

Método de Diferenças Finitas Aplicado à Precificação de Opções

EDÍLIO ROCHA QUINTINO

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Mauricio Kischinhevsky / UFF / IC-UFF (Presidente)

Prof. Carlos Antonio de Moura / IME-UERJ

Prof. Claudio Henrique da Silveira Barbedo / IBMEC /BCB

Profa. Denise Burgarelli Duczmal / UFMG

Profa. Regina Célia Paula Leal Toledo / UFF

Niterói, 29 de janeiro de 2010.

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, e a toda minha família, pois sem eles não seria possível chegar até aqui.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Maurício Kischinhevsky, pelo apoio, simpatia de sempre e incentivo para a realização deste trabalho.

À UFF, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos meus pais, irmão, esposa e filhos Gabriel e Emanuele.

Aos meus grandes amigos Aldo Ferreira da Silva e Claudio Henrique da Silveira Barbedo que me apoiaram nos momentos em que pensei desistir e contribuíram para a finalização deste trabalho.

Ao amigo Diego Brandão que me apoiou na revisão de minha apresentação e soube me tranquilizar em relação a minha defesa.

Em particular, o grande amigo Diogo Robaina que me possibilitou retomar os meus trabalhos no mestrado quando me convidou para o seu casamento, onde tive a oportunidade de reencontrar meu orientador, Maurício Kischinhevsky e, desta forma, receber uma segunda chance de concluir meu mestrado.

Aos professores do Instituto de Computação, em particular os da área de modelagem computacional, que me ofereceram a oportunidade desta cooperação.

Resumo

O objetivo do presente trabalho é a utilização de métodos computacionais alternativos ao modelo Black&Scholes, mais especificamente os métodos de diferenças finitas, para precificação de opções. Os métodos são comparados tendo como critérios acurácia com preços obtidos pelo modelo Black&Scholes e modelo Binomial e o tempo computacional. Neste trabalho, é demonstrado que o valor da opção obtido com o uso da Equação Diferencial Parcial, pelo método de Crank-Nicolson, apresenta melhores desempenhos para opções européias.

Para facilitar o entendimento, é feito um resumo dos principais características dos contratos de opções (compra e venda) no capítulo 2, bem como explicado os principais conceitos usados nas transações do mercado de opções. Uma abordagem dos principais métodos numéricos é feita no capítulo 3, dando uma maior ênfase nos métodos de diferenças finitas, além disso, é feita uma breve explicação do métodos binomial. No capítulo 3, também é feita a demonstração da Equação Diferencial Parcial usada no método de diferenças finitas. Prova-se, nesta demonstração, que o valor da opção obtido com o uso da Equação Diferencial Parcial é um cálculo determinístico, ou seja, não envolve elementos aleatórios.

Palavras-chave: Métodos Numéricos; Opções; Diferenças Finitas; Determinístico; Black&Scholes.

Abstract

The aim of this work is the use of alternative computational methods to the Black&Scholes model, more specifically the methods of finite differences for pricing of options. The methods are compared and the criteria is accuracy, considering Black&Scholes and Binomial prices and computational time. In this work, we demonstrated that the option pricing reached through Partial Differential Equations using the method of Crank-Nicolson presents better performance for European options.

A summary of the main characteristics of options instruments (call and put) is presented in chapter 2, as well as the main concepts in the options markets. An explanation of the main numerical methods is presented in chapter 3, with emphasis in the finite differences methods and a brief description of the binomial method. In chapter 3, the demonstration of the Partial Differential Equation is made. It is proved, in this demonstration, that the value of the option reached through Partial Differential Equations is a deterministic estimative, that is, it does not involve random elements.

Keywords:Numerical Methods; Options; Finite differences; Deterministic; Black&Scholes.

Palavras-chave

1. Palavra-chave Métodos Numéricos
2. Palavra-chave Opções
3. Palavra-chave Diferenças Finitas
4. Palavra-chave Determinístico
5. Palavra-chave Black&Scholes

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução	1
2 Principais Características de Contratos de Opções	3
3 Modelos de Ativos Financeiros e seus Derivativos	20
4 Método de Diferenças Finitas	30
5 Avaliação e Implementação dos Métodos Numéricos	47
6 Conclusões	54
Apêndice 1	57
Referências	104

Lista de Figuras

2.1	Resultado no vencimento - Titular e Lançador	7
2.2	Lucro / Prejuízo no vencimento - Titular e Lançador	7
2.3	Lucro ou Prejuízo da compra - Call	9
2.4	Lucro / Prejuízo da Venda da Call	10
2.5	Resultado no Vencimento	11
2.6	Lucro / Prejuízo	11
2.7	Lançador - Lucro / Prejuízo	12
2.8	Lucro / Prejuízo - Compra da Put	12
2.9	Lucro / Prejuízo - Venda de uma Put	14
2.10	Preço do Ativo-Objeto X Call Européia	14
2.11	Preço do Ativo-Objeto X Put Européia	15
3.1	Condição de Contorno e Inicial	26
4.1	Grade com a discretização dos valores do ativo objeto e do tempo	31
4.2	Condição de Contorno e Inicial	33
5.1	Comparação entre os métodos - Valor da opção	51
5.2	Comparação entre os métodos - Raiz do Erro Quadrático Médio	52
5.3	Comparação dos refinamentos das discretizações usadas nos métodos Crank-Nicolson e Binomial	52
5.4	Comparação do tempo de processamento entre os métodos Crank-Nicolson e Binomial	53

Lista de Tabelas

2.1	Tabela de Dados - Compra de uma Call	8
2.2	Tabela de Dados - Venda de uma Call	10
2.3	Tabela de Dados - Compra de uma Put	13
2.4	Tabela de Dados - Venda de uma Put	13
5.1	Discretização do tempo (T) e do valor do ativo objeto (S) com respectivo preço da opção e tempo consumido por cada metodologia	49
5.2	Discretização do tempo (T) e do valor do ativo objeto (S) com respectivo preço da opção e raiz do erro quadrático médio obtido para cada metodologia	49
5.3	Número de passos com respectivo preço da opção, tempo de processamento e raiz do erro quadrático médio obtido pelo método Binomial	50
6.1	Comparação entre os métodos. Uso da taxa de volatilidade de 2%	55
6.2	Uso das taxas de volatilidade 2%, 3% e 4%.	55

Capítulo 1

Introdução

Profissionais da área de finanças têm dedicado razoável esforço para compreender o processo de formação dos preços de títulos negociados em mercados de capitais. Nesse sentido, a bibliografia da área financeira apresentou extraordinário desenvolvimento nas últimas duas décadas. Particularmente, para o caso de contratos derivativos, foram elaborados modelos de avaliação que apresentam alto grau de confiabilidade e que incorporaram diferentes fatores de risco adicionais ao modelo de Black&Scholes (1973) ¹.

Um modelo matemático pode ser utilizado para prever o comportamento futuro dos eventos sempre que o conhecimento exato das leis que regem um determinado fenômeno é expresso através de equações precisas, as quais podem, a princípio, serem resolvidas. A idéia de utilizar métodos numéricos é amplamente empregada em diversas aplicações, como transferência de calor, cálculo de estruturas em engenharia civil e aeronáutica, entre outras. Métodos numéricos foram introduzidos em finanças por [4] [5] como uma alternativa para precificar opções americanas de venda. A precificação de derivativos é apenas um exemplo de aplicação de métodos computacionais em finanças. Vários problemas de controle ótimo estocástico, de maneira geral, resultam em equações diferenciais sem solução fechada. O uso de métodos computacionais propicia a obtenção de uma solução aproximada ². Outro exemplo é a precificação de derivativos de taxa de juros, bem como as opções exóticas, cujas equações diferenciais, para modelos mais complexos, não têm solução fechada.

Com isso, apesar do modelo de Black&Scholes ser apresentada como a solução mais conveniente para o cálculo do preço de opções, há bastante interesse na literatura financeira pela obtenção de métodos numéricos precisos, rápidos e flexíveis para os mais

¹Vide [17], [12] e [2]

²[15] [21] [19] exemplificam vários problemas de controle ótimo estocástico em Economia e Finanças.

diversos tipos de instrumentos financeiros.

O objetivo deste trabalho é apresentar os modelos numéricos de precificação como uma alternativa para a avaliação de derivativos. Para isso, comparamos diferentes metodologias de avaliação do preço “justo” de uma opção e da rapidez da obtenção deste preço. O modelo numérico de melhor desempenho selecionado neste trabalho apresenta a propriedade de servir como referência para a precificação de opções, desde que as hipóteses referentes à opção desejada sejam similares às hipóteses do modelo de comparação selecionado neste trabalho. O trabalho mostra a obtenção dos principais processos de precificação de opções que existem na bibliografia.

O trabalho será dividido em 6 capítulos. As principais características de contratos de opções são descritas no Capítulo II. O Capítulo III abordará os modelos de ativos financeiros e seus derivativos. Uma metodologia de avaliação dos métodos numéricos descritos no capítulo III e os resultados e comparação dos métodos é proposta no Capítulo IV. Finalmente, as conclusões e recomendações são objeto do Capítulo V.

Capítulo 2

Principais Características de Contratos de Opções

1. PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DE CONTRATOS DE OPÇÕES

(a) INTRODUÇÃO

Podemos, inicialmente, definir Contratos de Opções como sendo uma evolução dos contratos futuros. A diferença básica é que o comprador, no caso de contrato de opções, possui a opção de seu exercício, ou seja, a compra ou a venda do produto fica condicionada, exclusivamente, à vontade de quem possui a opção. Os mercados de opções são operados e regulados por:

1. bolsas de futuros;
2. bolsas de valores (no caso de opções de ações); e
3. mercado de balcão.

Um caso particular de contrato de opção é a opção plain vanilla, que se caracteriza como sendo um contrato que fornece o direito de comprar ou vender um número prefixado de unidades de um ativo em sua data de vencimento ou em sua vigência, a um preço combinado na data inicial do contrato. O preço da opção é, portanto, um prêmio pago (recebido) por adquirir (fornecer) um direito. Existem dois tipos básicos de opções:

- opções de compra (também conhecido por call); e
- opções de venda (conhecido por put).

A opção, portanto, é um instrumento que dá a seu comprador (o titular) um direito futuro sobre algo, mas não uma obrigação; e, a seu vendedor (o lançador), uma obrigação futura, caso solicitado pelo comprador da opção. Como se

pode observar, a obrigação só existe por parte do vendedor (lançador) e, desta forma, ele recebe um prêmio.

Outro fato bastante importante a se destacar é que no mercado de opções não são negociados produtos, mas direitos sobre eles. Estes produtos são denominados, neste mercado, ativos-objeto das opções e podem ser: ações, ouro, dólar, juros, futuros sobre juros ou qualquer outro produto.

O mercado organizado de opções existe no Brasil desde 1979. Inicialmente, foi implantado pela Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa), com negociação de opções de compra cobertas (neste caso, o ativo-objeto fica depositado na bolsa de valores). Mais tarde, surgiu o lançamento de opções de compras a descoberto, ou seja, não havia necessidade do depósito do ativo-objeto na bolsa de valores, exigindo-se, porém, uma margem de garantia.

O mercado de opções admite dois estilos:

- O estilo americano; e
- O estilo europeu.

A maior parte das opções negociadas em bolsa é do estilo americano, porém, em virtude das propriedades européias serem mais fáceis de serem analisadas, algumas características das opções americanas foram deduzidas a partir das européias. No mercado brasileiro, há um ecletismo, ou seja, as opções de venda, por serem pouco líquidas, são do estilo europeu e as de compra são do estilo americano.

Em virtude dos prêmios serem valores bem inferiores aos preços dos ativos-objeto, é possível comprar ou vender grandes posições do ativo-objeto da opção, por este motivo, o mercado de opções permite uma grande alavancagem de posição e, em consequência desta grande alavancagem, o risco neste mercado é bastante elevado.

(b) ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS

- Comprador ou Titular: quem compra a opção (ou seja, quem paga o prêmio), assumindo assim os direitos a ela vinculados, podendo escolher se quer ou não exercê-la;
- Vendedor ou Lançador: Numa operação de compra, tem a obrigação de vender a ação ao preço combinado. Para isso, recebe um prêmio. Na de venda, tem o compromisso de comprar o ativo se o comprador assim o quiser;

- Prêmio: Valor da opção, que é negociado em mercado e pago pelo comprador da opção ao vendedor quando da realização do negócio. O prêmio não se trata de um adiantamento, mas sim do valor do direito de comprar (se forem opções de compra), ou vender (opções de venda), a ação por um preço pré-determinada (preço de exercício) durante um certo período de tempo (até o vencimento da opção);
- Opção de compra (call): modalidade em que o titular possui o direito de comprar do lançador o ativo-objeto por um preço predeterminado;
- Opção de venda (put): modalidade em que o titular possui o direito de vender ao lançador o ativo-objeto por um preço predeterminado;
- Preço de exercício (strike price): é o preço preestabelecido para a compra ou venda do ativo-objeto. Em opções de compra, é o preço que o titular deve pagar ao lançador por seu ativo-objeto, se for vantajoso o exercício da opção. Em opções de venda, é o preço que o lançador deve pagar ao titular se este exercer seu direito de vender o ativo-objeto;
- Vencimento: momento em que cessam os direitos do titular de exercer sua opção;
- Séries de uma opção: opções do mesmo tipo (compra ou venda), referentes ao mesmo ativo-objeto, com mesma data de vencimento, que se diferenciam pelos preços de exercício;
- Fechamento de posição: operação em que o titular vende suas opções, ou em que o lançador recompra suas opções.

Um exemplo prático, para um melhor entendimento, se refere a um investidor que paga um prêmio ao lançador para adquirir o direito de comprar um ativo-objeto ao preço de exercício de R\$ 150,00 (como visto acima ele é o titular desta opção de compra - call). Neste caso, o titular possui o direito de comprar o ativo-objeto, e o lançador a obrigação de vendê-lo. Obviamente, este direito só será exercido no vencimento se o preço do ativo for maior que R\$150,00, pois, caso contrário, o titular poderá adquirir diretamente no mercado por um preço menor. De maneira similar, o titular de uma opção de venda só fará uso do seu direito caso o preço do ativo-objeto seja inferior ao preço de exercício, pois, de maneira análoga, ele venderá seu ativo-objeto no mercado por um preço maior.

(c) OPÇÃO DE COMPRA (CALL)

O titular de uma opção de compra possui o direito de comprar o objeto da opção, ao preço de exercício, a qualquer instante até a data de vencimento (se for uma opção americana) ou apenas da data de vencimento (se for uma opção européia). Após essa data, a opção simplesmente deixa de existir.

O lançador de uma opção de compra é aquele que vende a opção de compra, ou seja, assume a obrigação de vender o ativo-objeto pelo preço do exercício, caso sua posição seja exercida. O seu risco é o da alta do mercado, uma vez que, no caso de venda a descoberto, ao ser exercido, ele terá de adquirir o ativo a um preço elevado para entregar ao titular pelo preço de exercício, certamente menor do que o preço pago no mercado.

