO**

# Modelos de Programação Inteira para o Problema do Torneio com Viagens com Estádios Fixos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Otimização Combinatória e Inteligência Artificial.

Orientador:
Prof. Celso da Cruz Carneiro Ribeiro, Dr. Hab.

Co-orientador:
Prof. Sebastián Alberto Urrutia, D.Sc.

NITERÓI

2007

Modelos de Programação Inteira para o Problema do Torneio com Viagens com Estádios Fixos

Rafael Augusto de Melo

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Otimização Combinatória e Inteligência Artificial.

Aprovada por:

---

Prof. Celso da Cruz Carneiro Ribeiro, Dr. Hab. / IC-UFF
(Orientador)

---

Prof. Sebastián Alberto Urrutia, D.Sc. / DCC-UFMG
(Co-orientador)

---

Prof. Isabel Cristina Mello Rosseti , D.Sc. / PURO-UFF

---

Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc. / IC-UFF

---

Prof. Nair Maria Maia de Abreu , D.Sc. / COPPE-UFRJ

Niterói, 28 de Setembro de 2007.

*“God grant me the serenity to accept the problems I cannot solve; the persistance to solve the problems that I can; and the wisdom to know the difference.”*

*“Deus, dê-me serenidade para aceitar os problemas que não posso resolver; persistência para resolver os problemas que eu posso; e sabedoria para saber diferenciá-los.”*

**Adaptado de Reinhold Niebuhr**

Aos meus pais e ao meu irmão, por todo o amor, carinho e apoio.

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida e pela capacidade, paciência e perseverança para realizar os estudos.

Agradeço aos meus pais: por todo o amor e carinho, por não medirem esforços para me apoiar nesta jornada e por tudo o mais que têm feito por mim. Ao meu irmão, cuja amizade sempre me dá uma força extra para realizar minhas tarefas. A todos os meus familiares. Um agradecimento especial à minha tia Izaura e ao meu tio Osvaldo, que foram meus segundos pais durante o período em que fiquei em BH.

Aos antigos amigos. Perdoem-me por não colocar nomes aqui, mas não há espaço aqui para dizer o nome de todas as pessoas que foram e são importantes para mim.

Um agradecimento muito especial aos meus orientadores. Não faltam motivos para agradecer ao Sebastián: pela amizade, por confiar em mim e acreditar que eu poderia realizar as atividades e por diversos outros motivos. Ao Celso, pela amizade e pelos conselhos fundamentais que me ajudaram a amadurecer bastante como estudante.

Aos amigos de república: Rodrigo (paulista comedor de pizza que me deu uma grande força, desde quando eu ainda estava em Lavras pensando em iniciar meu mestrado na UFF), Dudu (historiador pseudo-alternativo que odeia hippies), Nardi (louco de partículas, que participou de um treinamento no BOPE), Emmanuel (produtor de filmes em potencial), Toca Naruto (viciado em coisas orientais), Daniel (El chico de Chile) e Diego (geofísico que finge estudar) que, na maioria das vezes, fizeram os momentos em Niterói bem mais agradáveis e divertidos. Agradeço esta galera também pela paciência de ouvir minhas piadas sem graça, as quais me garantiram o troféu *Pré-Socrático.*

Um agradecimento a todos os novos amigos que fiz no IC. São tantas pessoas que até corro o risco de esquecer um eventual nome. Dani e Rodrigo, Renathinha, Vivi e Jonivan, Toca, Crixtttiane, Jovem, Janine, Nilmax, Brandão, Augusto, Edgar, Marcelo, Ary, Higor, Yuri, Sanderson, Kennedy, Jacques, Alexandre, Aline, Aletéia, Idalmita, Bertini, Copetti, Merschmann, Helder (Cabo Verde), Johnny (chi.. ops!!! peruano), Edwin, Acha, Mozar, Jackson, Lu Pessôa, Renato, Alisson, Synara, Mírian, Melba, Leandro, Tati, Haroldo, Luciene, André Renato, Lu Brugiolo, Ivan Gogh e Stênio.

Agradeço à Maria e à Ângela por sempre se prontificarem a me ajudar.

Agradeço aos professores Satoru, Loana, Simone, Plastino, Cláudio Bornstein (UFRJ), Fábio Protti (UFRJ), João Vasconcelos (UFMG), Ricardo (UFLA), Guilherme (UFLA) e Alexandre (UFMG).

Agradeço a algumas outras pessoas que conheci durante este período, dentre as quais estão Thiago Noronha (que contribuiu com o trabalho, dando conselhos de como melhor utilizar o resolvedor), Alexandre, Gaúcho e Antonieta.

Agradeço às pessoas que me fizeram companhia durante o período que fiquei em BH: Paraguayo, Mary, Gustavo (Indiano), Léo e Todé.

Como minha vida não é guiada somente pela razão, tenho que agradecer pessoas que, além da amigos, são irmãos na fé. Ao pessoal do Grito de Alerta (Altair, Gi, Bill, Berone, Babu, Carina, Marcão, ...), da Comunidade S8 (Paulinha e Maranhão) e da Igreja Batista do Ingá. À minha vizinha e amiga Noemia, que constantemente se lembra de mim em suas orações.

Agradeço aos membros da banca pelas sugestões: Satoru, Isabel e Nair.

Agradeço também à CAPES por financiar uma grande parte dos meus estudos.

Peço desculpas às pessoas cujos nomes deveriam estar aqui mas acabaram ficando de fora. Infelizmente, minha memória é RAM (**R**afael **A**ugusto de **M**elo).

# Resumo

A área de escalonamento em esportes é um campo de pesquisa bastante atrativo, devido à importância dos problemas na prática e também às interessantes estruturas matemáticas dos mesmos. Introduz-se um novo problema, que consiste em escalonar um torneio *round-robin* simples e compacto quando os locais onde cada jogo deverá ocorrer são previamente determinados. Três formulações por programação inteira são propostas e comparadas. Duas estratégias simples para obter soluções viáveis para instâncias maiores em reduzido tempo de processamento também são propostas. Apresentam-se resultados numéricos comparativos.

**Palavras-chave:** Escalonamento em esportes, Programação inteira, Torneios.

# Abstract

Sports scheduling is a very attractive application area due to the importance of the problems in practice and to their interesting mathematical structure. We introduce a new problem, consisting in scheduling a compact single round-robin tournament with fixed venue assignments for each game. Three integer programming formulations are proposed and compared. We also propose two simple strategies to generate feasible solutions for larger instances in a reasonable amount of time. Comparative numerical results are presented.

**Keywords:** Sports scheduling, Integer programming, Tournaments.

# Siglas e Abreviações

*DRR* : *Round robin* duplo,página 1

*HAA* : Atribuição casa-fora, página 6

*HAP* : Padrão casa-fora, página 6

*LB3* : Limite fornecido pela formulação com $O(n^3)$ variáveis, página 14

*LB4* : Limite fornecido pela formulação com $O(n^4)$ variáveis, página 14

*LB5* : Limite fornecido pela formulação com $O(n^5)$ variáveis, página 14

*N3* : Formulação com $O(n^3)$ variáveis, página 14

*N4* : Formulação com $O(n^4)$ variáveis, página 14

*N5* : Formulação com $O(n^5)$ variáveis, página 14

$\overline{N3}$ : Relaxação linear da formulação com $O(n^3)$ variáveis, página 14

$\overline{N4}$ : Relaxação linear da formulação com $O(n^4)$ variáveis, página 14

$\overline{N5}$ : Relaxação linear da formulação com $O(n^5)$ variáveis, página 14

*SRR* : *Round robin* simples, página 1

*S3* : Formulação simplificada com $O(n^3)$ variáveis, página 14

*TCDMP* : Problema de minimização de distância com quadro de jogos restrito, página 2

*TTP* : Problema do torneio com viagens, página 2

*TTPFV* : Problema do torneio com viagens com estádios fixos, página 7

# Sumário

# Lista de Tabelas

# Capítulo 1

# Introdução

A área de otimização aplicada a esportes tem atraído um crescente número de pesquisadores de áreas multidisciplinares como pesquisa operacional, teoria de escalonamento, programação por restrições, teoria dos grafos, otimização combinatória e matemática aplicada. Uma importância especial é dada a problemas de escalonamento *round robin* nos quais cada equipe é associada a um determinado estádio, devido à relevância prática e às interessantes estruturas matemáticas. O alto grau de dificuldade dos problemas na área leva à utilização de inúmeras abordagens, incluindo programação inteira [3, 4, 10, 18, 19, 23], programação por restrições [12, 13, 25], heurísticas [1, 9, 11, 24] e métodos híbridos [2, 7]. *Surveys* da literatura são encontrados em [8, 21].

Considera-se neste trabalho apenas torneios com um número par de equipes. Em torneios *round robin*, toda equipe enfrenta cada outra um número fixo de vezes em um dado número de rodadas. Todo par de equipes se enfrenta exatamente uma vez em um torneio *round robin* simples (SRR, do inglês *single round robin*) e duas vezes em um torneio *round robin* duplo (DRR, do inglês *double round robin*). Quando o número de rodadas é mínimo e toda equipe joga exatamente um jogo em cada rodada, então o torneio é definido como compacto. Cada equipe possui seu próprio estádio em sua cidade. Cada jogo é realizado no estádio de uma das duas equipes em confronto. A equipe que joga em seu próprio estádio é definida como equipe da casa e diz-se que ela realiza um jogo em casa, enquanto a outra é denominada equipe visitante e diz-se que a mesma realiza um jogo fora. Um escalonamento deve determinar não somente em qual rodada cada jogo deve ser realizado, mas também em qual estádio.

O problema de escalonar torneios *round robin* é geralmente dividido em dois subproblemas. A construção do quadro de jogos consiste em determinar a rodada em que cada jogo será jogado. O conjunto de padrões casa-fora (conjunto HAP, do inglês *home-away* *pattern set*) determina em que condição (casa ou fora) cada equipe joga em cada rodada. O quadro de jogos juntamente com o conjunto HAP determinam o escalonamento do torneio.

Alguns problemas de escalonamento *round robin* consideram a construção do quadro de jogos e do conjunto HAP simultaneamente. O problema do torneio com viagens (TTP, do inglês *Traveling tournament problem*) [6] é um problema clássico de escalonamento em esportes e pertence a esta classe. Neste problema, faz-se necessário determinar um escalonamento para um torneio *round robin* duplo, tal que nenhuma equipe realiza mais do que três jogos consecutivos em casa nem mais do que três jogos consecutivos fora, e os jogos entre duas equipes quaisquer $i$ e $j$ não podem ocorrer em rodadas consecutivas. Deve-se minimizar a distância total percorrida pelas equipes. Este problema combina as dificuldades de problemas de viabilidade com as de problemas difíceis de otimização. Soluções comprovadamente ótimas são conhecidas somente para instâncias com até oito equipes. Instâncias para o TTP e dados como as melhores soluções encontradas e limites inferiores para o problema estão disponíveis em [26].

Entretanto, ou o quadro de jogos ou o conjunto HAP do escalonamento podem ser fixos e conhecidos previamente em algumas situações. No primeiro caso, o quadro de jogos é dado e o problema consiste em encontrar um conjunto HAP viável otimizando uma certa função objetivo. O problema de minimização das quebras [22] pertence a esta classe de problemas. Dado um quadro de jogos para um torneio *round robin* simples, o problema consiste em determinar um conjunto HAP minimizando o número de quebras (dois jogos consecutivos fora de casa ou dois jogos consecutivos em casa realizados por determinada equipe). O problema de minimização de distância com quadro de jogos restrito (TCDMP, do inglês *Timetable Constrained Distance Minimization Problem*) [20] também pertence a este primeiro caso. Neste problema objetiva-se criar um escalonamento para um torneio *round robin* duplo. Os oponentes de cada equipe em cada rodada são conhecidos. Requer-se, desta forma, um conjunto HAP minimizando a distância total percorrida.

No segundo caso, o conjunto HAP é predeterminado e se requer um quadro de jogos. Existe, neste caso, um problema de viabilidade, uma vez que nem todo conjunto HAP está associado a um quadro de jogos compatível. Uma condição necessária para viabilidade, relacionando conjuntos de equipes com a quantidade mínima de jogos que podem ser realizados entre as equipes do conjunto, é dada em [17]. O problema de construir um quadro de jogos compatível com um dado conjunto HAP otimizando algum objetivo aparece como subproblema em abordagens para resolver problemas reais de escalonamento. Por exemplo, em [18] primeiramente criam-se conjuntos HAP, e em seguida, determinam-se quadros de jogos, obedecendo aos conjuntos HAP criados, utilizando-se uma função objetivo arbitrária. Estes quadros de jogos são utilizados em um próximo passo, onde equipes são associadas a cada padrão casa-fora.

Uma atribuição casa-fora (HAA, do inglês *home-away assignment*) é uma atribuição de um estádio para cada jogo. Se o quadro de jogos é fixo, i.e., a rodada de cada jogo é conhecida, o conjunto HAP e o HAA fornecem a mesma informação, o que significa que ambos determinam onde cada jogo será realizado.

Neste trabalho, é considerado e formulado o problema de escalonar torneios *round robin* simples com atribuições casa-fora fixas. O estádio onde será realizado cada jogo é conhecido previamente e o problema consiste em determinar um quadro de jogos minimizando uma função objetivo. Variantes deste problema encontram aplicações iteressantes em ligas reais cujos torneios DRR são divididos em duas fases SRR. Os jogos na segunda fase são exatamente os mesmos da primeira fase, contrapondo-se somente pelo fato da inversão dos estádios. Desta forma, os estádios dos jogos na segunda fase são conhecidos previamente e restritos pelos locais dos jogos na primeira fase. Este é o caso, por exemplo, da liga profissional de futebol chilena [5] e da federação de tênis de mesa alemã da Baixa Saxônia [15].