É importante comentar que, uma vez adquirida uma opção, o titular pode se desfazer dela sem ter de exercê-la, bastando, para tal, que a venda no mercado. Para o lançador, vale o mesmo raciocínio: ele pode sair do mercado a qualquer momento ao comprar o mesmo lote de opções vendido, “zerando” seu portfólio.

Suponha que exista uma opção de compra com preço de exercício R\$18,00 e que, no exato momento do vencimento, o seu ativo-objeto valha R\$20,00. Assim sendo, o valor desta opção é R\$2,00. Desta forma, o resultado de uma call européia (c) em seu vencimento consiste no máximo entre zero e o valor do ativo-objeto (S) subtraído do preço de exercício (K). Então, no vencimento:

$$c = \text{maximo}(S - K, 0)$$

A melhor maneira de compreender como funcionam as operações com opções consiste em demonstrar graficamente algumas modalidades tradicionais utilizadas pelo investidor no mercado de opções. Nesta seção são apresentados os gráficos do titular e do lançador para as calls e, na seguinte, para as puts.

Nos gráficos a seguir (2.1 e 2.2), observa-se o resultado no vencimento para o titular e para o lançador de uma opção de compra européia. O ponto de inflexão em ambos os gráficos ocorre quando $S = K$.

O Lucro/Prejuízo no vencimento é igual ao resultado menos o prêmio pago (sem se considerar a taxa de juros) e podem ser observados nos gráficos 2.3 e 2.4, respectivamente, para o titular e para o lançador.

O titular de uma opção de compra espera um aumento no preço do ativo-objeto. Desta forma, o seu ganho é proporcional ao aumento no preço do ativo-objeto

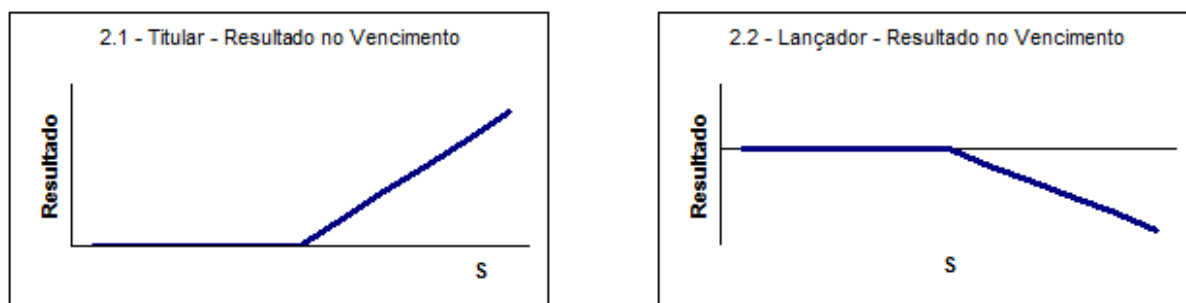


Figura 2.1: Resultado no vencimento - Titular e Lançador

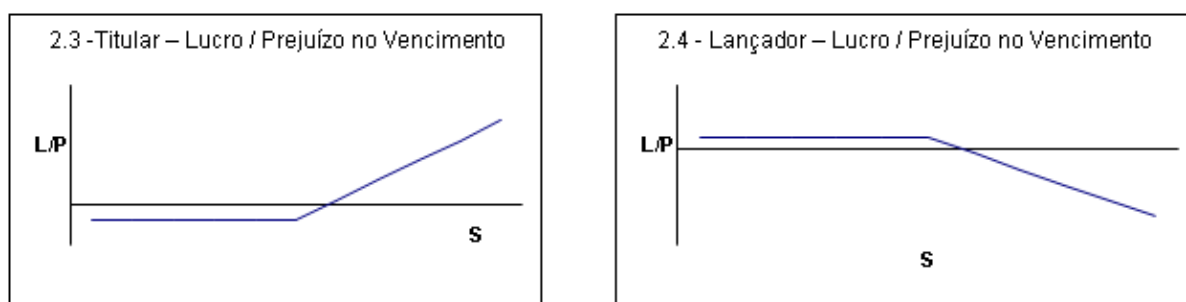


Figura 2.2: Lucro / Prejuízo no vencimento - Titular e Lançador

se o preço deste ativo for superior ao preço de exercício mais o valor do prêmio pago para aquisição da opção. A sua perda é limitada ao pagamento do prêmio. O lançador de uma opção de compra possui a expectativa de que o preço do ativo-objeto diminua. Desta forma, seu ganho é relativo ao prêmio recebido no momento do lançamento da opção. Quanto maior o preço do ativo-objeto, maior o prejuízo deste investidor.

Exemplo - Compra de uma Call:

Considere uma opção de compra com preço de exercício (K) R\$100,00 e prêmio (c) R\$15,00 (Não será considerado, para efeito de simplificar o entendimento, os custos de corretagem, da bolsa e de oportunidade). Se o mercado cair e o preço do ativo-objeto no mercado à vista, no vencimento, atingir um valor menor que R\$100,00, por exemplo R\$90,00, não será interessante para o titular da opção exercê-la, já que o preço de exercício é superior ao preço do ativo no mercado à vista. A sua perda é exatamente R\$15,00, o valor do prêmio pago que, conforme o jargão do mercado, vira “pó”.

Quanto mais o preço cair no mercado à vista, por exemplo R\$80,00, a perda continuará sendo de R\$15,00, ou seja, o valor do prêmio pago (da mesma forma vista acima, não será vantagem exercer a opção). Como podemos concluir, o mercado pode cair a qualquer valor que a perda é igual a R\$15,00 (o valor

do prêmio já pago) e, por esse motivo, não é exigida margem de garantia ao titular.

Por outro lado, se o preço à vista começar a subir, os ganhos serão proporcionais aos aumentos da cotação do ativo-objeto, como pode ser visto na Tabela abaixo. O break even point (ponto de equilíbrio, ganho nulo) ocorre quando o valor à vista for igual a R\$115,00, pois os R\$15,00 pago pelo prêmio será compensado pelo mesmo valor ganho no exercício (é importante observar que não estamos considerando o custo do dinheiro no período, uma vez que o prêmio é pago antes do vencimento, esse valor poderia ser remunerado a uma taxa livre de risco).

Prêmio	Preço de Exercício	Preço de Mercado à vista no Vencimento	Lucro ou Perda
15,00	100,00	80,00	-15,00
15,00	100,00	90,00	-15,00
15,00	100,00	100,00	-15,00
15,00	100,00	115,00	0,00
15,00	100,00	120,00	5,00
15,00	100,00	130,00	15,00
15,00	100,00	140,00	25,00

Tabela 2.1: Tabela de Dados - Compra de uma Call

O Gráfico abaixo (2.5) descreve as perdas e ganhos desta opção, de acordo com a variação do preço do ativo-objeto na abscissa do gráfico.

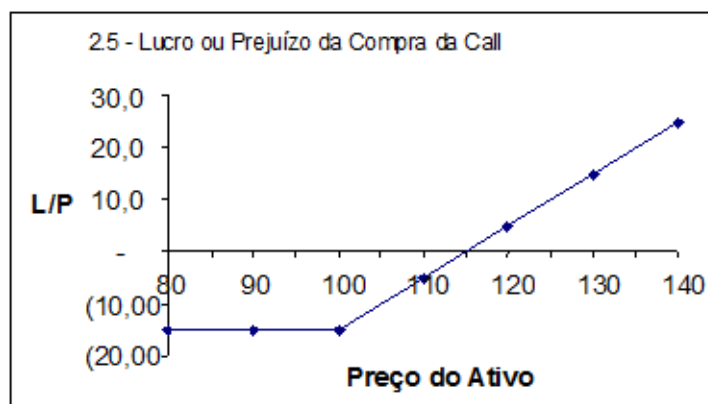


Figura 2.3: Lucro ou Prejuízo da compra - Call

Exemplo - Venda de uma Call:

Se considerarmos agora a venda de uma opção de compra com preço de exercício R\$110,00 por R\$10,00, se o preço do ativo-objeto no mercado à vista for inferior a R\$110,00 no vencimento, sua posição não será exercida (é a situação ideal para o vendedor). Desta forma, ele fica com o prêmio recebido que, no exemplo, é igual a R\$10,00 (o ganho máximo do vendedor, seja de calls ou de puts, é sempre limitado ao valor do prêmio recebido na entrada da operação).

Por outro lado, se o preço à vista ultrapassar R\$110,00 no vencimento, haverá exercício. O break even point ocorre no preço de R\$120,00 (ver Gráfico 2.6, abaixo), uma vez que o prêmio que o lançador recebeu na montagem da operação (R\$10,00) é suficiente para cobrir a diferença entre o preço que pagará pela ação no mercado à vista e o preço de exercício, valor a ser recebido do titular quando exercê-lo (o vendedor também pode comprar o prêmio neste dia do vencimento por R\$10,00 “zerando” sua posição). Porém, a partir desse valor, as perdas serão tanto maiores quanto mais alto for o preço do ativo no mercado à vista (ver Tabela abaixo). O prejuízo é ilimitado, ou seja, quanto mais o mercado subir, maior é o prejuízo (observe a reta descendente no gráfico 2.6).

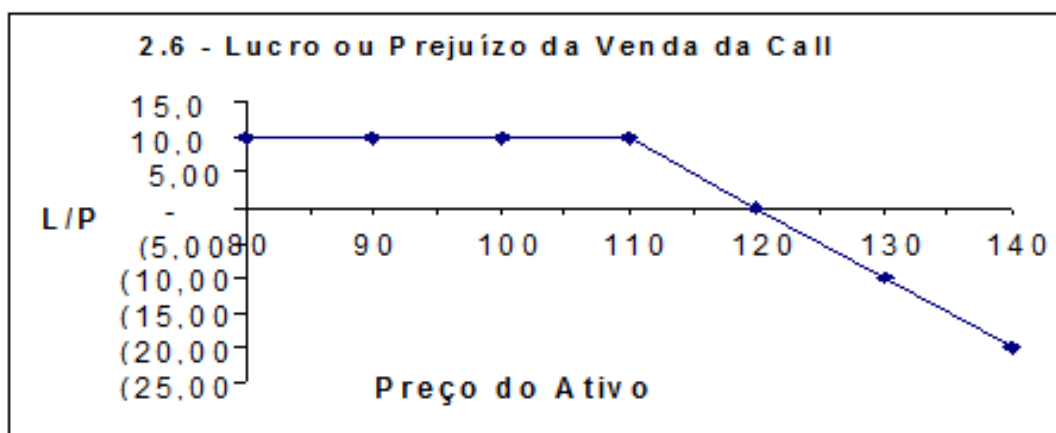


Figura 2.4: Lucro / Prejuízo da Venda da Call

Prêmio	Preço de Exercício	Preço de Mercado à vista no Vencimento	Lucro ou Perda
10,00	110,00	80,00	10,00
10,00	110,00	90,00	10,00
10,00	110,00	100,00	10,00
10,00	110,00	110,00	10,00
10,00	110,00	120,00	0,00
10,00	110,00	130,00	-10,00
10,00	110,00	140,00	-20,00

Tabela 2.2: Tabela de Dados - Venda de uma Call

(d) OPÇÃO DE VENDA (PUT)

O titular de uma opção de venda possui o direito de exigir que o lançador compre, pelo preço de exercício, o ativo-objeto da opção no vencimento (no caso brasileiro as opções de venda são européias). O lançador de uma opção de venda é aquele que vende a put, assumindo a obrigação de comprar o ativo-objeto a que se refere a opção, caso a sua posição seja exercida. Infelizmente, as opções de venda ainda não ganharam liquidez no país, ao contrário do que ocorre na maioria dos mercados internacionais. O resultado de uma put européia (p) em seu vencimento é o máximo entre o preço de exercício (K) subtraído do valor do ativo-objeto (S) e zero. Desta forma, no vencimento

tem-se que:

$$p = \max(0, K - S)$$

Os Gráficos abaixo apresentam para o titular e o lançador, respectivamente, o resultado no vencimento de uma opção de venda. Os pontos de inflexão ocorrem quando o preço do ativo-objeto (S) é igual ao preço de exercício (K).

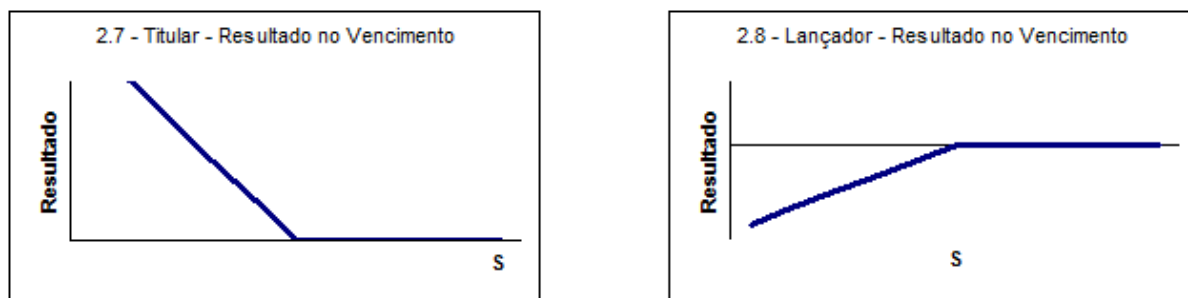


Figura 2.5: Resultado no Vencimento

Os Gráficos abaixo (2.9 e 2.10) mostram o lucro/prejuízo para uma put. Da mesma forma que para a call, o lucro/prejuízo é igual ao resultado no vencimento subtraído do prêmio.

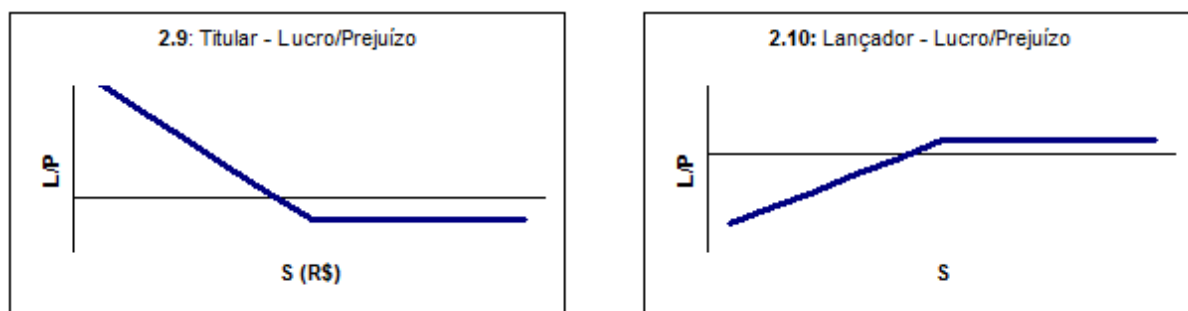


Figura 2.6: Lucro / Prejuízo

O titular de uma opção de venda espera que o preço do ativo-objeto diminua após o lançamento da opção. Seu ganho na opção de venda é proporcional a quanto o preço do ativo-objeto ficou menor do que o preço de exercício e sua perda é limitada ao prêmio. Já o lançador de uma opção de venda espera um aumento do preço do ativo-objeto. Desta maneira, o seu ganho é simplesmente o prêmio da opção. Sua perda ocorre quando há uma diminuição do preço do ativo-objeto. Observando os Gráficos 2.4 e 2.10, para uma opção de compra (call) e venda (put), respectivamente, nota-se que ambos possuem retas descendentes, o que configura risco. Entretanto, nota-se que o vendedor

da opção de venda (Gráfico 2.10) tem, ao menos, o limite do valor “zero” para o ativo-objeto.

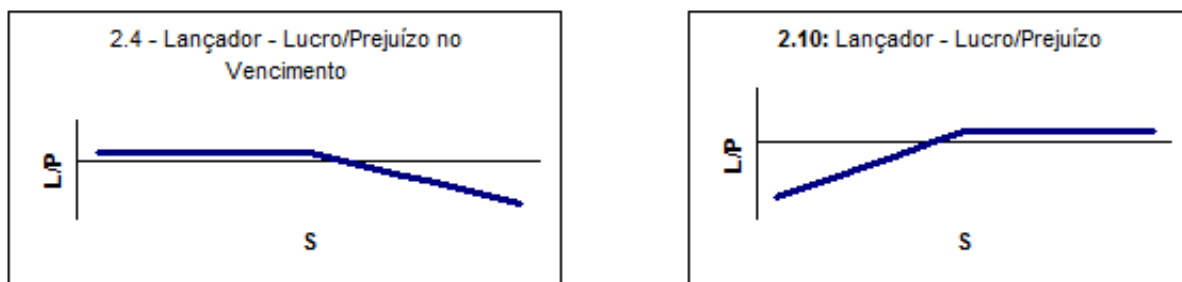


Figura 2.7: Lançador - Lucro / Prejuízo

Exemplo - Compra de uma Put:

Considere a compra de uma opção de venda de preço de exercício R\$110,00 e prêmio de R\$10,00. Neste caso, o titular assume uma posição inversa a do titular de uma opção de compra, uma vez que ele espera que o preço do ativo-objeto no mercado à vista caia abaixo do preço de exercício. Quanto maior for essa queda, maior será o seu lucro. Por sua vez, a perda máxima a que o titular está sujeito é o próprio prêmio pago pela opção (esta é a regra para o mercado de opções, ou seja, não importa se de calls ou de puts, o titular sempre terá seu prejuízo máximo já definido na compra, ou seja, a perda máxima é o próprio valor pago - o prêmio. Por este motivo, ele é livre do depósito de margens de garantia). A Tabela 2.3 apresenta os lucros e as perdas da compra da put no vencimento e o Gráfico 2.11 mostra a sua representação gráfica.

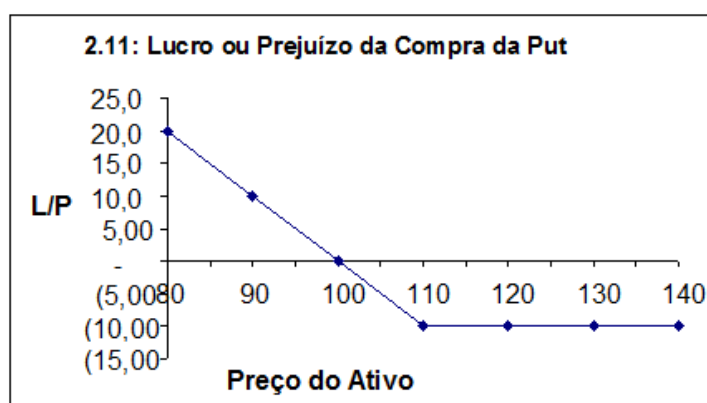


Figura 2.8: Lucro / Prejuízo - Compra da Put

Prêmio	Preço de Exercício	Preço de Mercado à vista no Vencimento	Lucro ou Perda
10,00	110,00	80,00	20,00
10,00	110,00	90,00	10,00
10,00	110,00	100,00	0,00
10,00	110,00	110,00	-10,00
10,00	110,00	120,00	-10,00
10,00	110,00	130,00	-10,00

Tabela 2.3: Tabela de Dados - Compra de uma Put

Exemplo - Venda de uma Put:

Considere a venda de uma opção de venda de preço de exercício R\$110,00 e prêmio de R\$10,00. O lançador recebe o prêmio e espera que haja uma alta do ativo-objeto no mercado à vista para que não ocorra o exercício da opção. A Tabela 2.4 e o Gráfico 2.12 apresentam os lucros e prejuízos em relação ao preço do ativo-objeto do lançador de uma put.

Prêmio	Preço de Exercício	Preço Mercado à vista	Lucro ou Perda
10,00	110,00	80,00	-20,00
10,00	110,00	90,00	-10,00
10,00	110,00	100,00	0,00
10,00	110,00	110,00	10,00
10,00	110,00	120,00	10,00
10,00	110,00	130,00	10,00

Tabela 2.4: Tabela de Dados - Venda de uma Put

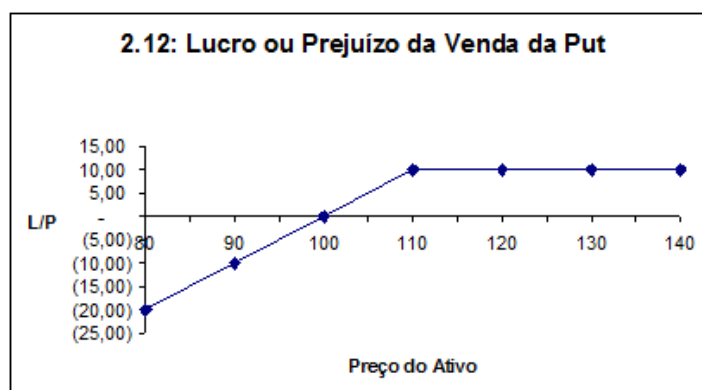


Figura 2.9: Lucro / Prejuízo - Venda de uma Put

(e) OPÇÃO DE COMPRA (CALL) E VENDA (PUT) ANTES DO VENCIMENTO

As seções anteriores (3 e 4) apresentaram os resultados das calls e puts, respectivamente, no vencimento. Esta seção procura mostrar como essas opções se comportam antes do vencimento, ou seja, uma abordagem do modelo americano.

O Gráfico 2.13 apresenta a relação entre o preço do ativo-objeto (S) e o prêmio de uma opção de compra (c) antes do vencimento da opção. Os parâmetros utilizados foram preço de exercício (K) igual a R\$104,00, taxa de juros (r) igual a 5% a.a., volatilidade (σ) igual a 15% a.a. e tempo para vencimento (t) igual a 0,5 ano. A influência destes parâmetros no prêmio da opção será abordada na Seção 2.8 deste capítulo. Para se encontrar os prêmios das calls em função do preço do ativo será utilizado o modelo de Black&Scholes, que será visto no Capítulo 3.

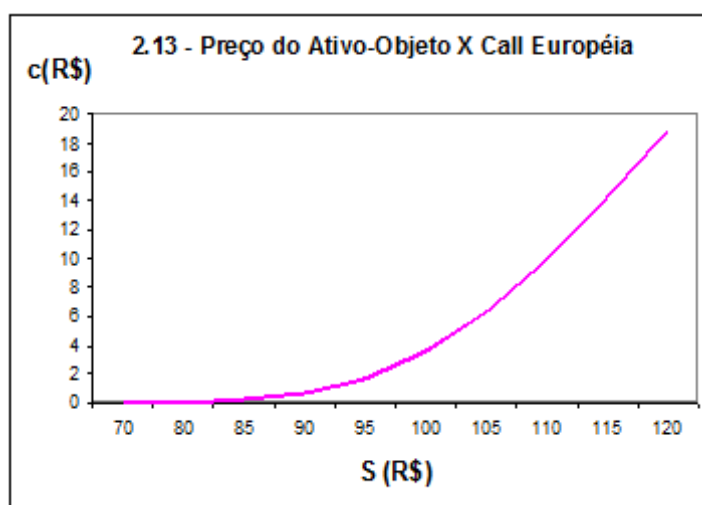


Figura 2.10: Preço do Ativo-Objeto X Call Européia

Deve-se observar que não existe mais o ponto de inflexão onde $S = K$ como existia no gráfico no vencimento da opção. O ângulo máximo da reta tangente à curva $S \times c$ é 45° (quando o preço do ativo-objeto é muito maior que o preço de exercício), o que significa que o prêmio nunca cresce mais que o valor do ativo-objeto

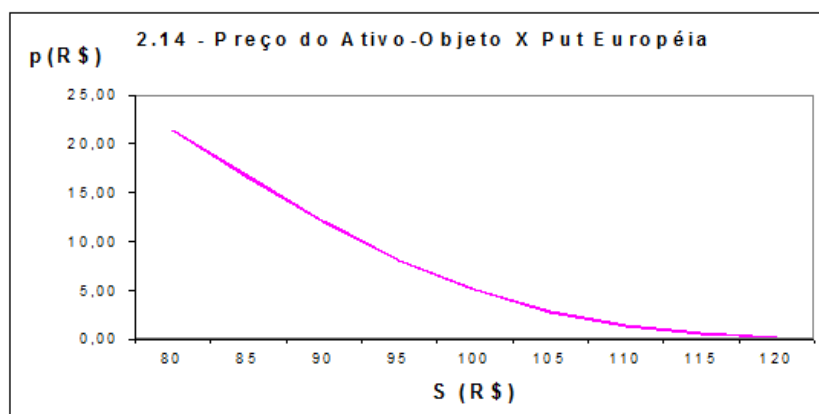


Figura 2.11: Preço do Ativo-Objeto X Put Européia

A relação entre o preço do ativo-objeto e o prêmio de uma opção de venda européia é mostrada no Gráfico 2.14. Os parâmetros são os mesmos utilizados no gráfico da call (Gráfico 2.13). O ângulo máximo da reta tangente à curva $S \times p$ é -45° (quando o preço do ativo-objeto é muito menor que o preço de exercício), o que significa que o prêmio nunca cresce mais do que o valor do decaimento do ativo-objeto.

(f) FORMAÇÃO DOS PRÊMIOS

O prêmio é o valor pago pelo titular ao lançador ao adquirir uma opção (preço da opção). O prêmio é estabelecido pelos compradores e vendedores no pregão das bolsas, a partir das condições de oferta e procura prevalecentes.

Os vendedores (lançadores) de opções consideram o prêmio que recebem como parte adicional de renda ou como proteção (hedge) contra um possível declínio no preço do ativo que já possui ou que pretendem adquirir.

Na seção 2.8 serão abordados os fatores que influenciam diretamente o prêmio de uma opção e, no Capítulo 3, será abordado, dentre outros, o modelo mais utilizado para se avaliar o prêmio de opções, o modelo de Black&Scholes.

(g) UTILIZAÇÃO DO MERCADO DE OPÇÕES

Podemos considerar a flexibilidade a principal característica do mercado de opções. Esta flexibilidade permite uma gama de estratégias operacionais, possibilitando diversas alternativas aos agentes econômicos (tanto especulativas como de proteção (hedge)).

A flexibilidade do mercado de opções se justifica em razão das diversas séries e prazos de opções autorizadas pelas bolsas e da inexistência de ajustes diários, o que gera um maior poder de alavancagem que os mercados futuros (as opções também são negociadas em balcão. Como o mercado de opções permite a formação de várias estratégias, no mercado de balcão uma instituição financeira pode formar operações que atendam exatamente a necessidade do cliente).

Fatores que influenciam no uso de opções:

1. Obtenção de um maior retorno, ou seja, alavancar seus ganhos ¹;
2. Como alternativa para a aquisição imediata do objeto ²;
3. Para fixar o preço de uma futura aquisição de mercadoria ³;
4. Como alternativa à contratação de um financiamento no mercado financeiro (operação caixa) ⁴
5. Como hedge em posições de ativos financeiros ⁵;
6. Para a criação de diversas estratégias de hedge e especulação;

¹O prêmio de uma opção é sensivelmente menor que o preço do lote do ativo-objeto a que se refere, desta forma uma pequena quantia de dinheiro pode comprar um certo número de opções correspondentes a um volume de mercadoria muito maior do que a que seria possível adquirir no mercado à vista;

²compra de uma call sobre uma mercadoria que se deseja adquirir, e para a qual se prevê uma alta de preço. Na alta o ganho está assegurado. Na baixa, o prejuízo máximo será o prêmio, que poderá virar pó;

³se um agente econômico demandante de uma determinada mercadoria acredita que o seu preço no mercado à vista está atrativo, mas não dispõe de recursos suficientes para sua aquisição naquele momento, pode comprar uma call e assim assegurar o preço para uma data futura, quando disporá dos recursos necessários;

⁴O agente econômico poderá vender a mercadoria no mercado à vista e simultaneamente adquirir uma opção de compra sobre ela. Nesse caso, o custo do financiamento será obtido pela razão entre o preço do exercício da opção e o preço do mercado à vista, deste deduzido o prêmio pago pela opção, menos 1 (um);

⁵mediante a compra de opções de venda, o agente econômico poderá manter a sua carteira de ativos financeiros relativamente protegida contra uma possível queda de preços desses ativos;

(h) VARIÁVEIS QUE AFETAM O PREÇO DAS OPÇÕES

Os prêmios das opções de compra e de venda são diretamente influenciados por cinco variáveis:

- preço de mercado do ativo-objeto (S);
- preço de exercício (K);
- taxa de juros do ativo livre de risco (r);
- tempo até o vencimento da opção (t); e
- volatilidade dos retornos do ativo-objeto (σ).

Preço de Mercado do Ativo-Objeto (S)

O prêmio da opção está relacionado ao preço do ativo-objeto. Quanto mais alto for o preço do ativo-objeto, maior será o valor do prêmio da opção de compra (relação direta) e menor o prêmio da opção de venda (relação inversa).

Preço de Exercício (K)

O prêmio da opção também está relacionado ao preço de exercício. Para a opção de compra, maior é o valor da opção quanto menor for o preço de exercício (relação inversa, pois o preço de exercício representa um limite que o preço do ativo-objeto precisa ultrapassar para que a opção possa ser exercida). Para uma opção de venda, esta relação funciona ao contrário (relação direta, pois quanto maior o preço de exercício, mais alto o valor da opção).

Taxa de Juros (r)

A taxa de juros do ativo livre de risco representa um custo de oportunidade de se adquirir um ativo durante um determinado período de tempo. Desta maneira, quanto maior o custo do dinheiro no prazo de vencimento da opção, mais atrativo se torna comprar a opção de compra em vez de se adquirir o ativo-objeto, uma vez que ao se comprar a opção ocorre um menor dispêndio. Concluimos deste modo, que a taxa de juros possui uma relação direta com o valor da opção de compra e inversa com o valor da opção de venda.