O conteúdo de cada capítulo da dissertação é resumido a seguir.

- Capítulo 2: primeiramente, são apresentados alguns conceitos fundamentais. Logo após, formaliza-se o Problema do Torneio com Viagens com Estádios Fixos (TTPFV). Em seguida, são propostos modelos de programação inteira para o problema.

- Capítulo 3: comparam-se as formulações propostas no Capítulo 2. É realizada uma comparação entre os limites fornecidos pelas relaxações lineares dos modelos, seguida de uma comparação experimental, baseada na capacidade de um resolvedor comercial encontrar e provar a otimalidade de soluções através de cada uma das formulações.

- Capítulo 4: apresenta-se um modelo simplificado para encontrar soluções aproximadas para instâncias de tamanho maior. Duas estratégias para melhorar as soluções encontradas por este modelo são descritas. A primeira utiliza uma heurística presente no resolvedor comercial, enquanto a segunda utiliza o resolvedor para enumerar soluções.

- Capítulo 5: resume-se a principal contribuição deste trabalho e são ilustrados alguns novos caminhos que podem ser seguidos para a continuação da pesquisa no tema.

# Capítulo 2

# Problema do Torneio com Viagens com Estádios Fixos

Neste capítulo são apresentados conceitos que serão utilizados no decorrer da dissertação. Primeiramente, descreve-se o problema do torneio com viagens com estádios fixos. Em seguida, três novas formulações por programação inteira são propostas.

## 2.1 Conceitos Preliminares

Sejam $n$ e $r = n - 1$, respectivamente, o número de equipes (par) e o número de rodadas de determinado torneio *round robin* simples e compacto.

### 2.1.1 Quadro de Jogos

Um quadro de jogos é a alocação de jogos às rodadas, que pode ser representado como uma matriz $T = [t_{ij}]$ de dimensão $n \times r$. Cada elemento $t_{ij}$ fornece o adversário da equipe $i$ na rodada $j$. A matriz

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

exemplifica um quadro de jogos para um torneio com $n = 4$ equipes, onde a equipe 1, por exemplo, joga contra as equipes 3, 4 e 2, respectivamente, nas rodadas 1, 2 e 3.

### 2.1.2 Conjunto HAP

Um padrão casa-fora (HAP) para determinada equipe $i$ é um vetor linha $r$-dimensional $h = [h_j]$. O valor de $h_j$ determina se o jogo da rodada $j$ realizar-se-á em casa ($h_j = C$) ou fora ($h_j = F$). Um conjunto de padrões casa-fora (conjunto HAP) é uma matriz

$$H = \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix}$$

de dimensão $n \times r$, onde cada linha $h^i$ corresponde ao padrão casa-fora da equipe $i = 1, \ldots, n$. A matriz

$$H = \begin{pmatrix} C & F & C \\ C & C & F \\ F & F & C \\ F & C & F \end{pmatrix}$$

ilustra um conjunto de padrões casa-fora para um torneio com quatro equipes.

Quando uma equipe $i$ realiza uma sequência de dois jogos fora ($h^i_j = h^i_{j+1} = F$) ou dois jogos em casa ($h^i_j = h^i_{j+1} = C$), diz-se que a mesma possui uma quebra na rodada $(j+1)$. No conjunto HAP exemplificado acima, as equipes 2 e 3 possuem uma quebra cada uma na segunda rodada.

Uma *road trip* é uma seqüência de jogos fora consecutivos realizados por uma equipe na casa de seus oponentes ($h^i_j = \ldots = h^i_{j+k} = F, k > 0$). Neste caso, considera-se que a equipe viaja diretamente do estádio de um oponente para o do próximo, sem retornar para sua cidade, quando $k > 1$.

### 2.1.3 HAA

Uma atribuição casa-fora (HAA) é uma atribuição de estádios aos jogos, indicando se o jogo entre as equipes $i$ e $j$ ocorrerá no estádio de $i$ ou no estádio de $j$. Um HAA pode ser representado por uma matriz anti-simétrica $M = [m_{ij}]$ de dimensões $n \times n$, na qual cada elemento $m_{ij}$ recebe o valor $C$ se o jogo entre $i$ e $j$ ocorre no estádio de $i$, e recebe o valor $F$ em caso contrário. Um exemplo de uma matriz HAA para um torneio com quatro equipes é

$$M = \begin{pmatrix} - & F & C & F \\ C & - & F & C \\ F & C & - & F \\ C & F & C & - \end{pmatrix}.$$

Um HAA é balanceado se a diferença entre o número de jogos em casa e o número de jogos fora é no máximo igual a um para cada equipe. Ou seja,

$$|\{j = 1, \ldots, n-1 | m_{ij} = C\}| - |\{j = 1, \ldots, n-1 | m_{ij} = F\}| = 1,$$

para toda equipe $i = 1, \ldots, n$.

## 2.2 Formalização do Problema

Assume-se que cada equipe possui seu próprio estádio em sua cidade sede. Todas as equipes estão inicialmente em sua sede, para onde devem retornar após o último jogo fora. A distância $d_{ij} \geq 0$ da cidade da equipe $i$ para a cidade da equipe $j$ é conhecida previamente.

Seja $J = \{(i, j) : m_{i,j} = C\}$ um conjunto de jogos determinado pelo HAA, cujos elementos são pares ordenados de equipes. O jogo entre as equipes $i$ e $j$ é representado ou pelo par ordenado $(i, j)$ ou pelo par ordenado $(j, i)$. No primeiro caso, o jogo entre $i$ e $j$ é realizado no estádio da equipe $i$; em caso contrário, no estádio da equipe $j$. Consequentemente, para quaisquer duas equipes $i$ e $j$, $(i, j) \in J \Longleftrightarrow (j, i) \notin J$.

Dado um número par de equipes $n$ e uma atribuição casa-fora representada por $J$, os problemas de construção de tabelas de torneios com estádios fixos consistem em encontrar uma tabela de um torneio *round robin* simples e compacto compatível com $J$, otimizando alguma função objetivo, e garantindo que nenhuma equipe jogue mais do que três jogos fora consecutivos ou mais do que três jogos consecutivos em casa. O Problema do Torneio com Viagens com Estádios Fixos (TTPFV) é um problema pertencente a esta classe. Seu objetivo consiste em minimizar a distância total percorrida pelas equipes.

## 2.3 Formulação com $O(n^3)$ Variáveis

Definem-se as seguintes variáveis de decisão:

$$z_{tjk} = \begin{cases} 1, & \text{se a equipe } t \text{ joga em casa contra a equipe } j \text{ na rodada } k, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$y_{tij} = \begin{cases} 1, & \text{se a equipe } t \text{ viaja da cidade da equipe } i \text{ para a cidade da equipe } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As variáveis $y$ representam os percursos realizados entre duas cidades por uma determinada equipe. Uma vez que cada jogo ocorre exatamente uma vez, um percurso entre as cidades de qualquer par de equipes diferentes é realizado no máximo uma vez por cada equipe. Desta forma, estas variáveis são binárias. As variáveis definidas são utilizadas na formulação (2.1)-(2.12) do TTPFV, com $O(n^3)$ variáveis:

$$\min F_3(z, y) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_{tij} \tag{2.1}$$

sujeito a:

$$\sum_{q=1}^{n-1} z_{tjq} = 1, \qquad \forall\, (t, j) \in J \tag{2.2}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} (z_{tjk} + z_{jtk}) = 1, \qquad t = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{2.3}$$

$$y_{tij} \geq z_{it,k-1} + z_{jtk} - 1, \qquad t, i, j = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i \neq j, \quad k = 2, \ldots, n-1 \tag{2.4}$$

$$y_{tit} \geq z_{it,k-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} z_{tjk} - 1, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i, \quad k = 2, \ldots, n-1 \tag{2.5}$$

$$y_{tti} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} z_{tj,k-1} + z_{itk} - 1, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i, \quad k = 2, \ldots, n-1 \tag{2.6}$$

$$y_{tti} \geq z_{it1}, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i \tag{2.7}$$

$$y_{tit} \geq z_{it,n-1}, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i \tag{2.8}$$

$$\sum_{q=k}^{k+3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} z_{jtk} \leq 3, \qquad t = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-4 \tag{2.9}$$

$$\sum_{q=k}^{k+3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} z_{jtk} \geq 1, \qquad t=1,\ldots,n, \quad k=1,\ldots,n-4 \tag{2.10}$$

$$z_{tjk} \in \{0,1\}, \qquad t,j=1,\ldots,n, \quad k=1,\ldots,n-1 \tag{2.11}$$

$$0 \leq y_{tij} \leq 1, \qquad t,i,j=1,\ldots,n. \tag{2.12}$$

A função objetivo (2.1) define a minimização da distância total percorrida pelas equipes. As restrições (2.2) asseguram que cada jogo ocorre exatamente uma vez. As restrições (2.3) garantem que cada equipe participa de um jogo em cada rodada. As restrições (2.4) forçam a equipe $t$ a realizar uma viagem da cidade da equipe $i$ para a da equipe $j$ caso jogue dois jogos consecutivos fora de casa contra as equipes $i$ e $j$, nesta ordem. As restrições (2.5) forçam a equipe $t$ a realizar uma viagem da cidade da equipe $i$ para sua própria cidade caso tenha um jogo fora contra a última seguido de um jogo em casa na rodada seguinte. As restrições (2.6) forçam a equipe $t$ a viajar de sua cidade para a da equipe $i$ caso jogue fora contra a última após jogar em casa na rodada anterior. As restrições (2.7) forçam a equipe $t$ a viajar para a cidade da equipe $i$ caso jogue fora contra a mesma na primeira rodada. As restrições (2.8) forçam a equipe $t$ a retornar da cidade da equipe $i$ caso jogue fora contra a mesma na última rodada. As restrições (2.9) estabelecem que a equipe $t$ não joga mais do que três jogos consecutivos fora, enquanto as restrições (2.10) garantem que a equipe $t$ não pode jogar mais do que três jogos consecutivos em sua própria cidade. As restrições (2.11) definem as condições de integralidade para as variáveis $z$. As variáveis $y$ atuam como limites superiores generalizados para as restrições (2.4) a (2.8). Uma vez que seus respectivos custos na função objetivo a ser minimizada são não-negativos, elas assumirão sempre o mínimo valor possível, que é necessariamente 0 ou 1. Desta forma, as restrições de integralidade sobre as variáveis $y$ podem ser substituídas por limites inferiores e superiores expressos como as restrições (2.12).

Esta formulação possui $O(n^4)$ restrições: $O(n^2)$ dos tipos (2.2), (2.3), (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10), $O(n^3)$ dos tipos (2.5) e (2.6), e $O(n^4)$ do tipo (2.4).

## 2.4 Formulação com $O(n^4)$ Variáveis

Nesta seção, o problema é reformulado como um problema de fluxo em redes, no qual cada equipe pode ser vista como um diferente produto. Denota-se por $h(t) = |\{(t,j) \in J : 1 \leq j \leq n, j \neq t\}|$ o número de jogos realizados em casa pela equipe $t = 1,\ldots,n$. Introduz-se também uma rodada fictícia $n$, para representar o fato de que cada equipe deve retornar à sua própria cidade após seu último jogo fora. As novas variáveis de decisão são definidas como:

$$x_{tijk} = \begin{cases} 1, & \text{se a equipe } t \text{ viaja da cidade da equipe } i \text{ para a cidade da equipe } j \\ & \text{na rodada } k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De acordo com a definição acima, percebe-se que se alguma equipe $t$ estava em sua cidade na rodada $k$ e realiza outro jogo em casa na rodada $k+1$, então $x_{ttt,k+1} = 1$, como se houvesse uma viagem fictícia realizada por $t$ deixando sua cidade e retornando à mesma para jogar a rodada $k+1$. Estas novas variáveis são usadas para construir a formulação (2.13)-(2.22) do TTPFV com $O(n^4)$ variáveis:

$$\min F_4(x) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{tijk} d_{ij} \tag{2.13}$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_{tijk} = 1, \qquad \forall (j,t) \in J \tag{2.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ttj1} = 1, \qquad t = 1, \dots, n \tag{2.15}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq t}}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{tij1} = 0, \qquad t = 1, \dots, n \tag{2.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{tijk} = \sum_{j=1}^{n} x_{tji,k-1}, \qquad t, i = 1, \dots, n, \quad k = 2, \dots, n \tag{2.17}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{jitk} = \sum_{i=1}^{n} x_{titk}, \qquad t = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n-1 \tag{2.18}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{titk} = h(t) + 1, \qquad t = 1, \dots, n \tag{2.19}$$

$$\sum_{q=k}^{k+3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{tijq} \leq 3, \qquad t = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n-4 \tag{2.20}$$

$$\sum_{q=k}^{k+3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{tijq} \geq 1, \qquad t = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n-4 \tag{2.21}$$

$$x_{tijk} \in \{0,1\}, \qquad t,i,j,k = 1,\ldots,n. \tag{2.22}$$

Como no modelo da Seção 2.3, a função objetivo (2.13) define a minimização da distância total percorrida pelas equipes. As restrições (2.14) asseguram que cada jogo pertencente a $J$ é realizado exatamente uma vez. As restrições (2.15) e (2.16) forçam toda equipe $t$ a realizar uma viagem iniciando em sua cidade na primeira rodada. Se a equipe $t$ joga em casa na primeira rodada, então esta será uma viagem fictícia começando e terminando em sua própria cidade. As restrições (2.16) são redundantes e, portanto, desnecessárias na formulação de programação inteira, porém elas contribuem para o fortalecimento dos limites fornecidos pela relaxação linear. As restrições (2.17) requerem que a equipe $t$ viaje para a cidade de $i$ na rodada $k-1$ caso deixe a mesma na rodada $k$. As restrições (2.18) determinam que a equipe $t$ está em sua cidade na rodada $k$ se e somente se outra equipe viaja para jogar na cidade de $t$. As restrições (2.19) forçam a equipe $t$ a estar em casa ao fim do torneio, representado pela rodada fictícia indexada por $n$. Uma vez que a equipe $t$ joga $h(t)$ jogos em seu estádio durante o torneio, estas restrições forçam-na a estar em casa ao fim do torneio impondo que ela realize $h(t)+1$ viagens para sua cidade. Como para o modelo da seção anterior, as restrições (2.20) estabelecem que a equipe $t$ não pode jogar mais do que três jogos consecutivos fora, enquanto as restrições (2.21) garantem que a equipe $t$ não pode jogar mais do que três jogos consecutivos em casa. As restrições (2.22) são as restrições de integralidade.