Volatilidade (σ)

A volatilidade é uma medida de dispersão dos retornos do ativo-objeto. É uma medida estimada, uma vez que seu valor não pode ser verificado diretamente no mercado. Quanto mais alta a volatilidade, maior a variação do valor do ativo ao longo do tempo e maior a incerteza quanto ao preço esperado no futuro. Desta forma, o prêmio da opção, seja de compra ou de venda, é função crescente da

volatilidade, no sentido de que esta incerteza gera uma maior probabilidade de que a opção possa ser exercida pelo titular.

Tempo para o Vencimento (t)

Tendo em vista o fato de que quanto mais próximo do exercício da opção, menor o tempo para que o ativo-objeto suba, no caso de uma opção de compra, ou caia, no caso de uma opção de venda, podemos verificar, intuitivamente, que quanto maior o prazo para o vencimento de uma opção, maior deve ser o seu valor .

(i) OPÇÕES DE COMPRA AMERICANA X EUROPÉIA

É muito raro, além de desvantajoso, alguém exercer a opção de compra antes do seu vencimento, uma vez que, nesse caso, o investidor desembolsa um valor (o preço de exercício da opção para comprar o ativo-objeto) algum tempo antes, quando poderia esperar até a data de vencimento para realizar este mesmo desembolso. O exercício é permitido porque o investidor pode querer sair de uma posição sem liquidez no mercado. . Será mostrado abaixo, de uma forma mais prática, que o preço de uma call americana é igual ao de uma call européia de mesmas características. Inicialmente, usaremos a carteira A que é formada por uma posição comprada em uma opção de compra americana (c). No vencimento, essa carteira valerá:

$$\begin{aligned} &0 \text{ se } S < K \\ &S - K \text{ se } S > K \end{aligned}$$

Analogamente ao raciocínio acima, usaremos a carteira B constituída por uma posição comprada no ativo-objeto e um empréstimo que pagará o preço de exercício no final do período. Portanto, a carteira B no vencimento valerá:

$$\begin{aligned} &S - K \text{ se } S < K \\ &S - K \text{ se } S > K \end{aligned}$$

Quando o preço de mercado do ativo-objeto é menor que o preço de exercício ($S < K$), a carteira A vale mais que a B. Já o inverso, ou seja, o preço de mercado do ativo-objeto supera o preço de exercício ($S > K$), as carteiras possuem o mesmo valor ($S - K$) no vencimento. Desta forma, a carteira A deve possuir um valor maior que a B, ou seja, o prêmio da opção de compra em qualquer momento deve ser maior ou igual ao valor de uma posição comprada no ativo-objeto e um empréstimo que pagará o preço de exercício no final do

período. Ainda, podemos afirmar que o preço de uma call americana deve ser maior ou igual ao máximo entre zero e preço de mercado do ativo-objeto subtraído do valor presente do preço de exercício.

$$c = \max(0, S - VP(K))$$

Tendo em vista o valor positivo do custo do dinheiro, podemos afirmar que $S - VP(K)$ será maior que $S - K$. Pelo raciocínio anterior, podemos concluir que o prêmio de uma opção de compra americana será sempre superior ao valor do exercício ($S - K$) e, por esse motivo, o exercício antecipado não vale a pena. Assim sendo, o prêmio da opção de compra americana é igual ao prêmio da opção de compra européia.

Exemplo: Vamos considerar os dados abaixo que seguem a relação $C = S - K$:

- Opção de compra (c) $\rightarrow$ R\$5,00;
- Preço de mercado do ativo-objeto (S) $\rightarrow$ R\$40,00; e
- Preço de Exercício (K) $\rightarrow$ R\$38,00

Um investidor possui uma opção de compra americana (c). Caso ele queira obter o ativo-objeto neste momento, terá duas opções: Opção 1: Exerce a opção. Neste caso, o custo da operação será o custo do preço de exercício da opção, ou seja, K que é igual a R\$38,00. Opção 2: Exercer a opção e comprar o ativo. Neste caso, o custo total da operação será o preço de mercado do ativo-objeto menos o valor da opção de compra, ou seja, $(S - c)$ que é igual a $(R\$40,00 - R\$5,00) = R\$35,00$.

Concluimos, desta forma, que não vale a pena exercer a opção de compra antes de seu vencimento.

Capítulo 3

Modelos de Ativos Financeiros e seus Derivativos

Os modelos de avaliação de opções são originalmente derivados de modelos matemáticos avançados, dentre os quais se destaca o modelo de Black&Scholes. Os modelos de precificação de opções tentam expressar o preço na data t de uma opção, denotado por c , como função do preço do ativo subjacente (S), da data de vencimento (T), do preço de exercício (K), da incerteza associada ao preço do ativo subjacente (σ) e da taxa de juros do ativo livre de risco (r), i.e., $c = c(S, K, T, t, \sigma, r)$. Para isto, são necessárias hipóteses a respeito do mercado de capitais, nem sempre muito realistas, que tornam as opções ativos “redundantes”. Assim, sob essas hipóteses, é possível montar um portfólio completamente livre de risco com ações, títulos e opções, e mostrar que, se não há possibilidades de arbitragem, o preço de uma opção pode ser obtido através dos parâmetros acima.

Neste capítulo serão revisados os principais modelos estocásticos do movimento do preço de um ativo financeiro e seus respectivos instrumentos derivativos; deste modo, precisamos rever suas principais características, a fim de fazer uma correta modelagem do ativo financeiro. Inicialmente, sabemos que, a longo prazo, o preço da ação sobe, também sabemos que há um risco no investimento em ações (aleatoriedade embutida, geralmente chamada de volatilidade estimada pelo desvio padrão dos retornos históricos). É do interesse, em nosso estudo, obter a melhor estimativa de desvio-padrão para a ação e, neste caso, devemos ter uma idéia de como o seu preço evolui ao longo do tempo (quanto mais longe do presente, maior será a incerteza quanto ao preço futuro). Finalmente, o preço da ação nunca deveria ser negativo, pois os acionistas têm em geral responsabilidade limitada, ou seja, o preço mínimo da ação deve ser zero.

1. Equação diferencial parcial usada nos modelos de precificação de opções.

A maioria dos modelos considera que os preços de uma ação apresentam um comportamento caracterizado como processo estocástico ¹ de Wiener (o processo de Wiener é um tipo particular de processo de Markov que tem sido amplamente utilizado na Física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a choques). O processo de Wiener contempla as características descritas no parágrafo anterior ([6] mostra como podemos “calibrar” um modelo browniano geométrico ao movimento de ações). Uma descrição não-rigorosa de um processo de Wiener é obtida pelo limite de um processo de passeio aleatório, $Z(t_k)$, (do inglês random walk process) à medida que $\Delta t \rightarrow 0$:

$$Z(t_{k+1}) = Z(t_k) + \epsilon(t)\sqrt{\Delta t}$$

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t$$

onde $\epsilon(t_k)$ é uma variável aleatória com média 0 e variância 1, ou seja, uma variável aleatória normal padrão. As variáveis aleatórias em instantes diferentes (t_k, t_j) são mutuamente não correlacionadas, ou seja, para $j \neq k$. O processo de Wiener é descrito como um passeio aleatório onde os intervalos de tempo são muito pequenos (ou seja, levando-se o limite de $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} Z(t_{k+1}) = Z(t_k) + \epsilon(t)\sqrt{\Delta t}$) e pode ser descrito como: $dz = \epsilon(t)\sqrt{dt}$

Podemos estender o processo de Wiener dado por $dz = \epsilon(t)\sqrt{dt}$, simplesmente adicionando parâmetros constantes a e b, daí resultando um novo processo x, governado pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dx(t) = adt + b dz \quad (3.1)$$

Sabendo-se que, pela definição de um processo de Wiener $dz = \epsilon(t)\sqrt{dt}$, podemos escrever a equação acima na forma:

$$dx(t) = adt + b\epsilon(t)\sqrt{dt}$$

¹um processo estocástico pode ser definido como uma sequência de observações a partir de pelo menos uma dada distribuição de Probabilidade

Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ dependerem da variável x e do tempo, isto é, deixarem de ser constantes, teremos o processo chamado de Ito ² que é expresso por:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

A partir da equação 3.1, considerando-se $x(t) = \ln S$, $a = \mu$ e $b = \sigma$, podemos modelar alternativamente o movimento do preço de uma ação através da equação diferencial estocástica dada abaixo:

$$d(\ln(S(t))) = \mu dt + \sigma dz, \text{ onde}$$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (3.2)$$

onde:

μ = a taxa instantânea de retorno do ativo objeto;

σ = o desvio padrão instantâneo das taxas de retorno dos ativos;

dt = pequeno intervalo de tempo; e

dz = processo de wiener

$dS = \mu S dt + \sigma S dz$, observa-se que, pelo processo de Ito, temos:

$$a(x, t) = \mu S \text{ e } b(x, t) = \sigma S$$

onde μ e σ são constantes não-negativas e z é um processo de Wiener padrão dado em $dz = \epsilon(t)\sqrt{dt}$. Note que o lado direito da equação acima é composto por dois componentes:

1. o termo μdt é a média com que $d\ln S(t)$ cresce com o tempo e está representando aqui um investimento livre de risco. Também é conhecido como parâmetro de tendência (drift); e
2. o termo σdz representa a componente aleatória dada por uma variável aleatória normal padrão com desvio padrão igual a $\sigma\sqrt{t}$.

Note que o preço da ação, $S(t)$, segue um processo browniano geométrico com média μt e desvio padrão $\sigma\sqrt{t}$, ou seja, o preço $S(t)$ é uma distribuição lognormal expressa da forma $\ln S(t) \sim N(\ln S(0) + \mu t, \sigma^2 t)$, onde $N(\mu, \sigma^2)$ denota uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 .

²O Lema de Ito é usado para encontrar a diferencial de uma função de um tipo particular de processo estocástico. Ele foi desenvolvido pelo matemático japonês Kiyoshi Ito e é o análogo da regra da cadeia do cálculo comum para o cálculo estocástico. O Lema de Ito é melhor memorizado a partir da expansão com séries de Taylor separando o termo de segunda ordem relacionado à mudança na componente estocástica. O lema é amplamente aplicado na área de finanças matemáticas e seu uso mais conhecido é na demonstração do modelo de Black&Scholes, utilizada para precificar opções [12]

Pelo Lema de Ito abaixo, considerando-se $c = (S, t)$ temos que:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial S}dS + \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dS^2 \quad (3.3)$$

Como já mostrado acima, sabemos que:

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz \rightarrow dS^2 = (\mu Sdt + \sigma Sdz)^2$$

$$dS^2 = S^2\mu^2dt^2 + 2S^2\mu\sigma dtdz + S^2\sigma^2dz^2$$

Por definição $dt \rightarrow 0$, logo $dt^2 \rightarrow 0$ e $dtdz \rightarrow 0$

$$dS^2 = S^2\sigma^2dz^2$$

Analisando dz^2 verifica-se que ($dz^2 = dt$)

Fazendo a análise de dz^2 , temos:

$$Var(dz) = E[dz^2] - E[dz]^2$$

$$E[dz^2] = Var(dz) + E[dz]^2 = dt + 0 = dt$$

$$Var(dz^2) = E[dz^4] - E[dz^2]^2$$

Representamos a curtose através da fórmula $E[(x - \mu)^4] = 3\sigma^4$:

Podemos afirmar, neste caso, que:

$$E[(dz - 0)^4] = 3(Var(dz))^2$$

$$E[dz^4] = 3dt^2$$

Fazendo-se as substituições na equação $Var(dz^2) = E[dz^4] - E[dz^2]^2$, temos

$$Var(dz^2) = 3dt^2 - dt^2 = 2dt^2 = 0$$

$$Var(dz^2) = 0$$

Desta forma, conclui-se que dz^2 tem média dt e variância 0(zero), ou seja, trata-se de uma variável determinística:

$$dz^2 = dt$$

$$dS^2 = S^2\sigma^2dt$$

Substituindo-se os valores acima em 3.3 teremos:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial S}(\mu Sdt + \sigma Sdz) + \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}S^2\sigma^2dt$$

Arrumando-se os termos teremos:

$$dc = (\frac{\partial c}{\partial S}\mu S + \sigma Sdz + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}S^2\sigma^2)dt + \frac{\partial c}{\partial S}\sigma Sdz$$

Há certas condições que devem ser assumidas para ser usada a equação acima:

- a) a taxa de juros livre de risco r é a mesma para todos os vencimentos possíveis da opção, excluindo a possibilidade de que haja incerteza a respeito da taxa de juros futura;
- b) o mercado financeiro opera continuamente;
- c) os preços do ativo-objeto devem seguir uma distribuição lognormal;
- d) a ação-objeto não paga dividendos ou outras distribuições;
- e) inexistem custos de transação ou impostos; e
- f) não existem restrições para vendas a descoberto (short sales);

Aplicando-se o conceito de arbitragem e a partir das premissas acima, será criada uma carteira livre de risco composta pelo número de ativos (Q_s) vezes o preço do ativo (S) mais a quantidade de opções (Q_c) vezes o preço da opção de compra (c). Abaixo será feita a demonstração para uma opção de compra, mas resultado semelhante pode ser encontrado para opções de venda (vide [14]).

$$\Pi = SQ_s + cQ_c$$

Ambas as posições são afetadas pela mesma incerteza: “as oscilações do preço da ação”. Como o prêmio da opção não varia, em valor, no mesmo montante do preço à vista, para montar uma carteira livre de risco é importante saber qual a relação entre a variação do prêmio da opção e a variação do preço à vista.

Seja $d\Pi$ uma pequena variação no valor desta carteira, logo:

$$d\Pi = Q_s dS + Q_c dc$$

Esta variação é estocástica para uma série de combinações entre ativos e opções. Entretanto, se Q_s e Q_c são combinadas tal que:

$$Q_s dS + Q_c \frac{\partial c}{\partial S} dS = 0$$

Temos que $d\Pi = 0$ e, desta forma, o retorno da carteira se torna sem risco. Fazendo-se $Q_s = 1$ para simplificar teremos:

$$dS + Q_c \frac{\partial c}{\partial S} dS = 0$$

$$Q_c = -\frac{1}{\left(\frac{\partial c}{\partial S}\right)}$$

Como mostrado anteriormente, o comportamento dos retornos do ativo-objeto pode ser expresso por 3.2.