Esta reformulação possui $O(n^3)$ restrições: $O(n)$ dos tipos (2.15), (2.16) e (2.19), $O(n^2)$ dos tipos (2.14), (2.18), (2.20) e (2.21), e $O(n^3)$ do tipo (2.17).

## 2.5 Formulação com $O(n^5)$ Variáveis

A formulação desta seção considera *road trips* completas. As variáveis representam *road trips* de diferentes tamanhos, fornecendo uma representação mais direta do problema. Três novos tipos de variáveis de decisão são definidos e usados nesta formulação:

$$w^1_{tik} = \begin{cases} 1, & \text{se a equipe } t \text{ inicia, na rodada } k, \text{ uma } \textit{road trip} \text{ indo à cidade da equipe } i \\ & \text{e retornando para sua cidade na rodada } k+1 \text{ (com } t \neq i) \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$w^2_{tijk} = \begin{cases} 1, & \text{se a equipe } t \text{ inicia, na rodada } k\text{, uma \textit{road trip} indo primeiro à cidade} \\ & \text{da equipe } i\text{, depois à da equipe } j\text{, e retornando para sua cidade na} \\ & \text{rodada } k+2 \text{ (com } t \neq i \neq j\text{)} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$w^3_{tijlk} = \begin{cases} 1, & \text{se a equipe } t \text{ inicia, na rodada } k\text{, uma \textit{road trip} indo primeiro à cidade} \\ & \text{da equipe } i\text{, depois à da equipe } j\text{, em seguida à da equipe } l\text{,} \\ & \text{e retornando para sua cidade na rodada } k+3 \text{ (com } t \neq i \neq j \neq l\text{)} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Duas rodadas fictícias (indexadas por -1 e 0) são criadas para simplificar a formulação. As variáveis correspondentes a cada *road trip* iniciando em qualquer destas rodadas fictícias são fixadas em 0. Os custos auxiliares $c_{ij}$, $c_{ijm}$, e $c_{ijml}$ representam os custos das *road trips* de tamanho um, dois e três que podem ser realizadas pela equipe $i$, de forma que:

$$c_{ij} = d_{ij} + d_{ji}, \tag{2.23}$$

$$c_{ijm} = d_{ij} + d_{jm} + d_{mi}, \tag{2.24}$$

$$c_{ijml} = d_{ij} + d_{jm} + d_{ml} + d_{li}. \tag{2.25}$$

As novas variáveis são usadas para reformular o TTPFV como o modelo (2.26)-(2.31), com $O(n^5)$ variáveis. Embora o número de variáveis tenha aumentado em relação às formulações anteriores, percebe-se que o número de restrições é consideravelmente menor.

$$\min F_5(w^1, w^2, w^3) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ (j,i)\in J}}^{n} [c_{ij} w^1_{ijk} + \sum_{\substack{m=1 \\ (m,i)\in J}}^{n} (c_{ijm} w^2_{ijmk} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,i)\in J}}^{n} c_{ijml} w^3_{ijmlk})] \tag{2.26}$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [\sum_{k\in\{-1,0\}} w^1_{ijk} + \sum_{m=1}^{n} (\sum_{k\in\{-1,0,n-1\}} w^2_{ijmk} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{k\in\{-1,0,n-2,n-1\}} w^3_{ijmlk})] = 0 \tag{2.27}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{w^1_{ijk} + \sum_{\substack{m=1\\(m,i)\in J}}^{n} [(w^2_{ijmk} + w^2_{imjk}) + \sum_{\substack{l=1\\(l,i)\in J}}^{n} (w^3_{ijmlk} + w^3_{imjlk} + w^3_{imljk})]\} = 1,$$
$$\forall (j,i) \in J \tag{2.28}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\(j,i)\in J}}^{n} \{w^1_{ijk} + \sum_{\substack{m=1\\(m,i)\in J}}^{n} [(w^2_{ijmk} + w^2_{ijm,k-1}) + \sum_{\substack{l=1\\(l,i)\in J}}^{n} (w^3_{ijmlk} + w^3_{ijml,k-1} + w^3_{ijml,k-2})]\} +$$
$$+ \sum_{\substack{j=1\\(i,j)\in J}}^{n} \{w^1_{jik} + \sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n} [(w^2_{jimk} + w^2_{jmi,k-1}) + \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} (w^3_{jimlk} + w^3_{jmil,k-1} + w^3_{jmli,k-2})]\} = 1,$$
$$i = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots,n-1 \tag{2.29}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\(j,i)\in J}}^{n} \{w^1_{ijk} + w^1_{ij,k+1} + \sum_{\substack{m=1\\(m,i)\in J}}^{n} [w^2_{ijm,k-1} + w^2_{ijmk} + w^2_{ijm,k+1} +$$
$$+ \sum_{\substack{l=1\\(l,i)\in J}}^{n} (w^3_{ijml,k-2} + w^3_{ijml,k-1} + w^3_{ijmlk} + w^3_{ijml,k+1})]\} \leq 1,$$
$$i = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots,n-2 \tag{2.30}$$

$$\sum_{q=k}^{k+3}\{ \sum_{\substack{j=1\\(j,i)\in J}}^{n} [w^1_{ijq} + \sum_{\substack{m=1\\(m,i)\in J}}^{n} ((w^2_{ijmq} + w^2_{ijm,q-1}) +$$
$$\sum_{\substack{l=1\\(l,i)\in J}}^{n} (w^3_{ijmlq} + w^3_{ijml,q-1} + w^3_{ijml,q-2}))]\} \geq 1,$$
$$i = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots,n-4 \tag{2.31}$$

$$w^1_{ijk} \in \{0,1\}, \qquad i,j = 1,\ldots,n, \text{ com } i \neq j, \quad k = -1,\ldots,n-1 \tag{2.32}$$

$$w^2_{ijmk} \in \{0,1\}, \qquad i,j,m = 1,\ldots,n, \text{ com } i \neq j \neq m, \quad k = -1,\ldots,n-1 \tag{2.33}$$

$$w^3_{ijmlk} \in \{0,1\}, \qquad i,j,m,l = 1,\ldots,n, \text{ com } i \neq j \neq m \neq l, \quad k = -1,\ldots,n-1. \tag{2.34}$$

A função objetivo (2.26) minimiza a distância total percorrida. As restrições (2.27) fixam em 0 as variáveis associadas a *road trips* iniciadas nas rodadas fictícias -1 e 0, as *road trips* de tamanho dois e três iniciadas na última rodada e aquelas de tamanho três iniciadas na rodada $n-2$. As restrições (2.28) asseguram que cada jogo ocorre exatamente uma vez. Elas representam o fato que cada jogo $(j,i) \in J$ deve ser jogado em uma *road trip* da equipe $i$ formada por um, dois ou três jogos fora de casa. As restrições (2.29) forçam que a equipe $i$ esteja jogando um jogo fora ou outra equipe esteja visitando-a em cada rodada. Isto é alcançado fixando em um a soma de todas as *road trips* da equipe $i$ que incluem a rodada $k$ com a soma de todas as *road trips* de outras equipes que visitam a equipe $i$ na rodada $k$. As restrições (2.30) proíbem a equipe $i$ de estar engajada em *road trips* simultâneas ou consecutivas (i.e., sem retornar à sua cidade) na rodada $k$. As restrições (2.31) determinam que a equipe $i$ deve estar fora de sua cidade para jogar pelo menos um jogo fora em um intervalo de quatro rodadas consecutivas. As restrições (2.32)-(2.34) garantem a integralidade das variáveis.

Esta formulação possui $O(n^2)$ restrições dos tipos (2.28) a (2.31).

# Capítulo 3

# Estudo Comparativo entre os Modelos

Este capítulo apresenta um estudo comparativo entre as formulações propostas no capítulo anterior. Primeiramente, um estudo teórico é realizado, baseando-se nos limites fornecidos pelas relaxações lineares dos modelos. Em seguida, alguns resultados experimentais são apresentados.

## 3.1 Comparação Teórica

Refere-se às formulações com $O(n^3)$, $O(n^4)$ e $O(n^5)$ variáveis, respectivamente, como os modelos N3, N4 e N5. Denota-se por $\overline{\text{N3}}$, $\overline{\text{N4}}$ e $\overline{\text{N5}}$ suas respectivas relaxações lineares. Sejam $LB3$, $LB4$ e $LB5$, respectivamente, os limites fornecidos pelas relaxações lineares das formulações N3, N4 e N5.

### 3.1.1 Comparação entre os Modelos N3 e N4

Deseja-se provar que o limite fornecido pelo modelo $\overline{\text{N4}}$ é melhor ou igual ao limite fornecido pelo modelo $\overline{\text{N3}}$. Para isto, mapeia-se uma solução do modelo $\overline{\text{N4}}$ no espaço de soluções do modelo $\overline{\text{N3}}$, ou seja, constrói-se uma solução viável para o modelo $\overline{\text{N3}}$ a partir de uma solução viável para o modelo $\overline{\text{N4}}$ tal que o valor objetivo das duas soluções seja o mesmo. Seja $\hat{x}$ uma solução viável para o modelo $\overline{\text{N4}}$ satisfazendo as restrições (2.14)-(2.21). Constrói-se uma solução $\hat{y}, \hat{z}$ para o modelo $\overline{\text{N3}}$ definindo-se

$$\hat{z}_{jtk} = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk}, \qquad j, t = 1, \ldots, n \text{ com } j \neq t, \quad k = 1, \ldots, n-1$$

$$\hat{z}_{ttk} = 0, \qquad t = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$\hat{y}_{tij} = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{tijk}, \qquad t, i, j = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i \neq j,$$

$$\hat{y}_{tit} = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{titk}, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i,$$

$$\hat{y}_{tti} = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{ttik}, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i,$$

e

$$\hat{y}_{ttt} = 0, \qquad t = 1, \ldots, n.$$

**Lema 3.1** *$\hat{y}, \hat{z}$ satisfaz (2.2).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{q=1}^{n-1} \hat{z}_{tjq} = 1, \qquad \forall\,(t, j) \in J.$$

Tem-se, pela construção das variáveis, que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \hat{z}_{jtk} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk}. \tag{3.2}$$

Pela equação (2.14), o lado direito de (3.2) é igual a 1. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\hat{z}_{jtk}) \quad = \quad 1, \qquad \forall (j, t) \in J.$$

Desta forma, a solução respeita as restrições (2.2). □

**Lema 3.3** *$\hat{y}, \hat{z}$ satisfaz às restrições (2.3).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} (\hat{z}_{tjk} + \hat{z}_{jtk}) = 1, \qquad t = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

A construção das variáveis implica em

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} (\hat{z}_{tjk} + \hat{z}_{jtk}) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{jitk} + \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk} \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{jitk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk}. \end{aligned}$$

Pela equação (2.18)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{jitk}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tijk} &= \sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{titk}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tijk}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{x}_{titk}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\hat{x}_{tijk}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tijk}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Prova-se, agora, que o lado direito de (3.4) é igual a 1, para todo $t = 1, \ldots, n$, e para todo $k = 1, \ldots, n$. Seria necessário provar somente para $k \leq n-1$, porém estes resultados serão utilizados posteriormente em outras provas. Prova-se por indução em $k$.

Considerando a primeira rodada, ao somar as restrições (2.15) e (2.16), tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{ttj1}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tij1} &= 1\\
\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{x}_{ttj1}+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{n}\hat{x}_{tij1}\right) &= 1\\
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tij1} &= 1. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Por (3.5), fica provada a igualdade para a primeira rodada. Supondo verdadeira a igualdade para $q = k$, tal que $2 \leq k \leq n-1$, deseja-se mostrar ser verdadeira também para $q = k+1$, ou seja, demonstra-se que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tijq} = 1.$$

Pelas restrições (2.17),

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tijq} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tji,q-1}\right).$$

Pela hipótese de indução,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tji,q-1} \;=\; 1.$$

Tem-se, desta forma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tijk} = 1. \quad \square \tag{3.6}$$

**Lema 3.7** *$\hat{y}, \hat{z}$ satisfaz às restrições (2.4)*

**Prova** Deseja-se mostrar que

$$\hat{y}_{tij} \geq \hat{z}_{it,k-1} + \hat{z}_{jtk} - 1, \qquad t,i,j = 1,\ldots,n \text{ com } t \neq i \neq j, \quad k = 2,\ldots,n-1,$$

o que, pela transformação das variáveis, é equivalente a provar que

$$\sum_{q=1}^{n}\hat{x}_{tijq} \geq \left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tli,k-1}\right) - 1 \qquad t,i,j = 1,\ldots,n \text{ com } t \neq i \neq j, \quad k = 2,\ldots,n-1.$$

Chega-se, pela equação (2.17), a

$$\begin{aligned}\left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tli,k-1}\right) - 1 &= \left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tilk}\right) - 1 \\ &= \hat{x}_{tijk} + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tilk} - 1.\end{aligned}$$

O primeiro somatório da expressão

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tilk}$$

representa as viagens da equipe $t$ chegando à cidade da equipe $j$ que não são precedidas por uma visita à cidade da equipe $i$. O segundo, apenas as viagens saindo da cidade da equipe $i$. Sendo assim, não há termos no primeiro somatório que também estejam presentes no segundo. Desta forma,

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tilk} \;\leq\; \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{tlmk}.$$

Tem-se por (3.6) que

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{tlmk} \quad = \quad 1.$$

Então,

$$\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\hat{x}_{tljk}+\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tilk}-1\leq 0.$$

Como consequência,

$$\sum_{q=1}^{n}\hat{x}_{tijq}\geq\hat{x}_{tijk}\geq\hat{x}_{tijk}+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}\hat{x}_{tljk}+\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tilk}-1=\left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tljk}+\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tli,k-1}\right)-1. \quad \square$$

**Lema 3.8** *$\hat{y},\hat{z}$ satisfaz às restrições (2.5).*

**Prova** Deseja-se mostrar que

$$\hat{y}_{tit}\geq\hat{z}_{it,k-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\hat{z}_{tjk}-1, \qquad t,i=1,\ldots,n \text{ com } t\neq i, \quad k=2,\ldots,n-1,$$

o que, com a transformação das variáveis, se torna

$$\sum_{q=1}^{n}\hat{x}_{titq}\geq\left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tli,k-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{jltk}\right)-1 \qquad t,i=1,\ldots,n \text{ com } t\neq i, \quad k=2,\ldots,n-1.$$

Considerando (2.18), tem-se que

$$\left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tli,k-1}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{jltk}\right)-1 \quad = \quad \left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tli,k-1}+\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk}\right)-1.$$

Sabe-se, por (2.17), que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tli,k-1}+\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk}\right)-1 \quad &= \quad \left(\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tilk}+\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk}\right)-1\\ &= \quad \left(\hat{x}_{titk}+\sum_{\substack{l=1\\ l\neq t}}^{n}\hat{x}_{tilk}+\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk}\right)-1.\end{aligned}$$

Utilizando um raciocínio semelhante ao utilizado na prova do Lema 3.7,

$$\sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n} \hat{x}_{tilk} + \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tltk} \;\; \leq \;\; \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \hat{x}_{tlmk},$$

e por (3.6)

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \hat{x}_{tlmk} \;\; = \;\; 1.$$

Desta forma,

$$\sum_{q=1}^{n} \hat{x}_{titq} \geq \hat{x}_{titk} \geq \hat{x}_{titk} + \sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n} \hat{x}_{tilk} + \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tltk} - 1 = \left( \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli,k-1} + \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{jltk} \right) - 1. \quad \square$$

**Lema 3.9** *$\hat{y}, \hat{z}$ satisfaz às restrições (2.6).*

**Prova** Deseja-se mostrar que

$$\hat{y}_{tti} \geq \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n} \hat{z}_{tj,k-1} + \hat{z}_{itk} - 1, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i, \quad k = 2, \ldots, n-1,$$

que, depois da transformação das variáveis, se torna

$$\sum_{q=1}^{n} \hat{x}_{ttiq} \geq \left( \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{jlt,k-1} \right) - 1 \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i, \quad k = 2, \ldots, n-1.$$

Pelas restrições (2.18),

$$\left( \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{jlt,k-1} \right) - 1 \;\; = \;\; \left( \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlt,k-1} \right) - 1.$$

Utilizando-se as restrições (2.17):

$$\begin{aligned} \left( \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlt,k-1} \right) - 1 \;\; &= \;\; \left( \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{ttlk} \right) - 1 \\ &= \;\; \left( \hat{x}_{ttik} + \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n} \hat{x}_{ttlk} \right) - 1. \end{aligned}$$

Utilizando-se um raciocínio semelhante ao utilizado na prova do Lema 3.7,

$$\sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n} \hat{x}_{ttlk} \quad \leq \quad \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tljk}.$$

Devido a (3.6),

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tljk} \quad = \quad 1.$$

Logo,

$$\sum_{q=1}^{n} \hat{x}_{ttiq} \geq \hat{x}_{ttik} \geq \hat{x}_{ttik} + \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n} \hat{x}_{ttlk} - 1 = \left( \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tlik} + \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{jlt,k-1} \right) - 1. \quad \square$$

**Lema 3.10** *$\hat{y}, \hat{z}$ satisfaz às restrições (2.7).*

**Prova** Deseja-se mostrar que

$$\hat{y}_{tti} \geq \hat{z}_{it1}, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i,$$

que, depois da substituição das variáveis, torna-se

$$\sum_{q=1}^{n} \hat{x}_{ttiq} \geq \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli1} \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i.$$

$$\sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli1} \quad = \quad \sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n} \hat{x}_{tli1} + \hat{x}_{tti1}.$$

Tem-se, pela equação (2.16), que

$$\sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tli1} = 0,$$

o que implica em todos os termos do somatório serem iguais a 0, ou seja,

$$\sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n} \hat{x}_{tli1} = 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Sabe-se que

$$\sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli1} = \sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n} \hat{x}_{tli1} + \hat{x}_{tti1}$$

e por (3.11)

$$\sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n} \hat{x}_{tli1} + \hat{x}_{tti1} \quad = \quad 0 + \hat{x}_{tti1}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{ttik} \geq \hat{x}_{tti1} = \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli1}. \quad \square$$

**Lema 3.12** *$\hat{y}, \hat{z}$ satisfaz às restrições (2.8).*

**Prova** Deseja-se mostrar que

$$\hat{y}_{tit} \geq \hat{z}_{it,n-1}, \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i,$$

que, substituindo as variáveis, fica

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{titk} \geq \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli,n-1} \qquad t, i = 1, \ldots, n \text{ com } t \neq i.$$

Mostra-se, a seguir, que não existe $x_{tijk}$ diferente de zero, quando $(j,t) \notin J$. Suponha, por contradição, que $\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(t,l)\in J}}^{n} \hat{x}_{tmlk} > 0$ para algum $t$. Isto leva a

$$f(t) + \sum_{l:(t,l)\in J} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \hat{x}_{tmlk} \quad > \quad f(t). \tag{3.13}$$

Como

$$\sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \hat{x}_{tmlk} \quad = \quad \sum_{l:(l,t)\in J} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \hat{x}_{tmlk} + \sum_{l:(t,l)\in J} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \hat{x}_{tmlk}$$

e devido ao fato de ter-se

$$\begin{aligned} \sum_{l:(l,t)\in J} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n} \hat{x}_{tmlk} \quad &= \quad \sum_{l:(l,t)\in J} 1 \\ &= \quad f(t), \end{aligned} \tag{3.14}$$

por (3.13), chega-se a

$$\sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{tmlk} > f(t). \tag{3.15}$$

A restrição (2.18) implica em

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{jltk}\\ &\geq \sum_{j:(t,j)\in J}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{jltk}.\end{aligned}$$

Utilizando-se (2.14),

$$\begin{aligned}\sum_{l:(t,l)\in J}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{lmtk} &= \sum_{l:(t,l)\in J} 1.\\ &= c(t). \end{aligned}\tag{3.16}$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk} \geq c(t). \tag{3.17}$$

Somando-se (3.15) e (3.17) tem-se

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk} > f(t) + c(t) = n-1. \tag{3.18}$$

Porém, a quantidade de viagens feitas pela equipe $t$ em todas as rodadas é, por (3.6)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tljk} &= \sum_{k=1}^{n-1} 1\\ \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\hat{x}_{tljk} + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk} &= n-1.\end{aligned}$$

Portanto, (3.18) é uma contradição. Pode-se afirmar, desta forma, que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(t,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{tljk} = 0. \tag{3.19}$$

Somando-se as restrições (2.18) em $k$, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{l=1\\l\neq t}}^{n}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{lmtk}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{tmtk}. \tag{3.20}$$

A equação (3.20), com o auxílio de (3.19), torna-se

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{j=1\\(t,j)\in J}}^{n}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{jltk}=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk},$$

e por (3.16)

$$c(t) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk}. \tag{3.21}$$

Subtraindo (3.21) de (2.19), tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_{tltk}-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltk} &= c(t)+1-c(t)\\ \sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltn} &= 1.\end{aligned} \tag{3.22}$$

A equação (3.22) é a quantidade de viagens realizadas pela equipe $t$ na rodada $k$. Como já demonstrado por (3.6), esta quantidade é igual a um em toda rodada. Subtraindo (3.22) de $\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tljn}=1$,

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tljn}-\sum_{l=1}^{n}\hat{x}_{tltn} &= 1-1\\ \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\hat{x}_{tljn} &= 0.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Pode-se concluir por (3.23) que,

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\hat{x}_{tljn}=0, \qquad l=1,\ldots,n. \tag{3.24}$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tijn} \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} \hat{x}_{tijn} + \hat{x}_{titn}$$

e por (3.24)

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} \hat{x}_{tijn} + \hat{x}_{titn} \;=\; \hat{x}_{titn}.$$

Porém,

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{titk} \geq \hat{x}_{titn} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tijn},$$

e (2.17) implica

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tijn} \;=\; \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli,n-1}.$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{titk} \geq \sum_{l=1}^{n} \hat{x}_{tli,n-1}. \qquad \square$$

**Lema 3.25** *$\hat{y}, \hat{z}$ satisfaz as restrições (2.9) e (2.10).*

**Prova** As restrições (2.9) e (2.10) determinam

$$1 \leq \sum_{k=q}^{q+3} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} \hat{z}_{jtk} \leq 3 \quad \forall\, 1 \leq t \leq n, 1 \leq q \leq n-4.$$

Pelas transformações das variáveis

$$\sum_{k=q}^{q+3} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} \hat{z}_{jtk} = \sum_{k=q}^{q+3} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk} \right).$$

Como as restrições (2.20) e (2.21) implicam em

$$1 \leq \sum_{k=q}^{q+3} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk} \leq 3 \quad \forall\, 1 \leq t \leq n, 1 \leq q \leq n-4,$$

a solução satisfaz às restrições. $\square$

**Lema 3.26** $F_3(\hat{y}, \hat{z}) = F_4(\hat{x})$

**Prova** Demonstra-se, agora, que $F_4(\hat{x}) = F_3(\hat{z}, \hat{y})$ como segue.

$$\begin{aligned} F_4(\hat{x}) &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{tijk} d_{ij} \\ &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \left( \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{tijk} \right) \\ &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} \left( \hat{y}_{tij} \right) \\ &= F_3(\hat{z}, \hat{y}). \end{aligned}$$

**Teorema 3.27** $LB4 \geq LB3$.

**Prova** Seja $x^*$ uma solução ótima para $\overline{\text{N4}}$. Constrói-se uma solução $\breve{y}, \breve{z}$ para $\overline{\text{N3}}$ a partir de $x^*$, como descrito anteriormente. Portanto, o teorema é verdadeiro, uma vez que $LB4 = F_4(x^*) = F_3(\breve{y}, \breve{z}) \geq F_3(y^*, z^*) = LB3$, onde $y^*, z^*$ é uma solução ótima para $\overline{\text{N3}}$. $\square$

### 3.1.2 Comparação entre os Modelos N4 e N5

Deseja-se provar que o limite fornecido pelo modelo $\overline{\text{N5}}$ é melhor ou igual ao fornecido pelo modelo $\overline{\text{N4}}$. Para isto, constrói-se, a partir de uma solução viável para o modelo $\overline{\text{N5}}$, uma solução viável para o modelo $\overline{\text{N4}}$ com o mesmo valor objetivo. Seja $\hat{w}^1, \hat{w}^2, \hat{w}^3$ uma solução viável para $\overline{\text{N5}}$. Uma solução $\hat{x}$ para $\overline{\text{N4}}$ é construída como se segue:

$$\hat{x}_{tijk} = \hat{w}^2_{tij,k-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^3_{tijl,k-1} + \hat{w}^3_{tlij,k-2} \right) \qquad t = 1, \ldots, n, \quad i : (i,t) \in J, \quad j : (j,t) \in J$$

$$k = 1, \ldots, n-1, \text{ com } i \neq j$$

$$\hat{x}_{ttjk} = \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjlk} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjlmk} \qquad t = 1, \ldots, n, \quad j : (j,t) \in J$$

$$k = 1, \ldots, n-1$$

$$\hat{x}_{tjtk} = \hat{w}^1_{tj,k-1} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tlj,k-2} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tlmj,k-3} \qquad t=1,\ldots,n, \quad j:(j,t)\in J,$$
$$k=2,\ldots,n,$$

$$\hat{x}_{tttk} = 1 - \sum_{\substack{i=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tijk} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttjk} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjtk} \quad \forall 1 \leq t,k \leq n,$$

e para as variáveis não especificadas nas atribuições anteriores, $\hat{x}_{tijk} = 0$.