Como o comportamento dos preços da opção de compra é função do movimento do ativo-objeto, como já visto anteriormente, com base no cálculo estocástico,

empregando-se o Lema de Ito, que o ativo segue um processo como o descrito por $dS = \mu S dt + \sigma S dz$, as mudanças nos preços da opção de compra podem ser expressas por:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 dt$$

Substituindo-se em $d\Pi = Q_s dS + Q_c dc$ com: $Q_s = 1$ e $Q_c = -\frac{1}{(\frac{\partial c}{\partial S})}$, teremos:

$$d\Pi = dS + \left(-\frac{1}{(\frac{\partial c}{\partial S})}\right) \left(\frac{\partial c}{\partial S} dS + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 dt\right)$$

$$d\Pi = \left(-\frac{1}{(\frac{\partial c}{\partial S})}\right) \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 dt$$

Sabendo-se que Π é uma carteira livre de risco, para que não haja possibilidade de arbitragem, tem-se:

$$d\Pi = r\Pi dt$$

Sabemos que $\Pi = S \left(-\frac{1}{(\frac{\partial c}{\partial S})}\right) c$, logo:

$$d\Pi = r \left(S \left(-\frac{1}{(\frac{\partial c}{\partial S})}\right) c\right) dt$$

Igualando-se as duas equações acima, temos que o preço de uma opção de compra é dado pela solução $c(S,t)$, para a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} S^2 \sigma^2 + \frac{\partial c}{\partial S} rS = rc \quad (3.4)$$

A Equação Diferencial parcial não linear acima para precificação de uma opção $c(S,t)$ cujo ativo-objeto é S pode ser resolvida através do Método de Diferenças Finitas para uma opção de compra (por exemplo, para $\frac{dc}{dt}$, podemos fazer uma aproximação diferença posterior - forward difference approximation - em relação a c entre $i\Delta t$ e $(i+1)\Delta t$ como $\frac{(c_{i+1}^j - c_i^j)}{\Delta t}$), aplicando-se as condições de contorno e inicial de acordo com a grade $(M+1)(N+1)$ abaixo:

onde K é o preço de exercício e T é a data de exercício da opção.

identificaram a equação acima como sendo a equação do calor, já conhecida em física, para encontrar a solução:

$$c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

onde $N(d_i)$ é a área sob a curva normal relativa ao coeficiente i , $i = 1, 2$, e os parâmetros (d_1, d_2) são dados por:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

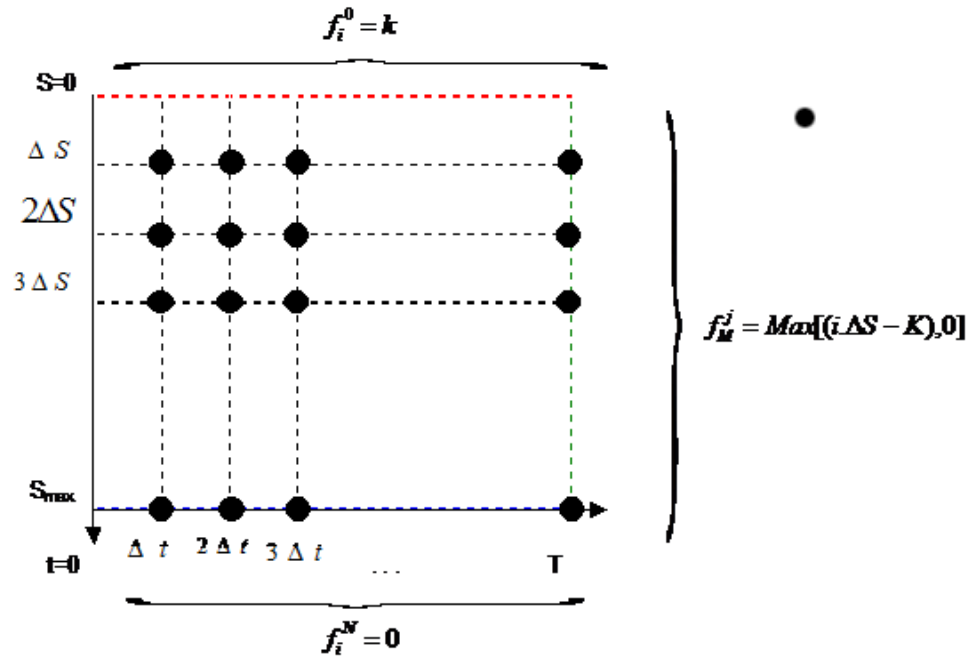


Figura 3.1: Condição de Contorno e Inicial

r = taxa de juros sem risco; e

t = fração anual do prazo de vencimento da opção;

A equação acima serve para qualquer opção que tenha o preço do ativo básico como única variável que influencia o preço da opção.

Conforme [7], uma das características mais importantes do modelo é que a equação não envolve nenhuma preferência do investidor quanto à sua exposição ao risco. Isto ocorre, porque o modelo acima não envolve a taxa de retorno esperado σ que depende basicamente do nível de risco a que o investidor pretende se expor.

Apesar do exposto acima, existem várias evidências empíricas de que as premissas não são respeitadas. Um exemplo a ser citado é a volatilidade do retorno do ativo que, na prática, não é constante, pois os analistas de mercado precisam, frequentemente, alterar a volatilidade quando usam o modelo de Black&Scholes para calcular o valor de opções. Além disso, [16] mostram as falhas do modelo de Black&Scholes, um exemplo a ser citado é a geração de preços menores que os de mercado para opções que estão “dentro do preço”. Outro problema é que não pode ser resolvido através do modelo de Black&Scholes a precificação de opções de venda do tipo americana, ou seja, a fórmula só se aplica para o tipo europeu.

Ao relaxar tais premissas estabelecidas no modelo de Black&Scholes, em geral, a equação diferencial correspondente não possui solução analítica, por esta razão são

usados métodos numéricos, como alternativa, para obter uma solução aproximada. No próximo capítulo serão apresentados os principais métodos numéricos empregados para contornar estes problemas.

2. Modelos Pós-Black&Scholes

Em relação ao modelo de Black&Scholes, alguns avanços foram realizados, sendo que todos se basearam no relaxamento de uma ou mais condições ideais assumidas pelo modelo original de Black&Scholes (vide [18] [23]).

Muitas pesquisas foram realizadas, visando testar o modelo de Black&Scholes, porém, ele ainda continua sendo a base para muitos modelos. Apesar de existirem diferenças (preços de mercado em relação aos preços dados pelo modelo), estas diferenças, quando comparadas aos custos operacionais, têm sido pequenas.

Os retornos da ação-objeto seguem um processo de difusão e saltos de Poisson (vice [17]). O modelo é generalizado para o caso de taxas de juros estocásticas, em ocasiões onde o prazo até o vencimento de opção é longo e as taxas de juros são voláteis. Esta adaptação é fundamental para outros ramos das finanças, como, por exemplo, análise de investimentos, onde o prazo até o vencimento é longo e incerto.

Seguindo o modelo de Black&Scholes, [17] mostra que o valor da opção aumenta continuamente na medida em que t (tempo), r (taxa de juros) ou σ (volatilidade) aumentam. Em cada um destes casos, o limite superior é o preço da ação. Argumenta que o valor da opção é sempre maior do que seria se ela fosse exercida imediatamente. Desta forma, é de se esperar que um investidor racional só exerceria sua opção de compra no vencimento, concluindo-se, então, que o valor fornecido pela fórmula aplica-se também a opções de compra do tipo americano. Com pequenas modificações, a fórmula aplica-se a opções de venda do tipo europeu.

O valor de uma opção de venda do tipo americano será sempre maior do que o de uma do tipo europeu, pois há sempre a possibilidade concreta do exercício antes do vencimento (não adequabilidade do modelo de Black&Scholes para a precificação deste tipo de opção).

Abordando este assunto, primeiro [17] propõe um modelo no qual a taxa de juros é uma variável estocástica, em seguida, [17] e [9] derivam uma equação para o caso em que a evolução do preço da ação-objeto apresenta uma componente descontínua. Deste modo, eles verificam, de forma explícita, a descontinuidade da distribuição dos retornos da ação-objeto. É admitida a existência de dois componentes distintos que causam diferentes variações no preço da ação:

1. O componente contínuo, responsável pelo reflexo dos desequilíbrios temporários entre oferta e demanda e a chegada de novas informações gerais sobre a economia, é modelado segundo um processo padrão de Wiener.
2. O componente discreto, ou por saltos, que reflete a chegada de novas informações específicas sobre a ação ou o setor em que atua, é modelado por um processo de Poisson, com taxa λ , que reflete o número de saltos por unidade de tempo.

O modelo de Black&Scholes é relativamente complexo, entretanto, é mais completo, pois tem embutido o modelo de distribuição dos preços da ação-objeto. A maioria das instituições financeiras usa os modelos matemáticos de Black&Scholes e Binomial, que servem basicamente para traduzir o comportamento dos preços dos derivativos frente aos preços no mercado à vista (spots).

3. Modelo Binomial

Com o objetivo de definir o preço de uma opção, muitos modelos foram desenvolvidos. Um deles é o trabalho iniciado por William Sharpe, que descobriu uma forma de analisar o valor de títulos similares às opções. Além de sua simplicidade, o modelo provou ser também eficiente na prática, depois de testes nos mercados americanos e europeus. Como o modelo é de fácil desenvolvimento, acredita-se que pode ser aplicável a todos os mercados, inclusive o brasileiro. [9] e [20] ampliaram o conceito do método e o aplicaram ao mercado de opções sobre ações americanas.

O Modelo Binomial parte do pressuposto de que, no último instante para exercício, o valor tempo da opção é zero, como não poderia deixar de ser. Considera-se que naquele momento, a opção está dentro ou fora-do-dinheiro, tem valor intrínseco ou não vale nada, ou seja, o prêmio de risco do último instante na vida de uma opção é zero.

A formulação matemática será:

$$c = \max(0, S - K) \text{ ou } p = \max(0, K - S)$$

onde:

max = o maior dentre os valores do conjunto;

c = valor da opção de compra (call);

S = valor do objeto no último instante para o exercício da opção;

K = preço de exercício da opção;

p = valor da opção de venda (put);

Tem-se que fazer algumas considerações:

- 1) o modelo pressupõe que o mercado não tem tendência;
- 2) ignoraram-se os custos de transação;
- 3) desconsidera-se a inflação;
- 4) considera-se que o mercado é eficiente;

Conforme [10] o modelo binomial fornece uma percepção intuitiva das determinantes do valor de uma opção, mas requer grande quantidade de dados de entrada, em termos de preços futuros esperados em cada nó. O Black&Scholes não é um modelo diferente para a modelagem de opções. É um caso limitador do binomial, mas reduz substancialmente as necessidades de informações.

Capítulo 4

Método de Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas é uma das principais ferramentas empregadas para resolução de equações diferenciais parciais.

Para uma opção de compra americana, algumas condições de contorno estão relacionadas com a possibilidade do exercício antecipado. O método de diferenças finitas para a solução numérica da equação diferencial parcial não linear 3.4 e sua associação com as condições de contorno e inicial, no caso de uma opção de compra americana, foi introduzido por [22] e [4]. A convergência do método de Brennan and Schwartz é provado em [13] e [24]. Métodos numéricos relacionados à resolução incluem [8] e [12].

Para resolução desta equação diferencial parcial, utilizando-se um método numérico (no nosso caso será escolhido o método de diferenças finitas), pode-se optar pelas abordagens Euler Explícito, Euler Implícito, Crank-Nicolson, Brennan&Schwartz e Courtadon.

O método das Diferenças Finitas consiste em avaliar uma opção através da solução da equação diferencial que a opção satisfaz, convertendo-a num sistema de equações que pode ser resolvido iterativamente. Esta abordagem, a título de ilustração, será aplicada para se avaliar uma opção de compra americana (call americana).

Processo de discretização de S e t

Para discretização do preço da ação do emissor, S , escolhe-se uma quantidade de preços igualmente espaçados entre zero e $S_{\max}$. O valor máximo, aqui denominado $S_{\max}$, é tal que, dado um certo intervalo de confiança, será improvável que o ativo objeto alcance este patamar durante a vida do contrato. Para discretização do tempo, t , escolhe-se uma quantidade de instantes, igualmente espaçados entre o tempo atual, zero, e o vencimento do título, T . Deste modo, para $M+1$ preços da ação do emissor e $N+1$ instantes, a

representação gráfica dos valores discretizados de S e t , é uma grade com $(M + 1)(N + 1)$ pontos, cada um representando um valor de S e t . Observa-se que os valores possíveis dessas variáveis estão discretizados em um número finito de pontos, sendo o ponto (i, j) o correspondente ao instante e ao preço da ação.

Resumindo, teremos:

Processo de discretização de t ($0 \rightarrow T$)

É considerado um determinado intervalo de tempo igualmente distribuído entre o instante corrente zero e a data de vencimento da opção que chamaremos de T .

Para $N + 1$ intervalos ($0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, T$): $\rightarrow \Delta t = \frac{T}{N}$

Processo de discretização de S ($0 \rightarrow S_{max}$)

Da mesma forma, para $M+1$ intervalos de preço-ativo objeto ($0, \Delta S, 2\Delta S, 3\Delta S, \dots, S_{max}$): $\rightarrow \Delta S = \frac{S_{max}}{M}$

Dado o processo em tempo discreto, serão assumidos valores na malha que descreve o ativo objeto ST . Deste modo, é possível se obter graficamente uma malha com $(M+1)(N+1)$ pontos, onde cada ponto possui uma coordenada específica de acordo com a figura abaixo.

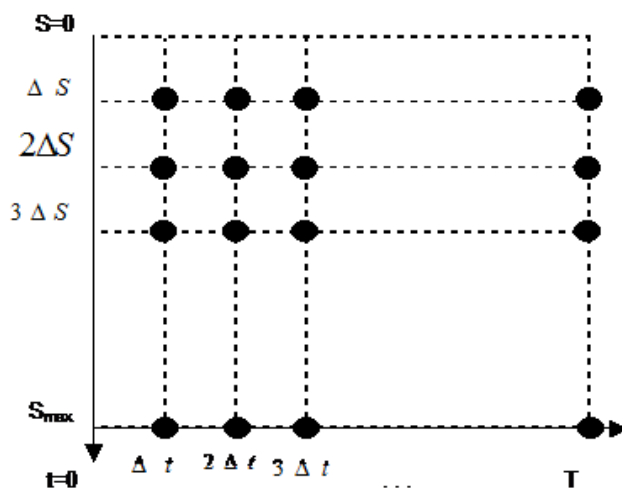


Figura 4.1: Grade com a discretização dos valores do ativo objeto e do tempo

O ponto (i, j) representa o preço do ativo objeto $j\Delta S$ no instante $i\Delta t$.

A função f_i^j representa o valor da opção no ponto (i, j) .

Aproximação por diferenças finitas

Dada a equação diferencial parcial 3.4, basicamente, queremos encontrar alguma aproximação para as diferenciais:

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}, \frac{\partial f}{\partial S}$$

Para um dado ponto (i, j) na malha, $\frac{\partial f}{\partial S}$ pode ser representado por:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta S} \rightarrow \text{Aproximação Diferença Posterior (Forward Difference)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_i^j - f_i^{j-1}}{\Delta S} \rightarrow \text{Aproximação Diferença Anterior (Backward Difference)}$$

Ainda é possível usar uma aproximação simétrica (média dos dois pontos apresentados anteriormente), como é sugerido por [12] (Diferença Central):

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta S}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial t}$, é utilizado a aproximação por diferença avançado, onde o valor no instante $i\Delta t$ é relacionado ao valor no instante $(i+1)\Delta t$ por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t}$$

Assim, para o ponto (i, j) , $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ pode se representar por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta S} - \frac{f_i^j - f_i^{j-1}}{\Delta S}}{\Delta S} = \frac{f_i^{j+1} + f_i^{j-1} - 2f_i^j}{\Delta S^2}$$

Substituindo-se os valores de $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}, \frac{\partial f}{\partial S}$ na equação 3.4, de acordo com uma aproximação acima, fazendo-se $S = i\Delta S$, poderemos resolver a equação obtida de forma explícita, implícita ou metade explícita e a outra metade implícita. Além disso, com variações nos valores de S ou de $f(S, t)$ podemos usar os métodos de Brennan&Schwartz e Courtadon respectivamente.

Definindo as Condições de Contorno

O valor da opção no vencimento (T), é definido pela valor máximo entre a diferença do valor do ativo no instante T na posição i ($i\Delta S$) e o preço de exercício da opção (K), e o valor 0, ou seja, $\max[(i\Delta S - K), 0]$. Para maiores detalhes, recomenda-se a leitura do capítulo 2 do presente trabalho onde é exposto o tratamento para a opção de compra (call) e opção de venda (put).

Na fronteira inferior, onde o valor do ativo ($M\Delta S$) assume o valor máximo (Smax), o valor da opção assume o valor 0. O Smax deve ser definido de forma que não seja inferior ao preço de exercício da opção durante a vida útil do título.

Já a situação inversa, ou seja, na fronteira superior onde o valor do ativo (S) assume o valor de 0, o valor da opção será o preço de exercício, ou seja, K.

Logo:

$$f_i^N = 0, \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, M$$

$$f_i^0 = K, \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, M$$

$$f_M^j = \text{Max}[(i\Delta S - K), 0], \text{ para } j = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

Preenchendo a grade anterior com as condições de contorno, teremos:

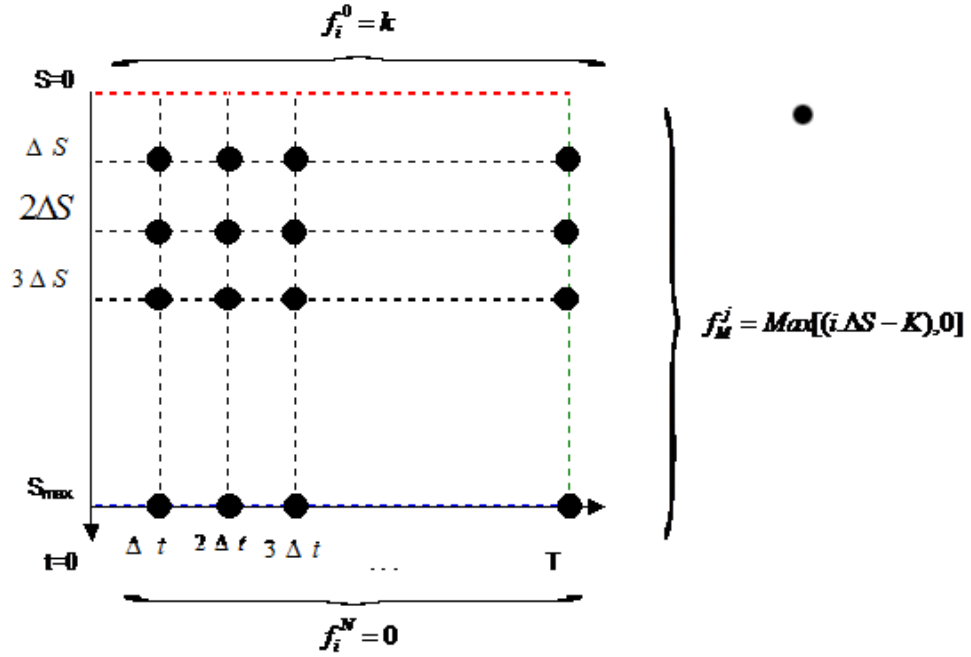


Figura 4.2: Condição de Contorno e Inicial

As equações fornecem o valor da opção nas três extremidades da grade, onde $S = 0$, $S = S_{max}$ e $t = T$.

Abaixo, serão feitas as abordagens dos métodos em questão. São elas:

- Método de Diferenças Finitas - Euler Implícito (MDFI);
- Método de Diferenças Finitas - Euler Explícito (MDFE);
- Método de Diferenças Finitas - Crank-Nicolson;
- Método de Diferenças Finitas - Brennan&Schwartz; e
- Método de Diferenças Finitas - Courtadon

Método de Diferenças Finitas Euler Implícito

Dada a equação diferencial parcial 3.4, basicamente, queremos encontrar alguma aproximação para os diferenciais:

$$\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}, \frac{\partial f}{\partial S}$$

Para um dado ponto (i, j) na malha, $\frac{\partial f}{\partial S}$ pode ser representado por:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta S}$$

Para $\frac{\partial f}{\partial t}$, é utilizado a aproximação por diferença avançado, onde o valor no instante $i\Delta t$ é relacionado ao valor no instante $(i+1)\Delta t$ por:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t}$$

Assim, para o ponto (i, j) , $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ pode se representar por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta S} - \frac{f_i^j - f_i^{j-1}}{\Delta S}}{\Delta S} = \frac{f_i^{j+1} + f_i^{j-1} - 2f_i^j}{\Delta S^2}$$

Substituindo-se os valores de $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$, $\frac{\partial f}{\partial S}$ na equação 3.4 e fazendo-se $S = j\Delta S$ obtém-se:

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta S} ri\Delta S + \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{f_i^{j+1} + f_i^{j-1} - 2f_i^j}{\Delta S^2} \sigma^2 i^2 \Delta S^2 = r f_i^j$$

Resolvendo a equação diferencial 3.4, sujeita às condições de contorno e inicial, tem-se o valor do título. Pode-se resolver o problema pela aplicação do Método das Diferenças Finitas Euler Implícito, já que não existe uma solução analítica para a equação. Na aplicação do método, a equação diferencial é convertida em um conjunto de equações de diferenças, que, então, são resolvidas iterativamente.

Assim, a equação diferencial 3.4, fazendo-se $S = i\Delta S$ assume a forma:

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta S} ri\Delta S + \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{f_i^{j+1} + f_i^{j-1} - 2f_i^j}{\Delta S^2} \sigma^2 i^2 \Delta S^2 = r f_i^j$$

onde pode ser reescrita como:

$$\frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2} ri + \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t} + \frac{1}{2} (f_i^{j+1} + f_i^{j-1} - 2f_i^j) \sigma^2 i^2 = r f_i^j$$

Arrumando os termos, teremos:

$$\left(\frac{ri}{2}\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t\right) f_i^{j-1} + (1 + \sigma^2 i^2 \Delta t + r\Delta t) f_i^j + \left(-\frac{ri}{2}\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t\right) f_i^{j+1} = f_{i+1}^j$$

onde:

$$a_i f_i^{j-1} + b_i f_i^j + c_i f_i^{j+1} = f_{i+1}^j$$

$$a_i = \frac{ri}{2}\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t$$

$$b_i = 1 + \sigma^2 i^2 \Delta t + r \Delta t$$

$$c_i = -\frac{r_i}{2} \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 i^2 \Delta t$$

Definidos os valores do título no instante final e aplicando-se as condições de contorno, resta utilizar a equação para se chegar ao valor da opção de compra c em todos os outros pontos. Devemos considerar, inicialmente, os pontos correspondentes ao instante $T - \Delta t$, ou seja, com $j = N - 1$. Desta forma, devemos resolver a equação abaixo:

$$a_i f_i^{j-1} + b_i f_i^j + c_i f_i^{j+1} = f_{i+1}^j$$

Pela equação acima, verificamos que a mesma não pode ser resolvida para os valores de $j = 0$ e $j = M$ (dado que j varia de 0 a M), pois não existiriam os termos f_{N-1}^{j-1} e f_{N-1}^{j+1} respectivamente. Assim, tem-se:

$$\text{Para } j = 1 : a_1 f_{N-1}^0 + b_1 f_{N-1}^1 + c_1 f_{N-1}^2 = f_N^1$$

$$\text{Para } j = 2 : a_2 f_{N-1}^1 + b_2 f_{N-1}^2 + c_2 f_{N-1}^3 = f_N^2$$

$$\text{Para } j = 3 : a_3 f_{N-1}^2 + b_3 f_{N-1}^3 + c_3 f_{N-1}^4 = f_N^3$$

.

.

.

$$\text{Para } j = M - 1 : a_{M-1} f_{N-1}^{M-2} + b_{M-1} f_{N-1}^{M-1} + c_{M-1} f_{N-1}^M = f_N^{M-1}$$

Pelas condições de contorno e inicial definidas anteriormente, definimos os valores de f_{N-1}^0, f_{N-1}^M e $f_N^1, f_N^2, f_N^3, \dots, f_N^{M-1}$, desta forma temos que resolver $M - 1$ equações com $N - 1$ incógnitas.

Uma vez determinados todos os valores possíveis do ativo para instante de tempo, " i ", no caso acima $N-1$, devemos compará-los com os preços obtidos na última coluna (condição inicial que indica os preços máximos). Se o valor encontrado para o título em um determinado ponto (i, j) não estiver respeitando a área restrita pelas condições de contorno, este valor deve ser alterado de acordo com as estratégias ótimas definidas. Os nós correspondentes $T - i\Delta t$ são então tratados de forma semelhante, e assim sucessivamente.

$$f_{i+1}^j \rightarrow \begin{cases} a_i \rightarrow f_i^{j-1} \\ b_i \rightarrow f_i^j \\ c_i \rightarrow f_i^{j+1} \end{cases}$$

No instante final teremos:

$$\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
\cdot & & & & & \\
0 & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f_N^0 \\
f_N^1 \\
f_N^2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
f_N^{M-1} \\
f_N^M
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f_{N+1}^1 \\
f_{N+1}^2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
f_{N+1}^{M-1}
\end{bmatrix}$$

Método de Diferenças Finitas Euler Explícito

Uma simplificação para o Método de Diferenças Finitas Euler Implícito (MDFI) é o uso do Método de Diferenças Finitas Euler Explícito (MDFE). Escolhendo-se adequadamente a aproximação para as derivadas parciais a serem usadas no processo de discretização, ter-se-á:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} &= \frac{f_{i+1}^{j+1} + f_{i+1}^{j-1} - 2f_{i+1}^j}{\Delta S^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t} \\ \frac{\partial f}{\partial S} &= \frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^{j-1}}{2\Delta S}\end{aligned}$$

Do mesmo modo que no método implícito, fazendo-se a substituição dos valores das derivadas parciais na equação diferencial e fazendo-se $S = i\Delta S$ obtém-se:

$$\frac{f_{i+1}^{j+1} - f_{i+1}^{j-1}}{2\Delta S} r i \Delta S + \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{f_{i+1}^{j+1} + f_{i+1}^{j-1} - 2f_{i+1}^j}{\Delta S^2} = r f_i^j$$

para $j = 1, 2, 3, \dots, M$ e $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Rearrmando-se os termos, obtém-se:

$$-\frac{r i \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 i^2 \Delta t}{r \Delta t + 1} f_{i+1}^{j-1} + \frac{1 - \sigma^2 i^2 \Delta t}{r \Delta t + 1} f_{i+1}^j + \frac{\frac{r i}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 i^2 \Delta t}{r \Delta t + 1} f_{i+1}^{j+1} = f_i^j$$

Onde,

$$a_i f_{i+1}^{j-1} + b_i f_{i+1}^j + c_i f_{i+1}^{j+1} = f_i^j$$

$$a_i = \frac{-\frac{r i}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 i^2 \Delta t}{r \Delta t + 1}$$

$$b_i = \frac{1 - \sigma^2 i^2 \Delta t}{r \Delta t + 1}$$

$$c_i = \frac{\frac{r i}{2} \Delta t + \frac{1}{2} \sigma^2 i^2 \Delta t}{r \Delta t + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i+1}^{j-1} \rightarrow a_i \\ f_{i+1}^j \rightarrow b_i \\ f_{i+1}^{j+1} \rightarrow c_i \end{array} \right\} \rightarrow f_i^j$$

No instante final teremos:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{N+1}^0 \\ f_N^1 \\ f_{N+1}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N+1}^{M-1} \\ f_{N+1}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_N^1 \\ f_N^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N^{M-1} \end{bmatrix}$$

Como as condições de contorno valem tanto para o método Euler Implícito como para o Euler explícito, os valores para a opção em T já são conhecidos. Os valores em $T - \Delta t$ são obtidos a partir da equação:

$$a_i f_{i+1}^{j-1} + b_i f_{i+1}^j + c_i f_{i+1}^{j+1} = f_i^j$$

Este procedimento deverá ser repetido até o instante inicial t .