**Lema 3.28** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.14).*

**Prova** Deseja-se mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk} = 1 \qquad \forall (j,t) \in J.$$

Tem-se que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijk} = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n} \hat{x}_{tijk} + \hat{x}_{ttjk} \right).$$

Pela definição das variáveis,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n} \hat{x}_{tijk} + \hat{x}_{ttjk} \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tijk} + \hat{x}_{ttjk} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \left[ \hat{w}^2_{tij,k-1} + \sum_{\substack{l\\(l,t)\in J}} \left( \hat{w}^3_{tijl,k-1} + \hat{w}^3_{tlij,k-2} \right) \right] \right. \\
&+ \left. \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{tjlk} + \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjlmk} \right) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{tlj,k-1} + \hat{w}^2_{tjl,k} \right) \right. \\
&+ \left. \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^3_{tjilk} + \hat{w}^3_{tijl,k-1} + \hat{w}^3_{tlij,k-2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^2_{tlj,k-1} + \hat{w}^2_{tjl,k}\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^3_{tjilk} + \hat{w}^3_{tijl,k-1} + \hat{w}^3_{tlij,k-2}\right).
\end{aligned}
$$

Eliminando-se os termos nulos, chega-se a

$$
\sum_{k=1}^{n-1} \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^2_{tjlk} + \hat{w}^2_{tljk}\right) + \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^3_{tjlmk} + \hat{w}^3_{tljmk} + \hat{w}^3_{tlmjk}\right),
$$

que, pelas restrições (2.28), é igual a 1. □

**Lema 3.29** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.15).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$
\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ttj1} = 1 \qquad t = 1, \ldots, n.
$$

Tem-se, pelas definições das variáveis, que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ttj1} &= \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttj1} + \hat{x}_{ttt1} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttj1} + 1 - \sum_{\substack{i=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tij1} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttj1} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjt1} \\
&= 1 - \sum_{\substack{i=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tij1} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjt1} \\
&= 1 - \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \left[\hat{w}^2_{tij0} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^3_{tijl0} + \hat{w}^3_{tlij,-1}\right)\right] \\
&- \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^1_{tj0} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tlj,-1}\right) \\
&= 1. \quad \square
\end{aligned}
$$

**Lema 3.30** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.17).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tijk} = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tji,k-1} \qquad t,i = 1,\ldots,n, \quad k = 2,\ldots,n.$$

Dois casos são analisados, quando $t = i$ e quando $t \neq i$.

(A) Quando $t = i$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ttjk} = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tjt,k-1}. \tag{3.31}$$

O lado esquerdo da equação (3.31) fica

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ttjk} &= \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttjk} + \hat{x}_{tttk} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttjk} + 1 - \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tljk} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttjk} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjtk} \\
&= 1 - \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tljk} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjtk} \\
&= 1 - \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \left[ \hat{w}^2_{tlm,k-1} + \sum_{\substack{h=1\\(h,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^3_{tlmh,k-1} + \hat{w}^3_{thlm,k-2} \right) \right] \\
&- \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \left[ \hat{w}^1_{tj,k-1} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{tlj,k-2} + \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tlmj,k-3} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Já o lado direito, fica

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tjt,k-1} &= \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjt,k-1} + \hat{x}_{ttt,k-1} \\
&= \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjt,k-1} + 1 - \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tlj,k-1} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttj,k-1} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tjt,k-1} \\
&= 1 - \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tlj,k-1} - \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{ttj,k-1}
\end{aligned}$$

$$= 1 - \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \left[ \hat{w}^2_{tlm,k-2} + \sum_{\substack{h=1 \\ (h,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^3_{tlmh,k-2} + \hat{w}^3_{thlm,k-3} \right) \right]$$

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \left[ \hat{w}^1_{tj,k-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{tjl,k-1} + \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjlm,k-1} \right) \right]. \quad (3.33)$$

Subtraindo-se o lado direito de (3.33) do lado direito de (3.32), obtém-se zero. Portanto, os lados esquerdo e direito da equação (3.31) são iguais e prova-se que as restrições são satisfeitas quando $t = i$.

(B) Quando $t \neq i$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tijk} = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tji,k-1}. \quad (3.34)$$

O lado esquerdo da equação (3.34) fica

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tijk} &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tijk} + \hat{x}_{titk} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \left[ \hat{w}^2_{tij,k-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^3_{tijl,k-1} + \hat{w}^3_{tlij,k-2} \right) \right] \\ &+ \hat{w}^1_{ti,k-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{tli,k-2} + \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tlmi,k-3} \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Já o lado direito, fica

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tji,k-1} &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tji,k-1} + \hat{x}_{tti,k-1} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \left[ \hat{w}^2_{tji,k-2} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^3_{tjil,k-2} + \hat{w}^3_{tlji,k-3} \right) \right] \\ &+ \hat{w}^1_{ti,k-1} + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{til,k-1} + \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tilm,k-1} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Subtraindo-se o lado direito de (3.36) do lado direito de (3.35), obtém-se zero. Portanto, os lados esquerdo e direito da equação (3.34) são iguais e prova-se que as restrições são satisfeitas quando $t \neq i$.

Desta forma, a solução respeita as restrições. $\square$

**Lema 3.37** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.18).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tijk}=\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{jijk} \qquad j=1,\ldots,n, \quad k=1,\ldots,n-1. \tag{3.38}$$

O lado esquerdo da equação (3.38) fica

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{t=1\\t\neq j}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tijk} &= \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n}\left(\sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n}\hat{x}_{tijk}+\hat{x}_{ttjk}\right)\\
&= \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n}\left[\hat{w}^2_{tij,k-1}+\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^3_{tijl,k-1}+\hat{w}^3_{tlij,k-2}\right)\right]\\
&+ \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n}\hat{w}^1_{tjk}+\sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\hat{w}^2_{tjlk}+\sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n}\hat{w}^3_{tjlmk}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Já o lado direito, fica

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{jijk} &= \sum_{\substack{i=1\\(i,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{jijk}+\hat{x}_{jjjk}\\
&= \sum_{\substack{i=1\\(i,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{jijk}+1-\sum_{\substack{i=1\\(i,j)\in J}}^{n}\sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{jti,k-1}-\sum_{\substack{i=1\\(i,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{jji,k-1}-\sum_{\substack{i=1\\(i,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{jij,k-1}\\
&= 1-\sum_{\substack{i=1\\(i,j)\in J}}^{n}\sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{jti,k-1}-\sum_{\substack{i=1\\(i,j)\in J}}^{n}\hat{x}_{jji,k-1}\\
&= 1-\sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n}\sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^2_{jlm,k-1}+\sum_{\substack{h=1\\(h,j)\in J}}^{n}\hat{w}^3_{jlmh,k-2}+\sum_{\substack{h=1\\(h,j)\in J}}^{n}\hat{w}^3_{jlmh,k-1}\right)\\
&- \sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n}\hat{w}^1_{jtk}-\sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n}\hat{w}^2_{jtlk}-\sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n}\sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n}\hat{w}^3_{jtlmk}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Igualando-se as expressões (3.39) e (3.40), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{tij,k-1} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tijl,k-1} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tlij,k-2} \right) \\
+ & \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjlk} + \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjlmk} \\
= & \; 1 - \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{jlm,k-1} + \sum_{\substack{h=1\\(h,j)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{jlmh,k-2} + \sum_{\substack{h=1\\(h,j)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{jlmh,k-1} \right) \\
- & \sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{jtk} - \sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{jtlk} - \sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{jtlmk},
\end{aligned}$$

o que leva a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{jtk} + \sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{jtlk} + \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{jlm,k-1} \\
+ & \sum_{\substack{t=1\\(t,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{jtlmk} + \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{h=1\\(h,j)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{jlmh,k-1} + \sum_{\substack{l=1\\(l,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,j)\in J}}^{n} \sum_{\substack{h=1\\(h,j)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{jlmh,k-2} \\
+ & \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjlk} + \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tij,k-1} \\
+ & \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjlmk} + \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tijl,k-1} + \sum_{\substack{t=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tlij,k-2} \\
= & \; 1. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Por (2.29), o lado esquerdo da equação (3.41) é igual a um e, assim, as restrições são satisfeitas. □

**Lema 3.42** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.19).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{titk} = h(t) + 1 \qquad t = 1, \ldots, n.$$

Considerando-se as $n-1$ primeiras rodadas, tem-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{tmtk} &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\substack{m=1\\m\neq t}}^{n}\hat{x}_{tmtk}+\sum_{k=1}^{n-1}\hat{x}_{tttk}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{\substack{m=1\\m\neq t}}^{n}\hat{x}_{tmtk}+1-\sum_{\substack{c=1\\c\neq t}}^{n}\sum_{\substack{d=1\\d\neq t}}^{n}\hat{x}_{tcdk}-\sum_{\substack{d=1\\d\neq t}}^{n}\hat{x}_{ttdk}-\sum_{\substack{c=1\\c\neq t}}^{n}\hat{x}_{tctk}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\sum_{\substack{c=1\\c\neq t}}^{n}\sum_{\substack{d=1\\d\neq t}}^{n}\hat{x}_{tcdk}-\sum_{\substack{d=1\\d\neq t}}^{n}\hat{x}_{ttdk}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\sum_{c=1}^{n}\sum_{\substack{d=1\\d\neq t}}^{n}\hat{x}_{tcdk}\right). \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Observa-se que o resultado de (3.43) é o número de rodadas consideradas subtraído da quantidade de jogos fora da equipe $t$, o que é exatamente igual ao número de jogos em casa $c(t)$ da equipe $t$. Desta forma,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n}\hat{x}_{tmtk}=c(t). \qquad (3.44)$$

Basta, então, provar-se que $\sum_i \hat{x}_{titn}=1$, para qualquer equipe $t=1,\ldots,n$.

A quantidade de viagens realizadas pela equipe $t$ na rodada $n$ é

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{x}_{tijn} &= \sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\hat{x}_{tijn}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n}\hat{x}_{titn}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\hat{x}_{ttjn}+\hat{x}_{tttn}\\
&= \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\hat{x}_{tijn}+\sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n}\hat{x}_{titn}+\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\hat{x}_{ttjn}+1\\
&- \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\hat{x}_{tijn}-\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\hat{x}_{ttjn}-\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\hat{x}_{tjtn}\\
&= 1. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Tem-se que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_{titk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\hat{x}_{titk}+\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{titn},$$

cujo lado direito, devido a (3.44) e (3.45), é

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1}\hat{x}_{titk}+\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{titn} \quad = \quad c(t)+1. \quad \square$$

**Lema 3.46** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.20).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{q=k}^{k+3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tijq}\leq 3 \qquad t=1,\ldots,n, \quad k=1,\ldots,n-4.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tijk} \quad &= \quad \sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq t}}^{n}\hat{x}_{tijk}+\sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{n}\hat{x}_{ttjk}\\
&= \quad \sum_{k=q}^{q+3}\;\sum_{\substack{j=1\\ (j,t)\in J}}^{n}\;\sum_{\substack{i=1\\ (i,t)\in J}}^{n}\left[\hat{w}^{2}_{tij,k-1}+\sum_{\substack{l=1\\ (l,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^{3}_{tijl,k-1}+\hat{w}^{3}_{tlij,k-2}\right)\right]\\
&+ \quad \sum_{k=q}^{q+3}\;\sum_{\substack{j=1\\ (j,t)\in J}}^{n}\left[\hat{w}^{1}_{tjk}+\sum_{\substack{l=1\\ (l,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^{2}_{tjlk}+\sum_{\substack{m=1\\ (m,t)\in J}}^{n}\hat{w}^{3}_{tjlmk}\right)\right].
\end{aligned}$$

Desmembrando-se os somatórios em $k$, chega-se a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j=1\\ (j,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^{1}_{tjq}+\hat{w}^{1}_{tj,q+1}+\hat{w}^{1}_{tj,q+2}+\hat{w}^{1}_{tj,q+3}\right)\\
+\;&\sum_{\substack{j=1\\ (j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ (i,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^{2}_{tij,q-1}+2\hat{w}^{2}_{tijq}+2\hat{w}^{2}_{tij,q+1}+2\hat{w}^{2}_{tij,q+2}+\hat{w}^{2}_{tij,q+3}\right)\\
+\;&\sum_{\substack{j=1\\ (j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ (i,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ (l,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^{3}_{tijl,q-2}+2\hat{w}^{3}_{tijl,q-1}+3\hat{w}^{3}_{tijlq}+3\hat{w}^{3}_{tijl,q+1}+2\hat{w}^{3}_{tijl,q+2}\right.\\
+\;&\left.\hat{w}^{3}_{tijl,q+3}\right). \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Analisam-se as restrições (2.30). Para cada $i$, somando-se as restrições referentes às três rodadas consecutivas $q$, $q+1$ e $q+2$, para $1\leq q\leq n-4$, tem-se

$$\sum_{\substack{j=1\\ (j,t)\in J}}^{n}\hat{w}^{1}_{tjq}+\sum_{\substack{j=1\\ (j,t)\in J}}^{n}\hat{w}^{1}_{tj,q+1}$$

$$
\begin{aligned}
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tmj,q-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjmq} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjm,q+1} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tmlj,q-2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjml,q-1} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tmljq} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjml,q+1} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{tj,q+1} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{tj,q+2} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tmjq} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjm,q+1} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjm,q+2} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tmlj,q-1} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjmlq} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tmlj,q+1} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjml,q+2} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{tj,q+2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \hat{w}^1_{tj,q+3} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tmj,q+1} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjm,q+2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \hat{w}^2_{tjm,q+3} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tmljq} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjml,q+1} \\
+ & \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tmlj,q+2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1 \\ (m,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tjml,q+3} \\
\leq & \;\; 3 \quad \forall\, 1 \leq t \leq n, 1 \leq q \leq n-4. \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

Todos os termos de (3.48) estão também presentes em (3.47). Considerando-se que todos os termos são não nulos, o lado esquerdo de (3.48) é maior ou igual que o lado esquerdo de (3.47). Desta forma, chega-se a