Método de Diferenças Finitas - Crank-Nicolson

O princípio do método é aproximar a derivada temporal por diferença central e a derivada do preço pela média das diferenças centrais nos níveis de tempo j e $j+1$

Logo,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right|_j^{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{j+1}+f_{i+1}^{j-1}-2f_{i+1}^j}{\Delta S^2} + \frac{f_i^{j+1}+f_i^{j-1}-2f_i^j}{\Delta S^2}\right) = \frac{f_{i+1}^{j+1}+f_{i+1}^{j-1}-2f_{i+1}^j+f_i^{j+1}+f_i^{j-1}-2f_i^j}{2\Delta S^2} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_j^{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}^j-f_i^j}{\Delta t} + \frac{f_{i+1}^{j+1}-f_i^{j+1}}{\Delta t}\right) = \frac{f_{i+1}^j-f_i^j}{\Delta t} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial S}\right|_j^{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i+1}^{j-1}}{2\Delta S} + \frac{f_i^{j+1}-f_i^{j-1}}{2\Delta S}\right) = \frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i+1}^{j-1}+f_i^{j+1}-f_i^{j-1}}{4\Delta S}\end{aligned}$$

Fazendo-se a substituição dos valores das derivadas parciais na equação diferencial e fazendo-se $S = i\Delta S$ obtém-se:

$$\left(\frac{f_{i+1}^{j+1}-f_{i+1}^{j-1}+f_i^{j+1}-f_i^{j-1}}{4\Delta S}\right)ri\Delta S + \left(\frac{f_{i+1}^j-f_i^j}{\Delta t}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{f_{i+1}^{j+1}+f_{i+1}^{j-1}-2f_{i+1}^j+f_i^{j+1}+f_i^{j-1}-2f_i^j}{2\Delta S^2}\right)\sigma^2i\Delta S^2 = rf$$

Rearrmando os termos e isolando os termos nos tempo i e $(i+1)$. O termo de tempo $i + 1$ será calculado pelo método explícito e o de tempo i pelo método implícito.

$$\left(-\frac{ri}{4}\Delta t + \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)f_{i+1}^{j-1} + \left(-\frac{1}{2}\sigma^2i^2\Delta t + 1\right)f_{i+1}^j + \left(+\frac{ri}{4}\Delta t + \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)f_{i+1}^{j+1} = \left(+\frac{ri}{4}\Delta t - \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)f_i^{j-1} + \left(-\frac{1}{2}\sigma^2i^2\Delta t + r\Delta t + 1\right)f_i^j + \left(-\frac{ri}{4}\Delta t - \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)f_i^{j+1}$$

Fazendo a substituição acima pelas variáveis a_i , b_i , c_i , d_i , e_i e f_i temos:

$$a_if_{i+1}^{j-1} + b_if_{i+1}^j + c_if_{i+1}^{j+1} = d_if_i^{j-1} + e_if_i^j + f_if_i^{j+1}$$

$$a_i = \left(-\frac{ri}{4}\Delta t + \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)$$

$$b_i = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2i^2\Delta t + 1\right)$$

$$c_i = \left(+\frac{ri}{4}\Delta t + \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)$$

$$d_i = \left(+\frac{ri}{4}\Delta t - \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)$$

$$e_i = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2i^2\Delta t + r\Delta t + 1\right)$$

$$f_i = \left(-\frac{ri}{4}\Delta t - \frac{1}{4}\sigma^2i^2\Delta t\right)$$

No instante final, teremos a expressão:

$$a_if_{N+1}^{j-1} + b_if_{N+1}^j + c_if_{N+1}^{j+1} = d_if_N^{j-1} + e_if_N^j + f_if_N^{j+1}$$

Como os valores no instante $(N + 1)$ são conhecidos (condição inicial), devemos cal-

cular o termo $a_i f_{N+1}^{j-1} + b_i f_{N+1}^j + c_i f_{N+1}^{j+1}$ pelo método explícito e, em seguida, calcular o termo $d_i f_N^{j-1} + e_i f_N^j + f_i f_N^{j+1}$ pelo método implícito. Este procedimento deve ser repetido até o instante inicial.

Abaixo é apresentada esta solução via matriz para facilitar o entendimento.

Inicialmente temos que calcular:

$$g_i = a_i f_{N+1}^{j-1} + b_i f_{N+1}^j + c_i f_{N+1}^{j+1} \rightarrow \text{Método Explícito}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i+1}^{j-1} \rightarrow a_i \\ f_{i+1}^j \rightarrow b_i \\ f_{i+1}^{j+1} \rightarrow c_i \end{array} \right\} \rightarrow g_i$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{N+1}^0 \\ f_N^1 \\ f_{N+1}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N+1}^{M-1} \\ f_{N+1}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{M-1} \end{bmatrix}$$

De posse dos valores de g, calculamos a equação abaixo:

$$d_i f_N^{j-1} + e_i f_N^j + f_i f_N^{j+1} = g_i \rightarrow \text{Método Implícito}$$

$$g_i \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_i \rightarrow f_i^{j-1} \\ b_i \rightarrow f_i^j \\ c_i \rightarrow f_i^{j+1} \end{array} \right.$$

No instante final teremos:

$$\begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & e_2 & f_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & d_{M-1} & e_{M-1} & f_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_N^0 \\ f_N^1 \\ f_N^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N^{M-1} \\ f_N^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{M-1} \end{bmatrix}$$

Método de Diferenças Finitas - Brennan&Schwartz

Por definição, vamos considerar $Z = \ln S$, logo $f(Z, t) = c(S, t)$

Como $S = e^z$

$$\frac{\partial c}{\partial S} = e^{-z} \frac{\partial f}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = e^{-2z} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} - \frac{\partial f}{\partial Z} \right)$$

Substituindo os valores acima na Equação diferencial parcial 3.4, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} - rf = 0$$

Sabendo-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial Z} = \frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta Z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = \frac{f_i^{j+1} + f_i^{j-1} - 2f_i^j}{\Delta Z^2}$$

Podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\left(\frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta t}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \left(\frac{f_i^{j+1} - f_i^{j-1}}{2\Delta Z}\right) + \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{f_i^{j+1} + f_i^{j-1} - 2f_i^j}{\Delta Z^2}\right) - rf_i^j = 0$$

Reescrevendo a equação temos:

$$f_{i+1}^j = \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\Delta Z^2} + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\Delta Z}\right) \Delta t \right] f_i^{j-1} + \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\Delta Z^2} + r\right) \Delta t \right] f_i^j + \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\Delta Z^2} - \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\Delta Z}\right) \Delta t \right] f_i^{j+1}$$

Onde

$$a = \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\Delta Z^2} + \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\Delta Z}\right) \Delta t \right]$$

$$b = \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\Delta Z^2} + r\right) \Delta t \right]$$

$$c = \left[\left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\Delta Z^2} - \frac{1}{2} \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\Delta Z}\right) \Delta t \right]$$

Observe que os coeficientes a, b e c são independentes do valor de i e j e seu somatório é igual a 1 ($a + b + c = 1$). Além disso, o valor de ΔZ deve ser menor ou igual a $\frac{\sigma^2}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}$ para que os coeficientes sejam não negativos (vide [4]).

Deste modo:

$$\Delta t = \frac{T}{N} \text{ e } \Delta Z = \frac{\frac{\sigma^2}{r - \frac{1}{2}\sigma^2}}{M}$$

$$f_{i+1}^j \rightarrow \begin{cases} a_i \rightarrow f_i^{j-1} \\ b_i \rightarrow f_i^j \\ c_i \rightarrow f_i^{j+1} \end{cases}$$

Após a resolução do sistema do mesmo modo visto no método Euler implícito, encontraremos os valores $f(Z, t)$ do instante 1 até o instante T. Para encontrar o valor da opção de compra no instante inicial, devemos fazer uma interpolação linear com os valores obtidos de Z.

Método de Diferenças Finitas - Courtadon

O princípio do modelo é a suposição que $U(S, t) = e^{-rt}w(S, t)$, ou seja, $w(S, t) = e^{+rt}U(S, t)$

Devemos partir da Equação Diferencial Parcial 3.4, onde $f = w(S, t) = e^{+rt}U(S, t)$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = e^{rt} \frac{\partial U}{\partial S}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = re^{rt}U(S, t) + e^{rt} \frac{\partial U}{\partial t}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = e^{rt} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$ Substituindo os valores acima na equação diferencial parcial 3.4, temos:

$$re^{rt}U(S, t) + e^{rt} \frac{\partial U}{\partial t} + e^{rt} \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} e^{rt} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = re^{rt}U(S, t)$$

Simplificando, obtemos a equação:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = 0$$

Sabemos que:

Logo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \right|_j^{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} + U_{i+1}^{j-1} - 2U_{i+1}^j}{\Delta S^2} + \frac{U_i^{j+1} + U_i^{j-1} - 2U_i^j}{\Delta S^2} \right) = \frac{U_{i+1}^{j+1} + U_{i+1}^{j-1} - 2U_{i+1}^j + U_i^{j+1} + U_i^{j-1} - 2U_i^j}{2\Delta S^2} \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_j^{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta t} + \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta t} \right) = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta t} \\ \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_j^{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i+1}^{j-1}}{2\Delta S} + \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2\Delta S} \right) = \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i+1}^{j-1} + U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{4\Delta S} \end{aligned}$$

Substituindo em $\frac{\partial U}{\partial t} + rS \frac{\partial U}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} = 0$, simplificando e se arrumando os termos temos:

$$\begin{aligned} &(-\frac{r_i}{4} + \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t)U_{i+1}^{j-1} + (1 - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t)U_{i+1}^j + (\frac{r_i}{4} + \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t)U_{i+1}^{j+1} = // (\frac{r_i}{4} - \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t)U_i^{j-1} + \\ &(1 + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t)U_i^j + (-\frac{r_i}{4} - \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t)U_i^{j+1} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição acima pelas variáveis a_i , b_i , c_i , d_i , e_i e f_i temos:

$$a_i U_{i+1}^{j-1} + b_i U_{i+1}^j + c_i U_{i+1}^{j+1} = d_i U_i^{j-1} + e_i U_i^j + f_i U_i^{j+1}$$

$$a_i = (-\frac{r_i}{4} + \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t)$$

$$b_i = (1 - \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t)$$

$$c_i = (\frac{r_i}{4} + \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t)$$

$$d_i = \left(+\frac{r_i}{4} - \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t\right)$$

$$e_i = \left(1 + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \Delta t\right)$$

$$f_i = \left(-\frac{r_i}{4} - \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \Delta t\right)$$

No instante final, teremos a expressão:

$$a_i U_{N+1}^{j-1} + b_i U_{N+1}^j + c_i U_{N+1}^{j+1} = d_i U_N^{j-1} + e_i U_N^j + f_i U_N^{j+1}$$

Como os valores no instante $N + 1$ são conhecidos (condição inicial), devemos calcular o termo à direita pelo método explícito e, em seguida, calcular o termos à esquerda pelo método implícito. Este procedimento deve ser repetido até o instante inicial.

OBS: O método de Courtadon considera o valor da opção de compra multiplicado por e^{rt} . Desta forma, ao encontrarmos o valor da opção de compra pelo método de Courtadon (aqui está sendo considerado o valor de U), devemos multiplicá-lo por e^{-rt} para encontrar o valor da opção. (vide [1])

Abaixo é apresentada esta solução via matriz para facilitar o entendimento.

Inicialmente temos que calcular:

$$g_i = a_i U_{N+1}^{j-1} + b_i U_{N+1}^j + c_i U_{N+1}^{j+1} \rightarrow \text{Método Explícito}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i+1}^{j-1} \rightarrow a_i \\ f_{i+1}^j \rightarrow b_i \\ f_{i+1}^{j+1} \rightarrow c_i \end{array} \right\} \rightarrow g_i$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{N+1}^0 \\ f_N^1 \\ f_{N+1}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{N+1}^{M-1} \\ f_{N+1}^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{M-1} \end{bmatrix}$$

De posse dos valores de g , calculamos a equação abaixo:

$$d_i f_N^{j-1} + e_i f_N^j + f_i f_N^{j+1} = g_i \rightarrow \text{Método Implícito}$$

$$g_i \rightarrow \begin{cases} a_i \rightarrow f_i^{j-1} \\ b_i \rightarrow f_i^j \\ c_i \rightarrow f_i^{j+1} \end{cases}$$

No instante final teremos:

$$\begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & e_2 & f_2 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & d_{M-1} & e_{M-1} & f_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_N^0 \\ f_N^1 \\ f_N^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N^{M-1} \\ f_N^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{M-1} \end{bmatrix}$$

Capítulo 5

Avaliação e Implementação dos Métodos Numéricos

A existência de uma solução analítica para precificação da opção como função dos parâmetros S (preço do ativo objeto), K (preço do ativo no exercício), T (tempo em anos), σ (volatilidade) e r (taxa de juros livre de risco) é uma das principais razões para a enorme difusão do modelo Black&Scholes. Dados estes parâmetros, é possível obter o preço da opção para todo tempo (t). Podemos citar como a maior vantagem do modelo Black&Scholes sobre os outros modelos de precificação de opções sobre ações, a praticidade do modelo. Desta forma, é possível para os agentes do mercado de opções precificarem suas opções praticamente em tempo real utilizando o modelo de Black&Scholes. Por uma série de razões, os agentes sabem que, evidentemente, o preço teórico não é idêntico ao preço de mercado. Entretanto, o preço obtido com o modelo de Black&Scholes funciona como um benchmark para a negociação. De qualquer forma, o preço obtido com o modelo ajuda a compreender parte da dinâmica determinística que rege o preço da opção de sua data de lançamento até o vencimento.

A precificação de opções de compra americana quando a volatilidade (σ) e a taxa de juros (r) não possuem comportamentos estocásticos, pode ser obtida pelo uso do modelo de Black&Scholes. O objetivo deste trabalho, entretanto, é:

1. comparar os métodos numéricos, avaliando se os mesmos produzem bons resultados na precificação de uma opção; e
2. mostrar, de forma clara e didática, a implementação e as vantagens computacionais de cada método.

Os seguintes critérios serão utilizados para comparação dos métodos numéricos e avaliação e escolha do algoritmo a ser utilizado:

- acurácia com preços do modelo Black&Scholes;
- velocidade computacional;
- estimativas dos erros; e
- disponibilidade das derivadas dos preços;

Neste trabalho, para precificação de opções, serão utilizadas as seguintes medidas para os atributos acurácia com preços do modelo Black&Scholes e o tempo computacional:

Raiz do Erro quadrático médio (REQM ou RMS): mede a acurácia do método, e é calculado por meio da fórmula:

$$REQM = \sqrt{\left(\frac{c_i - Mc_i}{c_i}\right)^2}$$

onde:

c_i é o preço de mercado da opção na data i ; e

Mc_i é o preço da opção na data i calculado pelo método numérico..

Tempo Computacional (TC): o tempo computacional do método numérico será definido a partir da função `cputime` do programa ¹, ou seja, será obtida a hora do computador antes de executada a função e subtraída da hora final resultando, deste modo, do tempo total para cada método. De posse deste tempo, o operador pode determinar qual o método mais rápido.

De posse das duas medidas acima, é possível verificar se o aumento de uma medida se justifica pelo aumento da outra, ou seja, o aumento da acurácia de um método numérico é compensada pelo aumento de tempo computacional, e vice-versa.