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^1_{tjk} + \hat{w}^1_{tj,k+1} + \hat{w}^1_{tj,k+2} + \hat{w}^1_{tj,k+3}\right) \\
+ \; & \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^2_{tij,k-1} + 2\hat{w}^2_{tijk} + 2\hat{w}^2_{tij,k+1} + 2\hat{w}^2_{tij,k+2} + \hat{w}^2_{tij,k+3}\right) \\
+ \; & \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^3_{tijl,k-2} + 2\hat{w}^3_{tijl,k-1} + 3\hat{w}^3_{tijlk} + 3\hat{w}^3_{tijl,k+1} + 2\hat{w}^3_{tijl,k+2}\right. \\
+ \; & \left.\hat{w}^3_{tijl,k+3} + \hat{w}^3_{tijl,k-2} + \hat{w}^3_{tijl,k-2}\right) \\
\leq \; & 3 \quad \forall\, 1 \leq t \leq n, 1 \leq k \leq n-4. \quad \square
\end{aligned}
$$

**Lema 3.49** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.16).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tij1} = 0 \qquad t = 1, \ldots, n.$$

A prova é simples, pois

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{tij1} &= \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tij1} + \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \hat{x}_{tit1} \\
&= \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \left( \hat{w}^2_{tij0} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tijl0} + \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \hat{w}^3_{tlij,-1} \right) \\
&+ \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \left(\hat{w}^1_{tit0} + \hat{w}^2_{tlj,-1}\right),
\end{aligned}
$$

que, por conter apenas *road trips* iniciadas nas rodadas -1 e 0, é igual a 0. $\square$

**Lema 3.50** *$\hat{x}$ satisfaz às restrições (2.21).*

**Prova** Deseja-se provar que

$$\sum_{q=k}^{k+3} \sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n} \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_{tijq} \geq 1 \qquad t = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-4. \tag{3.51}$$

Pela definição das variáveis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_{tijk} &= \sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\left(\sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n}\hat{x}_{tijk}+\hat{x}_{ttjk}\right)\\
&= \sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}\left[\hat{w}^2_{tij,k-1}+\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^3_{tijl,k-1}+\hat{w}^3_{tlij,k-2}\right)\right]\\
&+ \sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\left[\hat{w}^1_{tjk}+\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^2_{tjlk}+\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n}\hat{w}^3_{tjlmk}\right)\right],
\end{aligned}$$

e, por (2.31),

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}\left[\hat{w}^2_{tij,k-1}+\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^3_{tijl,k-1}+\hat{w}^3_{tlij,k-2}\right)\right]\\
+&\sum_{k=q}^{q+3}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\left(\hat{w}^1_{tjk}+\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\hat{w}^2_{tjlk}+\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n}\hat{w}^3_{tjlmk}\right)\geq 1. \quad \square
\end{aligned}$$

**Lema 3.52** $F_4(\hat{x}) = F_5(\hat{w}^1,\hat{w}^2,\hat{w}^3)$

**Prova** Demonstra-se a seguir que $F_4(\hat{x}) = F_5(\hat{w}^1,\hat{w}^2,\hat{w}^3)$.

$$\begin{aligned}
F_4(\hat{x}) &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_{tijk}d_{ij}\\
&= \sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i\neq t}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_{tijk}d_{ij}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\i\neq t}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_{titk}d_{it}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq t}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{x}_{ttjk}d_{tj}\\
&= \left(\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{w}^1_{tjk}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{w}^2_{tjlk}\right.\\
&+ \left.\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{w}^3_{tjlmk}\right)\times d_{tj}\\
&+ \left(\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{w}^2_{tij,k-1}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n}\sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{w}^3_{tijl,k-1}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left.\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{w}^3_{tijl,k-2}\right) \times d_{ij} \\
&+ \left(\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{w}^1_{ti,k-1} + \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{w}^2_{tli,k-2}\right. \\
&+ \left.\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \hat{w}^3_{tlmi,k-3}\right) \times d_{it}.
\end{aligned}
$$

Retirando-se as variáveis anuladas por (2.27), tem-se

$$
\begin{aligned}
F_4(\hat{x}) \;=\; & \left(\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{w}^1_{tjk} + \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-2} \hat{w}^2_{tjlk}\right. \\
&+ \left.\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-3} \hat{w}^3_{tjlmk}\right) \times d_{tj} \\
&+ \left(\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-2} \hat{w}^2_{tijk} + \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-3} \hat{w}^3_{tijlk}\right. \\
&+ \left.\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-3} \hat{w}^3_{tijlk}\right) \times d_{ij} \\
&+ \left(\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{w}^1_{tik} + \sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-2} \hat{w}^2_{tlik}\right. \\
&+ \left.\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{m=1\\(m,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-3} \hat{w}^3_{tlmik}\right) \times d_{it}.
\end{aligned}
$$

Reorganizando-se os termos, chega-se a

$$
\begin{aligned}
F_4(\hat{x}) = & \left(\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} \hat{w}^1_{tjk}\right)(d_{tj} + d_{jt}) + \left(\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-2} \hat{w}^2_{tijk}\right)(d_{ti} + d_{ij} + d_{jt}) \\
&+ \left(\sum_{t=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\(i,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{j=1\\(j,t)\in J}}^{n} \sum_{\substack{l=1\\(l,t)\in J}}^{n} \sum_{k=1}^{n-3} \hat{w}^3_{tijlk}\right)(d_{ti} + d_{ij} + d_{jl} + d_{lt})\,. \qquad (3.53)
\end{aligned}
$$

Como

$$d_{tj} + d_{jt} = c_{tj},$$

$$d_{ti} + d_{ij} + d_{jt} = c_{tij}$$

e

$$d_{ti} + d_{ij} + d_{jl} + d_{lt} = c_{tijl},$$

tem-se, por (3.53), que $F_4(\hat{x}) = F_5(\hat{w}^1, \hat{w}^2, \hat{w}^3)$. $\square$

**Teorema 3.54** *$LB4 \leq LB5$.*

**Prova** Seja $w^{1*}, w^{2*}, w^{3*}$ uma solução ótima para $\overline{\text{N5}}$. Constrói-se uma solução $\breve{x}$ como descrito anteriormente a partir de $w^{1*}, w^{2*}, w^{3*}$. Portanto, o teorema é verdadeiro, uma vez que $LB5 = F_5(w^{1*}, w^{2*}, w^{3*}) = F_4(\breve{x}) \geq F_4(x^*) = LB4$, onde $x^*$ é uma solução ótima para $\overline{\text{N4}}$. $\square$

## 3.2 Resultados Experimentais

Com o intuito de avaliar e comparar os modelos de programação inteira propostos, foram criadas 20 atribuições casa-fora para cada uma das instâncias *national league (nl)* e para cada uma das instâncias circulares (*circ*) do TTP disponíveis em [26]. Das vinte instâncias criadas a partir de cada instância do TTP utilizada como base, dez possuem suas atribuições casa-fora determinadas aleatoriamente. As outras dez instâncias correspondem a atribuições casa-fora balanceadas: os estádios de todos os jogos são selecionados aleatoriamente e em seguida, aplica-se o método iterativo de Knust e Thaden [16] para balanceá-los.

Os modelos foram resolvidos pelo CPLEX 10.0, utilizando-se a API Concert Technology compilada com g++ 4.0.2. Os experimentos computacionais foram realizados em um computador Dell Optiplex com processador Pentium D de 3.0 GHz e 2 Gbytes de memória RAM, utilizando o sistema operacional Linux versão 2.6.12.

As relaxações lineares das três formulações descritas no Capítulo 2 foram resolvidas para todas as instâncias. Os resultados são relatados nas Tabelas 3.1 e 3.2 para as instâncias *nl* e nas Tabelas 3.3 e 3.4 para as instâncias *circ*. Para cada valor de $n$, a segunda coluna mostra o número de instâncias viáveis. A terceira, quarta e quinta colunas das tabelas mostram, respectivamente, os limites médios fornecidos pelos modelos N3, N4 e N5 para as instâncias viáveis. As quatro últimas colunas fornecem os desvios percentuais médio e máximo entre os limites $LB3$ e $LB5$ e entre os limites $LB4$ e $LB5$, i.e., a melhoria de $LB5$ em relação a $LB3$ e a $LB4$, sendo $gap_{5,3} = (LB5 - LB3) \times 100/LB3$ e $gap_{5,4} = (LB5 - LB4) \times 100/LB4$.

As médias dos limites $LB5$ fornecidos pelo modelo N5 são muito superiores às geradas pela formulação N3. Como exemplos, para as instâncias *nl*, o limite médio $LB5$ para $n = 16$ é mais de 17 vezes maior (desvio percentual médio de 1805.62%) do que o limite médio $LB3$ no caso das instâncias aleatórias e mais de 20 vezes maior (desvio percentual médio de 2004.97%) no caso das balanceadas.Já para as instâncias *circ*, quando $n = 20$, por exemplo, o limite médio $LB5$ chega a ser 41 vezes maior (desvio percentual médio de 4102.11%) do que o limite médio $LB3$ no caso das instâncias aleatórias e 43 vezes maior (desvio percentual médio de 4230.67%) no caso das balanceadas.

Comparando-se os limites médios $LB5$ com $LB4$, a melhora encontrada também foi bastante significativa. Por exemplo, os limites médios $LB5$ fornecidos foram mais de cinco vezes maior (desvio percentual médio de 549.76%) do que os limites $LB4$ para as instâncias *nl* aleatórias com 14 equipes e mais de seis vezes maiores (desvio percentual médio de 609.22%) do que os limites $LB4$ para as instâncias *nl* balanceadas com 16 equipes. Esta melhoria também pode ser observada para as instâncias *circ*. Considerando-se as instâncias com 20 equipes, por exemplo, os limites médios fornecidos $LB5$ foram mais de seis vezes maior (desvio percentual médio de 684.96%) do que os limites $LB4$ para as instâncias aleatórias e mais de sete vezes maior (desvio percentual médio de 723.70%) para as balanceadas. A melhoria de $LB5$ é bem perceptível em relação a $LB4$, porém fica ainda mais evidente quando se analisa em relação a $LB3$.

Pode ser observado que a diferença entre os limites fornecidos pelos modelos é mais acentuada nas instâncias balanceadas do que nas aleatórias, de forma que as diferenças média e máxima são maiores em quase todos os casos. Para as instâncias *nl*, com exceção daquelas com apenas quatro equipes, as diferenças entre os limites médios $LB5$ e $LB3$ e entre os limites médios $LB5$ e $LB4$ foram maiores para as instâncias balanceadas, enquanto as diferenças máximas foram maiores em mais da metade dos diferentes tamanhos de instâncias ($n = 4, 10, 12, 16$). Considerando-se as instâncias *circ*, a média das diferenças entre os limites $LB5$ e $LB3$ e entre os limites $LB5$ e $LB4$ foi maior em todos os casos para as instâncias balanceadas, enquanto o desvio máximo foi maior em dois terços dos diferentes tamanhos de instâncias ($n = 6, 8, 12, 14, 18, 20$).

Tabela 3.1: Limites fornecidos pelas relaxações lineares para as instâncias *nl* aleatórias

| $n$ | Viáveis | $LB3$ | $LB4$ | $LB5$ | avg($gap_{5,3}$) (%) | max($gap_{5,3}$) (%) | avg($gap_{5,4}$) (%) | max($gap_{5,4}$) (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 2064.92 | 2090.67 | 5227.70 | 153.16 | 191.59 | 150.05 | 188.57 |
| 6 | 7 | 3716.91 | 5503.67 | 13756.31 | 273.03 | 312.10 | 154.32 | 210.15 |
| 8 | 10 | 4558.85 | 7600.34 | 21675.06 | 401.57 | 550.88 | 214.08 | 350.24 |
| 10 | 6 | 3858.40 | 7175.11 | 32390.32 | 740.40 | 788.92 | 357.24 | 430.72 |
| 12 | 9 | 5989.87 | 14520.32 | 57930.83 | 877.94 | 984.17 | 333.60 | 514.68 |
| 14 | 7 | 6658.78 | 15968.46 | 103499.29 | 1455.36 | 1533.61 | 549.76 | 596.60 |
| 16 | 9 | 7280.00 | 24599.24 | 135829.89 | 1805.62 | 1996.64 | 484.61 | 607.84 |

Tabela 3.2: Limites fornecidos pelas relaxações lineares para as instâncias *nl* balanceadas

| $n$ | Viáveis | $LB3$ | $LB4$ | $LB5$ | avg($gap_{5,3}$) (%) | max($gap_{5,3}$) (%) | avg($gap_{5,4}$) (%) | max($gap_{5,4}$) (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 2063.90 | 2090.67 | 5097.50 | 147.00 | 191.24 | 143.82 | 186.80 |
| 6 | 10 | 2992.80 | 3896.80 | 14134.90 | 372.42 | 396.69 | 262.73 | 274.92 |
| 8 | 10 | 3456.92 | 4991.71 | 21278.91 | 515.59 | 536.58 | 326.28 | 340.37 |
| 10 | 10 | 3704.52 | 6218.44 | 32573.49 | 779.29 | 809.42 | 423.82 | 440.13 |
| 12 | 10 | 5377.26 | 9482.18 | 58432.26 | 986.73 | 1017.92 | 516.23 | 533.14 |
| 14 | 10 | 6533.32 | 15325.50 | 103722.30 | 1487.59 | 1529.30 | 576.80 | 593.96 |
| 16 | 10 | 6440.18 | 19114.40 | 135563.90 | 2004.97 | 2040.95 | 609.22 | 621.46 |

Tabela 3.3: Limites fornecidos pelas relaxações lineares para as instâncias *circ* aleatórias

| $n$ | Viáveis | $LB3$ | $LB4$ | $LB5$ | avg($gap_{5,3}$) (%) | max($gap_{5,3}$) (%) | avg($gap_{5,4}$) (%) | max($gap_{5,4}$) (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 4.94 | 5.33 | 12.60 | 154.50 | 180.00 | 136.25 | 162.50 |
| 6 | 7 | 8.50 | 13.6 | 35.90 | 329.52 | 410.81 | 167.09 | 224.07 |
| 8 | 8 | 14.53 | 29.92 | 73.78 | 431.45 | 702.81 | 156.29 | 282.81 |
| 10 | 7 | 12.81 | 33.43 | 132.76 | 971.62 | 1197.72 | 303.46 | 370.40 |
| 12 | 10 | 15.03 | 49.54 | 214.23 | 1402.89 | 1667.04 | 358.40 | 450.00 |
| 14 | 8 | 16.35 | 60.65 | 326.62 | 1907.82 | 2179.34 | 439.15 | 455.73 |
| 16 | 10 | 18.90 | 83.77 | 471.70 | 2488.63 | 2860.97 | 502.15 | 596.29 |
| 18 | 8 | 19.24 | 91.67 | 649.38 | 3294.49 | 3528.10 | 609.96 | 655.17 |
| 20 | 8 | 20.83 | 113.73 | 869.29 | 4102.11 | 4252.44 | 684.96 | 729.35 |

Tabela 3.4: Limites fornecidos pelas relaxações lineares para as instâncias *circ* balanceadas

| $n$ | Viáveis | $LB3$ | $LB4$ | $LB5$ | avg($gap_{5,3}$) (%) | max($gap_{5,3}$) (%) | avg($gap_{5,4}$) (%) | max($gap_{5,4}$) (%) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 4.94 | 5.33 | 13.40 | 171.00 | 180.00 | 151.25 | 162.50 |
| 6 | 10 | 6.92 | 10.80 | 34.70 | 402.08 | 444.19 | 221.30 | 233.33 |
| 8 | 10 | 8.74 | 18.29 | 71.70 | 720.81 | 747.78 | 292.11 | 297.40 |
| 10 | 10 | 10.49 | 27.78 | 131.07 | 1150.98 | 1194.31 | 371.84 | 382.40 |
| 12 | 10 | 12.13 | 39.27 | 213.57 | 1659.98 | 1684.34 | 443.80 | 451.70 |
| 14 | 10 | 14.15 | 52.77 | 326.30 | 2206.79 | 2250.43 | 518.35 | 527.89 |
| 16 | 10 | 16.07 | 68.27 | 466.00 | 2800.43 | 2850.29 | 582.62 | 595.80 |
| 18 | 10 | 18.02 | 85.76 | 647.30 | 3490.46 | 3548.08 | 654.74 | 666.44 |
| 20 | 10 | 20.02 | 105.26 | 867.05 | 4230.67 | 4292.39 | 723.70 | 735.05 |

As formulações também foram comparadas com relação à capacidade do resolvedor de encontrar soluções inteiras ótimas. Executou-se o CPLEX por um período máximo de duas horas para resolver cada instância, utilizando-se cada uma das três formulações. Os resultados são apresentados nas Tabelas 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8. Para cada número de equipes, são fornecidos o número de instâncias para as quais o resolvedor encontrou solução viável (nas tabelas, para todas as instâncias consideradas não-viáveis o resolvedor provou a inviabilidade), o número de instâncias resolvidas até provar-se a otimalidade utilizando os modelos N3, N4 e N5, o percentual médio de $LB5$ em relação ao valor ótimo $F_3^*$, dado por $(LB5/F_3^*) \times 100$, e os tempos médio e máximo para encontrar a solução ótima utilizando-se os modelos N5 e N4. Os três modelos foram capazes de encontrar as soluções ótimas para todas as instâncias *nl* e *circ* pequenas com $n \leq 6$, tanto aleatórias quanto balanceadas.

Para as instâncias *nl* aleatórias com $n = 8$, o CPLEX foi capaz de resolver apenas cinco instâncias com o modelo N3 e todas as instâncias com os modelos N4 e N5. Já para as instâncias balanceadas com oito equipes, nenhuma delas foi resolvida com o modelo N3 e oito foram resolvidas com o modelo N4. O resolvedor foi capaz de encontrar a solução ótima para todas estas instâncias com o modelo N5.

Tabela 3.5: Soluções inteiras das instâncias *nl* aleatórias

| $n$ | Viáveis | opt(N3) | opt(N4) | opt(N5) | avg($LB5/F_3^*$) (%) | avg(tN5) segundos | max(tN5) segundos | avg(tN4) segundos | max(tN4) segundos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 10 | 10 | 10 | 100 | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ |
| 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 97.19 | 0.3 | 0.7 | 1.6 | 3.3 |
| 8 | 10 | 5 | 10 | 10 | 92.28 | 16.8 | 39.2 | 646.6 | 2505.4 |

Tabela 3.6: Soluções inteiras das instâncias *nl* balanceadas

| $n$ | Viáveis | opt(N3) | opt(N4) | opt(N5) | avg($LB5/F_3^*$) (%) | avg(tN5) segundos | max(tN5) segundos | avg(tN4) segundos | max(tN4) segundos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 10 | 10 | 10 | 100 | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ |
| 6 | 10 | 10 | 10 | 10 | 97.81 | 0.2 | 0.5 | 2.0 | 2.4 |
| 8 | 10 | 0 | 8 | 10 | 92.34 | 34.4 | 61.8 | 1685.4 | 3810.0 |

Para as instâncias *circ* aletórias com $n = 8$, o CPLEX foi capaz de resolver apenas quatro instâncias com o modelo N3 e todas as oito instâncias com os modelos N4 e N5. Já para as instâncias balanceadas com o mesmo número de equipes, o CPLEX não conseguiu resolver nenhuma com o modelo N3, mas resolveu todas as instâncias com os modelos N4 e N5. CPLEX não foi capaz de resolver instância alguma com $n > 8$.

Tabela 3.7: Soluções inteiras das instâncias *circ* aleatórias

| $n$ | Viáveis | opt(N3) | opt(N4) | opt(N5) | avg($LB5/F_3^*$) (%) | avg(tN5) segundos | max(tN5) segundos | avg(tN4) segundos | max(tN4) segundos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 10 | 10 | 10 | 100 | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ |
| 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 94.49 | 0.2 | 0.2 | 1.6 | 2.5 |
| 8 | 8 | 4 | 8 | 8 | 89.16 | 26.1 | 122.6 | 1060.3 | 3874.6 |

A qualidade dos limites $LB5$ (em média, a menos de 7.73% da otimalidade para as instâncias *nl* e a menos de 10.85% para as instâncias *circ*) ajudou o resolvedor a encontrar

Tabela 3.8: Soluções inteiras das instâncias *circ* balanceadas

| $n$ | Viáveis | opt(N3) | opt(N4) | opt(N5) | avg($LB5/F_3^*$) (%) | avg(tN5) segundos | max(tN5) segundos | avg(tN4) segundos | max(tN4) segundos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 10 | 10 | 10 | 100 | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ | $< 0.1$ |
| 6 | 10 | 10 | 10 | 10 | 92.32 | 0.3 | 0.5 | 2.2 | 3.7 |
| 8 | 10 | 0 | 10 | 10 | 90.31 | 24.6 | 57.9 | 2399.0 | 4172.8 |

soluções ótimas em menos de um minuto de tempo computacional para a maior parte das instâncias com $n = 8$.

# Capítulo 4

# Soluções Aproximadas de Grandes Instâncias

É possível, do ponto de vista prático, que haja a necessidade tão somente de se construir uma tabela viável para determinada competição, obedecendo às restrições determinadas pelo problema, e não necessariamente achar-se sua solução ótima. Em geral, problemas de torneios reais possuem um grande número de equipes, superior a dez. Como exemplo, o campeonato brasileiro de futebol é disputado por vinte equipes.

Executando-se o resolvedor comercial para instâncias com uma quantidade maior de equipes, foi possível perceber a dificuldade do mesmo em encontrar soluções viáveis para o problema. O resolvedor comercial pôde encontrar solução viável, em duas horas de processamento, para instâncias com mais de 16 equipes em apenas um caso com o modelo N3, e em nenhum caso com os modelos N4 e N5.

Partindo-se da observação de que os problemas de escalonamento em esportes mostram-se mais fáceis quando não se considera a distância percorrida, utiliza-se um modelo simplificado com $O(n^3)$ variáveis para obter soluções viáveis para o problema. Resolve-se o modelo N3 sem as variáveis representando as viagens, denotado por modelo S3 e determinado pelas restrições (4.1)-(4.5), para determinar uma tabela para o torneio. Este modelo pode ser resolvido rapidamente (em menos de um minuto) para grande parte das instâncias disponíveis:

$$\sum_{q=1}^{n-1} z_{tjq} = 1, \qquad \forall\, (t,j) \in J \tag{4.1}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq t}}^{n} (z_{tjk} + z_{jtk}) = 1, \qquad t = 1,\ldots,n, \quad k = 1,\ldots,n-1 \tag{4.2}$$

$$\sum_{q=k}^{k+3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} z_{jtk} \leq 3, \qquad t = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-4 \tag{4.3}$$

$$\sum_{q=k}^{k+3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{n} z_{jtk} \geq 1, \qquad t = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-4 \tag{4.4}$$

$$z_{tjk} \in \{0, 1\}, \qquad t, j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, n-1 \tag{4.5}$$

Uma vez que pretende-se apenas obter uma solução viável, a função objetivo é arbitrária. As restrições (4.1) asseguram que cada jogo ocorre exatamente uma vez. As restrições (4.2) garantem que cada equipe joga um jogo em cada rodada. As restrições (4.3) estabelecem que a equipe $t$ não pode jogar mais do que três jogos consecutivos fora de casa, enquanto as restrições (4.4) garantem que a equipe $t$ não pode jogar mais do que três jogos consecutivos em sua própria sede. As restrições (4.5) definem as condições de integralidade para as variáveis $z$.

## 4.1 Melhoria das Soluções Obtidas com S3

Com o modelo S3 torna-se possível encontrar pelo menos uma solução viável para instâncias em que os modelos N3, N4 e N5 não obtiveram sucesso. Entretanto, por não se tratar de um problema simplesmente de viabilidade, mas também de otimização, busca-se as melhores soluções possíveis. Desta forma, duas estratégias são propostas com o objetivo de procurar soluções melhores do que a obtida simplesmente utilizando-se o modelo S3.

### 4.1.1 Estratégia de ***Polishing***

Esta estratégia utiliza uma heurística baseada em algoritmos evolucionários disponível no CPLEX, denominada *Solution Polishing* [14]. A estratégia de *polishing* consiste em, primeiramente, encontrar uma solução $\check{z}$ para S3. Fixa-se, então, os valores das variáveis inteiras $z$ do modelo N3 de acordo com os valores encontrados para as variáveis correspondentes na solução $\check{z}$ para S3. Executa-se o primeiro nó do *branch-and-bound* [27] do resolvedor para determinar os valores das variáveis contínuas $y$, definindo-se, assim, uma solução viável $\hat{z}, \hat{y}$ para N3. Finalmente, aplica-se o *polishing* sobre esta solução $\hat{z}, \hat{y}$ para N3, com o objetivo de melhorar a função objetivo baseada na distância percorrida pelas equipes.

### 4.1.2 Estratégia de Enumeração

Observando-se que, para várias instâncias, o resolvedor rapidamente encontra uma solução para S3, utiliza-se o mesmo para enumerar soluções viáveis para o modelo. Configura-se o CPLEX para rejeitar como solução corrente toda solução viável $\breve{z}$ encontrada pelo *branch-and-bound*, porém, salvam-se estas soluções antes das mesmas serem descartadas. Como a função objetivo é arbitrária, sem esta configuração todos os nós não visitados do *branch-and-bound* seriam podados por valor quando a primeira solução fosse encontrada. Desta forma, a enumeração de soluções é feita utilizando-se o próprio *branch-and-bound* do resolvedor. Calcula-se, então, os custos das soluções e considera-se a melhor.

## 4.2 Resultados Experimentais

As duas estratégias foram implementadas em C++ utilizando-se a API Concert Technology e compiladas com g++ 4.0.2. Os experimentos computacionais foram realizados em um computador Dell Optiplex com processador Pentium D de 3.0 GHz e 2 Gbytes de memória RAM, utilizando o sistema operacional Linux versão 2.6.12. Aplica-se cada uma das duas estratégias a cada uma das instâncias criadas a partir das instâncias *circ* do TTP, descritas na Seção 3.2, com 18 e 20 equipes por um período de duas horas.

O resultado das execuções para as diferentes instâncias é sumariado nas Tabelas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. As colunas representam o nome da instância, o valor da solução encontrada executando-se o modelo S3, o tempo gasto para encontrar tal solução, o valor objetivo da solução para a estratégia de *polishing*, o número de soluções geradas pela enumeração e a melhor solução encontrada pela enumeração. Os campos preenchidos com *Inv.* representam instâncias provadas inviáveis, enquanto que aqueles com '–' significam que o tempo limite foi alcançado sem que uma solução viável fosse encontrada, nem inviabilidade fosse provada. Os valores sublinhados representam os valores em que a estratégia de *polishing* melhorou a solução de S3 e os valores em negrito representam as melhores soluções encontradas.

A Tabela 4.1 mostra os resultados para as instâncias *circ* aleatórias com 18 equipes. Para cinco das oito instâncias viáveis, uma solução viável foi encontrada em menos de um minuto. Para as três demais, em menos de dois minutos. Pode ser observado que a heurística do resolvedor melhorou o resultado de apenas quatro das oito instâncias viáveis. O processo de enumeração gerou soluções melhores que a estratégia de *polishing* para todas as instâncias viáveis.

Tabela 4.1: Resultado das estratégias para as instâncias *circ* aleatórias com 18 equipes

| Instância | S3 | tempo (s) | S3+Pol. | Número de Soluções | Enum. |
|---|---|---|---|---|---|
| circ18anonbal | 1170 | 30.1 | 1162 | 91 | **1138** |
| circ18bnonbal | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* |
| circ18cnonbal | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* |
| circ18dnonbal | 1208 | 21.5 | 1204 | 14 | **1160** |
| circ18enonbal | 1160 | 90.7 | 1160 | 25 | **1138** |
| circ18fnonbal | 1226 | 111.3 | 1226 | 22 | **1140** |
| circ18gnonbal | 1152 | 22.5 | 1152 | 144 | **1130** |
| circ18hnonbal | 1216 | 27.4 | 1198 | 26 | **1132** |
| circ18inonbal | 1188 | 109.3 | 1188 | 59 | **1132** |
| circ18jnonbal | 1198 | 29.3 | 1198 | 63 | **1116** |

Na Tabela 4.2 estão os resultados para as instâncias *circ* balanceadas com 18 equipes. Para todas as instâncias, uma solução viável foi encontrada em menos de 32 segundos. A estratégia de *polishing* melhorou a solução de S3 em 60% dos casos. Porém, em 80% dos casos, a enumeração de soluções foi capaz de gerar soluções melhores que a estratégia de *polishing*. A instância assinalada com um '*' corresponde à única instância em que o resolvedor encontrou uma solução viável, de valor igual a 1136, que é melhor do que os valores encontrados pelas duas estratégias estudadas.

Tabela 4.2: Resultado das estratégias para as instâncias *circ* balanceadas com 18 equipes

| Instância | S3 | tempo (s) | S3+Pol. | Número de Soluções | Enum. |
|---|---|---|---|---|---|
| circ18abal | 1172 | 25.7 | 1172 | 34 | **1142** |
| circ18bbal | 1194 | 22.6 | 1194 | 77 | **1168** |
| circ18cbal* | 1180 | 23.1 | 1162 | 17 | 1170 |
| circ18dbal | 1172 | 31.1 | 1162 | 145 | **1120** |
| circ18ebal | 1188 | 31.8 | 1174 | 46 | **1154** |
| circ18fbal | 1174 | 25.0 | 1174 | 61 | **1104** |
| circ18gbal | 1162 | 25.9 | **1140** | 50 | 1148 |
| circ18hbal | 1198 | 26.2 | 1188 | 120 | **1142** |
| circ18ibal | 1246 | 24.0 | 1246 | 78 | **1172** |
| circ18jbal | 1182 | 27.2 | 1162 | 96 | **1122** |

Na Tabela 4.3 são apresentados os resultados para as instâncias *circ* aleatórias com 20 equipes. Não foi possível nem encontrar solução viável, nem provar inviabilidade para uma das instâncias. Uma solução foi encontrada em menos de um minuto utilizando-se S3 para quatro instâncias. Em duas instâncias, o melhor valor encontrado foi a solução encontrada pelo resolvedor para S3. A estratégia de *polishing* melhorou o resultado de quatro das sete soluções iniciais. Em três delas, o valor foi melhor que o da enumeração. Nestas instâncias, percebe-se que o número de soluções geradas por enumeração foi pequeno para grande parte das instâncias, e a enumeração não obteve bons resultados. Para este grupo de instâncias, a melhoria dos valores objetivos em relação ao valor encontrado para S3 é muito pequena.

Tabela 4.3: Resultado das estratégias para as instâncias *circ* aleatórias com 20 equipes

| Instância | S3 | tempo (s) | S3+Pol. | Número de Soluções | Enum. |
|---|---|---|---|---|---|
| circ20anonbal | **1552** | 129.4 | 1552 | 12 | 1552 |
| circ20bnonbal | 1634 | 50.7 | **<u>1616</u>** | 2 | 1634 |
| circ20cnonbal | – | – | – | 0 | – |
| circ20dnonbal | **1562** | 50.2 | 1562 | 9 | 1562 |
| circ20enonbal | 1580 | 303.6 | **<u>1574</u>** | 17 | 1580 |
| circ20fnonbal | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* |
| circ20gnonbal | 1614 | 57.3 | 1614 | 3 | **1560** |
| circ20hnonbal | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* | *Inv.* |
| circ20inonbal | 1590 | 372.4 | **<u>1574</u>** | 8 | 1580 |
| circ20jnonbal | 1624 | 51.3 | <u>1588</u> | 6 | **1516** |

A Tabela 4.4 mostra os resultados para as instâncias *circ* balanceadas com $n = 20$ equipes. Para sete instâncias, uma solução viável foi gerada em menos de um minuto. Para as outras, em menos de 68 segundos. A estratégia de *polishing* conseguiu melhorar o valor objetivo para quatro instâncias. Em 80% das instâncias, a melhor solução foi encontrada pela enumeração.

Tabela 4.4: Resultado das estratégias para as instâncias *circ* balanceadas com 20 equipes

| Instância | S3 | tempo (s) | S3+Pol. | Número de Soluções | Enum. |
|---|---|---|---|---|---|
| circ20abal | 1622 | 47.6 | 1622 | 10 | **1614** |
| circ20bbal | 1626 | 53.2 | **<u>1610</u>** | 50 | **1610** |
| circ20cbal | 1580 | 53.0 | 1580 | 17 | **1542** |
| circ20dbal | 1544 | 62.9 | 1544 | 5 | **1518** |
| circ20ebal | 1658 | 60.3 | 1658 | 17 | **1598** |
| circ20fbal | 1650 | 54.2 | 1650 | 4 | **1568** |
| circ20gbal | **1582** | 52.2 | 1582 | 4 | 1582 |
| circ20hbal | 1654 | 56.9 | <u>1614</u> | 18 | **1590** |
| circ20ibal | 1618 | 68.0 | <u>1616</u> | 18 | **1560** |
| circ20jbal | 1590 | 56.6 | **<u>1582</u>** | 3 | 1590 |

É possível perceber que, para as instâncias balanceadas com $n = 18$ e $n = 20$ equipes, o tempo necessário para gerar uma solução inicial viável não varia muito de uma instância para outra, o que é bastante diferente do que ocorre nas instâncias aleatórias.

# Capítulo 5

# Conclusões e Trabalhos Futuros

Esta dissertação apresentou o Problema de Torneios com Viagens com Estádios Fixos. Um banco de instâncias para testes foi criado.

Três modelos de programação inteira foram propostos para o problema. Após uma comparação baseada nos limites fornecidos pelas relaxações lineares dos modelos, ficou provado que a formulação com $O(n^5)$ variáveis é mais justa que as demais. Pelos resultados apresentados, foi possível observar que os melhores limites inferiores ajudaram o resolvedor a encontrar a solução ótima para a maior parte das instâncias com menos de dez equipes em menos de um minuto.

Uma vez que o resolvedor comercial não encontrou soluções viáveis para instâncias maiores, utilizou-se um modelo simplificado de programação inteira, conjugado a heurísticas presentes no resolvedor. Foram obtidas soluções viáveis para as instâncias com mais de 16 equipes. Em alguns casos, soluções melhores foram geradas quando da utilização da estratégia de *polishing* presente no resolvedor. Utilizou-se também o CPLEX para gerar várias soluções para o problema. A simples enumeração de soluções gerou, na maioria dos casos, soluções melhores do que as geradas pela estratégia de *polishing*. Desta forma, conclui-se que esta não parece ser uma boa estratégia para este problema.

Como possibilidades de trabalhos futuros, pode-se analisar a utilização de técnicas de geração de colunas e heurísticas de busca local para o problema. Também podem ser analisados problemas de quebras em torneios com locais dos jogos pré-determinados, que possuem propriedades matemáticas bastante interessantes. Trabalhos preliminares nos permitiram conjecturar que o número mínimo de quebras em torneios com HAA fixos para instâncias balanceadas é sempre menor ou igual ao número de equipes. Outra extensão seria tratar o problema sem considerar os números máximos de jogos consecutivos em casa e de jogos consecutivos fora, o que tornaria o problema mais fácil do ponto de vista de viabilidade, porém mais difícil do ponto de vista de otimização, uma vez que o número de possíveis soluções aumentaria consideravelmente.

# Referências


[1] Anagnostopoulos, A., Michel, L., Hentenryck, P. V., Vergados, Y. A simulated annealing approach to the traveling tournament problem. *Journal of Scheduling 9* (2006), 177–193.

[2] Benoist, T., Laburthe, F., Rottembourg, B. Lagrange relaxation and constraint programming collaborative schemes for travelling tournament problems. Em *Proceedings of the Third International Workshop on Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems (CPAIOR'01)* (Ashford, 2001).

[3] Briskorn, D. Scheduling sport leagues using branch-and-price. Em *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling* (Brno, 2006), E. Burke e H. Rudová, Eds., p. 367–369.

[4] Croce, F. D., Oliveri, D. Scheduling the Italian football league: an ILP-based approach. *Computers and Operations Research 33* (2006), 1963–1974.

[5] Durán, G., Noronha, T., Ribeiro, C., Souyris, S., Weintraub, A. Branch-and-cut for a real-life highly constrained soccer tournament scheduling problem. Em *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling* (Brno, 2006), E. Burke e H. Rudová, Eds., p. 398–401.

[6] Easton, K., Nemhauser, G., Trick, M. The traveling tournament problem: Description and benchmarks. Em *Principles and Practice of Constraint Programming* (2001), T. Walsh, Ed., vol. 2239 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, p. 580–584.

[7] Easton, K., Nemhauser, G., Trick, M. Solving the traveling tournament problem: A combined integer programming and constraint programming approach. Em *Practice and Theory of Automated Timetabling IV* (2003), G. Goos, J. Hartmanis, e J. van Leeuwen, Eds., vol. 2740 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, p. 100–109.

[8] Easton, K., Nemhauser, G., Trick, M. Sports scheduling. Em *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models and Performance Analysis*, J. Leung, Ed. CRC Press, 2004, p. 52.1–52.19.

[9] Gaspero, L., Schaerf, A. A composite-neighborhood tabu search approach to the traveling tournament problem. *Journal of Heuristics 13* (2007), 189–207.

[10] Goossens, D., Spieksma, F. Scheduling the Belgian soccer league. Em *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling* (Brno, 2006), E. Burke e H. Rudová, Eds., p. 420–422.

[11] Hentenryck, P., Vergados, Y. Minimizing breaks in sport scheduling with local search. Em *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Automated Planning and Scheduling (ICAPS 2005)* (Monterey, 2005), S. Biundo, K. Myers, e K. Rajan, Eds., p. 22–29.

[12] Henz, M. Constraint-based round robin tournament planning. Em *International Conference on Logic Programming* (New Mexico, 1999), D. D. Schreye, Ed., p. 545–557.

[13] Henz, M., Müller, T., Thiel, S. Global constraints for round robin tournament scheduling. *European Journal of Operational Research 153* (2004), 92–101.

[14] ILOG S.A. *ILOG CPLEX 10.0 User's Manual*, 2006.

[15] Knust, S. Scheduling non-professional table-tennis leagues. *Osnabrücker Schriften zur Mathematik*, 270 (2007), preprint.

[16] Knust, S., von Thaden, M. Balanced home-away assignments. *Discrete Optimization 3* (2006), 354–365.

[17] Miyashiro, R., Iwasaki, H., Matsui, T. Characterizing feasible pattern sets with a minimum number of breaks. Em *Proceedings of the 4th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling* (Gent, 2002), E. Burke e P. D. Causmaecker, Eds., p. 311–313.

[18] Nemhauser, G., Trick, M. Scheduling a major college basketball conference. *Operations Research 46* (1998), 1–8.

[19] Rasmussen, R. Scheduling a triple round robin tournament for the best Danish soccer league. *European Journal of Operational Research* (a ser publicado, 2007).

[20] Rasmussen, R., Trick, M. The timetable constrained distance minimization problem. Em *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems* (2006), J. Beck e B. Smith, Eds., vol. 3990 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, p. 167–181.

[21] Rasmussen, R., Trick, M. Round robin scheduling - A survey. *European Journal of Operational Research* (a ser publicado, 2007).

[22] Régin, J. Minimization of the number of breaks in sports scheduling problems using constraint programming. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 57* (2001), 115–130.

[23] Ribeiro, C., Urrutia, S. Scheduling the Brazilian soccer championship. Em *Proceedings of the 6th International Conference on the Practice and Theory of Automated Timetabling* (Brno, 2006), E. Burke e H. Rudová, Eds., p. 481–483.

[24] Ribeiro, C., Urrutia, S. Heuristics for the mirrored traveling tournament problem. *European Journal of Operational Research 179* (2007), 775–787.

[25] Russell, R., Urban, T. A constraint programming approach to the multiple-venue, sport-scheduling problem. *Computers and Operations Research 33* (2006), 1895–1906.

[26] Trick, M. Challenge traveling tournament instances. Referência on-line em http://mat.gsia.cmu.edu/TOURN/, visitado pela última vez em 10 de agosto de 2007.

[27] Wolsey, L. *Integer Programming.* Wiley-Interscience, New York, 1998.