¹O tempo será medido em segundos e será considerado o tempo da CPU usado apenas pelo programa

Discretização T e S	Explícito		Implícito		Brennan&Schwartz		Courtadon		Crank-Nicolson		Binomial		Black&Scholes
	Opção	Tempo	Opção	Tempo	Opção	Tempo	Opção	Tempo	Opção	Tempo	Opção	Tempo	
N=40	0,98481	0,015625	0,97886	0,000000	1,00670	0,015625	0,98209	0,00000	0,98184	0,015625	1,02470	0,0000	0,99730
N=80	1,01860	0,015625	0,99193	0,046875	0,99710	0,031250	0,99351	0,03125	0,99338	0,031250	1,00510	0,0000	0,99730
N=120	-	0,046875	0,99454	0,078125	0,99710	0,062500	0,99559	0,09375	0,99551	0,062500	0,99460	0,0156	0,99730
N=160	-	0,109380	0,99553	0,109380	0,99747	0,109380	0,99632	0,18750	0,99625	0,125000	1,00380	0,0156	0,99730
N=200	-	0,171880	0,99603	0,218750	0,99735	0,171880	0,99665	0,37500	0,99660	0,203130	1,00150	0,0156	0,99730
N=240	-	0,265630	0,99631	0,312500	0,99732	0,281250	0,99684	0,62500	0,99679	0,328130	0,99910	0,0156	0,99730
N=280	-	0,390630	0,99650	0,468750	0,99740	0,421880	0,99695	1,01560	0,99691	0,484380	0,99670	0,0156	0,99730
N=320	-	0,546880	0,99663	0,640630	0,99741	0,593750	0,99702	1,67190	0,99699	0,687500	0,99450	0,0156	0,99730
N=360	-	0,750000	0,99672	0,875000	0,99735	0,828130	0,99707	2,78130	0,99704	0,937500	0,99460	0,0156	0,99730
N=400	-	0,984380	0,99679	1,203100	0,99750	1,125000	0,99710	4,31250	0,99708	1,265600	0,99950	0,0313	0,99730
N=440	-	1,296900	0,99684	1,546900	0,99736	1,453100	0,99713	6,32810	0,99710	1,718800	0,99880	0,0313	0,99730
N=480	-	1,656300	0,99689	1,953100	0,99749	1,859400	0,99715	8,84380	0,99713	2,343800	0,99790	0,0469	0,99730
N=520	-	2,046900	0,99692	2,421900	0,99747	2,328100	0,99716	11,93800	0,99714	3,125000	0,99700	0,0469	0,99730
N=560	-	2,500000	0,99695	3,015600	0,99746	2,828100	0,99717	15,76600	0,99716	3,953100	0,99610	0,0625	0,99730
N=600	-	3,000000	0,99698	3,828100	0,99750	3,453100	0,99718	20,26600	0,99717	4,906300	0,99520	0,0625	0,99730
N=640	-	3,328100	0,99700	4,781300	0,99751	4,140600	0,99719	25,56300	0,99718	5,984400	0,99890	0,0625	0,99730
N=680	-	3,796900	0,99702	5,937500	0,99750	4,906300	0,99720	31,79700	0,99718	7,156300	0,99860	0,0781	0,99730
N=720	-	4,375000	0,99703	7,265600	0,99752	5,765600	0,99720	38,89100	0,99719	8,515600	0,99830	0,0781	0,99730
N=760	-	5,015600	0,99704	8,828100	0,99753	6,718800	0,99721	46,93800	0,99720	10,000000	0,99790	0,0938	0,99730
N=800	-	5,734400	0,99706	10,406000	0,99751	7,734400	0,99721	56,40600	0,99720	11,625000	0,99750	0,1094	0,99730

Tabela 5.1: Discretização do tempo (T) e do valor do ativo objeto (S) com respectivo preço da opção e tempo consumido por cada metodologia

“-” → Não houve convergência

Discretização T e S	Explícito		Implícito		Brennan&Schwartz		Courtadon		Crank-Nicolson		Binomial		Black&Scholes
	Opção	REQM	Opção	REQM	Opção	REQM	Opção	REQM	Opção	REQM	Opção	REQM	
40	0,98481	0,012523814	0,97886	0,018489923	1,00670	0,009425449	0,98209	0,015251178	0,98184	0,015501855	1,02470	0,027474180	0,99730
80	1,01860	0,021357666	0,99193	0,005384538	0,99710	0,000200541	0,99351	0,003800261	0,99338	0,003930613	1,00510	0,007821117	0,99730
120	-	-	0,99454	0,002767472	0,99710	0,000200541	0,99559	0,001714629	0,99551	0,001794846	0,99460	0,002707310	0,99730
160	-	-	0,99553	0,001774792	0,99747	0,000170460	0,99632	0,000982653	0,99625	0,001052843	1,00380	0,006517598	0,99730
200	-	-	0,99603	0,001273438	0,99735	0,000050135	0,99665	0,000651760	0,99660	0,000701895	1,00150	0,004211371	0,99730
240	-	-	0,99631	0,000992680	0,99732	0,000020054	0,99684	0,000461245	0,99679	0,000511381	0,99910	0,001804873	0,99730
280	-	-	0,99650	0,000802166	0,99740	0,000100271	0,99695	0,000350948	0,99691	0,000391056	0,99670	0,000601624	0,99730
320	-	-	0,99663	0,000671814	0,99741	0,000110298	0,99702	0,000280758	0,99699	0,000310839	0,99450	0,002807580	0,99730
360	-	-	0,99672	0,000581570	0,99735	0,000050135	0,99707	0,000230623	0,99704	0,000260704	0,99460	0,002707310	0,99730
400	-	-	0,99679	0,000511381	0,99750	0,000200541	0,99710	0,000200541	0,99708	0,000220596	0,99950	0,002205956	0,99730
440	-	-	0,99684	0,000461245	0,99736	0,000060162	0,99713	0,000170460	0,99710	0,000200541	0,99880	0,001504061	0,99730
480	-	-	0,99689	0,000411110	0,99749	0,000190514	0,99715	0,000150406	0,99713	0,000170460	0,99790	0,000601624	0,99730
520	-	-	0,99692	0,000381029	0,99747	0,000170460	0,99716	0,000140379	0,99714	0,000160433	0,99700	0,000300812	0,99730
560	-	-	0,99695	0,000350948	0,99746	0,000160433	0,99717	0,000130352	0,99716	0,000140379	0,99610	0,001203249	0,99730
600	-	-	0,99698	0,000320866	0,99750	0,000200541	0,99718	0,000120325	0,99717	0,000130352	0,99520	0,002105685	0,99730
640	-	-	0,99700	0,000300812	0,99751	0,000210569	0,99719	0,000110298	0,99718	0,000120325	0,99890	0,001604332	0,99730
680	-	-	0,99702	0,000280758	0,99750	0,000200541	0,99720	0,000100271	0,99718	0,000120325	0,99860	0,001303520	0,99730
720	-	-	0,99703	0,000270731	0,99752	0,000220596	0,99720	0,000100271	0,99719	0,000110298	0,99830	0,001002707	0,99730
760	-	-	0,99704	0,000260704	0,99753	0,000230623	0,99721	0,000090244	0,99720	0,000100271	0,99790	0,000601624	0,99730
800	-	-	0,99706	0,000240650	0,99751	0,000210569	0,99721	0,000090244	0,99720	0,000100271	0,99750	0,000200541	0,99730

Tabela 5.2: Discretização do tempo (T) e do valor do ativo objeto (S) com respectivo preço da opção e raiz do erro quadrático médio obtido para cada metodologia

“-” → Não houve convergência

A tabela 1 descreve a discretização no tempo (T) e no valor do ativo objeto (S) com o respectivo preço da opção gerado e o tempo consumido em cada metodologia. As metodologias de Courtadon e Crank-Nicolson apresentaram a solução mais próxima da exata, obtida pelo modelo de Black&Scholes. Entretanto, a segunda foi obtida, claramente, no menor tempo de processamento.

A tabela 2 descreve a discretização no tempo (T) e no valor do ativo objeto (S) com respectivos preço da opção e raiz do erro quadrático médio obtidos para cada metodologia. A metodologia de Courtadon é que apresenta a solução mais próxima da exata com menor erro quadrático médio em todas as discretizações em relação à metodologia de Crank-Nicolson. Ambas as metodologias apresentaram erros quadráticos médios menores que a metodologia binomial.

A tabela 3, descreve o tempo e o erro quadrático médio para discretizações no tempo (T) e no valor do ativo objeto (S) com mais intervalos que os utilizados nas tabelas 1 e 2, tendo em vista que o modelo binomial consome um menor tempo de processamento. Ainda assim, verifica-se que os métodos Courtadon e Crank-Nicolson com 680 e 800 intervalos apresentam menores erros quadráticos médios que o modelo Binomial com 8400 e 9600 intervalos, respectivamente.

Passos	Binomial			Black&Scholes
	Opção	Tempo	REQM	
2000	0.9977	0.6875	0.000401083	0.9973
2400	0.99677	0.96875	0.000531435	0.9973
2800	0.99732	1.2969	0.000020054	0.9973
3200	0.99711	1.7031	0.000190514	0.9973
3600	0.99717	2.1563	0.000130352	0.9973
4000	0.99722	2.6563	0.000080217	0.9973
4400	0.99716	3.2188	0.000140379	0.9973
4800	0.99721	3.8281	0.000090244	0.9973
5200	0.99742	4.4844	0.000120325	0.9973
5600	0.99715	5.2031	0.000150406	0.9973
6000	0.99736	5.9688	0.000060162	0.9973
6400	0.99705	6.7969	0.000250677	0.9973
6800	0.99729	7.8438	0.000010027	0.9973
7200	0.99739	8.5781	0.000090244	0.9973
7600	0.99718	9.5781	0.000120325	0.9973
8000	0.99732	10.609	0.000020054	0.9973
8400	0.99715	11.719	0.000150406	0.9973
8800	0.99722	12.859	0.000080217	0.9973
9200	0.99733	14.203	0.000030081	0.9973
9600	0.99715	15.391	0.000150406	0.9973

Tabela 5.3: Número de passos com respectivo preço da opção, tempo de processamento e raiz do erro quadrático médio obtido pelo método Binomial

A figura 1 apresenta o gráfico do comportamento dos métodos em função do refinamento da discretização usada. Os métodos de diferenças finitas têm um comportamento similar, ou seja, apresentam uma melhor convergência sem oscilações em relação à solução exata. Por outro lado, o modelo Binomial apresenta um comportamento oscilante, o que pode levar a erros dependendo do número de intervalos considerado.

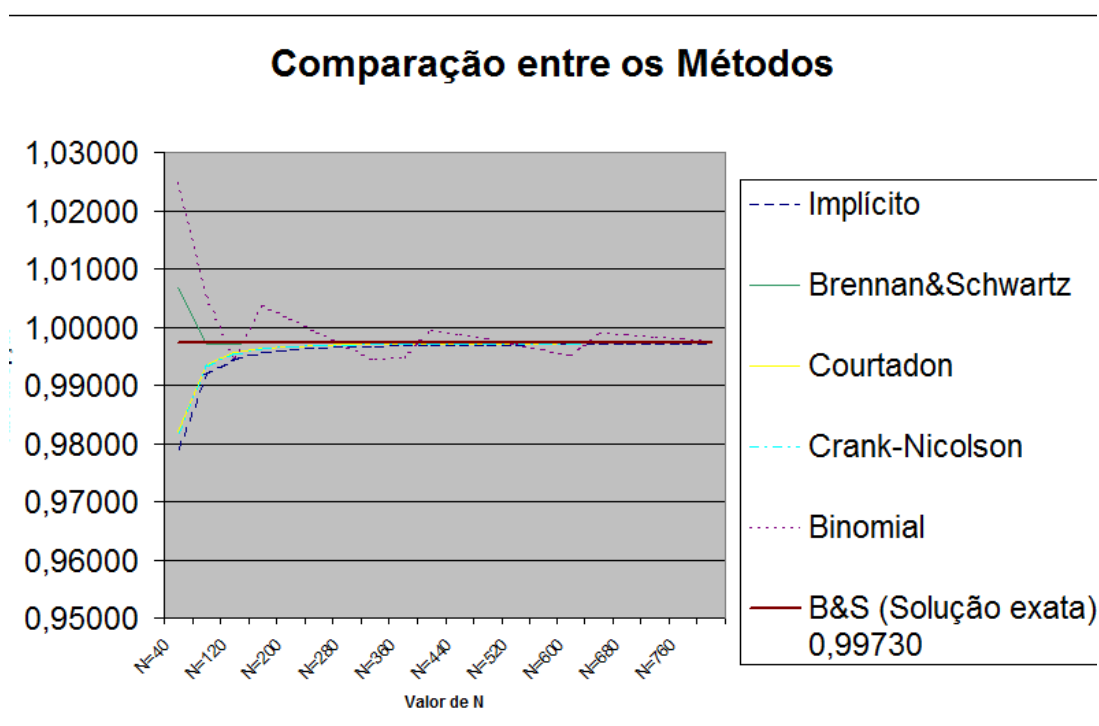


Figura 5.1: Comparação entre os métodos - Valor da opção

A figura 2 reforça o que foi apresentado na figura 1 quando utilizado o método Crank-Nicolson comparativamente com o modelo Binomial, ou seja, o método Crank-Nicolson apresenta os valores de opção de compra 0,99660 e 0,99691 para 200 e 280 intervalos, respectivamente. Já o Binomial apresenta os valores 1,00150 e 0,99670 para 200 e 280 intervalos, respectivamente, ou seja, o primeiro acima e o segundo abaixo da solução exata.

Na figura 3, a oscilação do modelo Binomial tem amplitude reduzida após pouco tempo; porém, gera erros de subprecificação e superprecificação ainda por um longo tempo. O método Crank-Nicolson, requer mais tempo para fornecer boa estimativa, e apresenta melhor convergência sem apresentar oscilações em relação à solução exata.

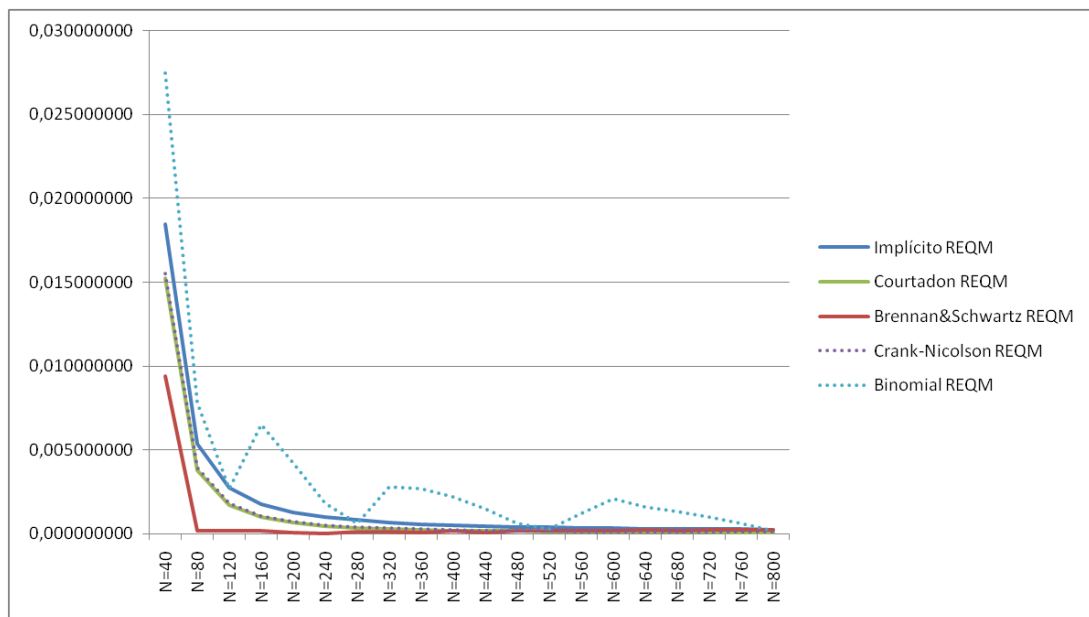


Figura 5.2: Comparação entre os métodos - Raiz do Erro Quadrático Médio

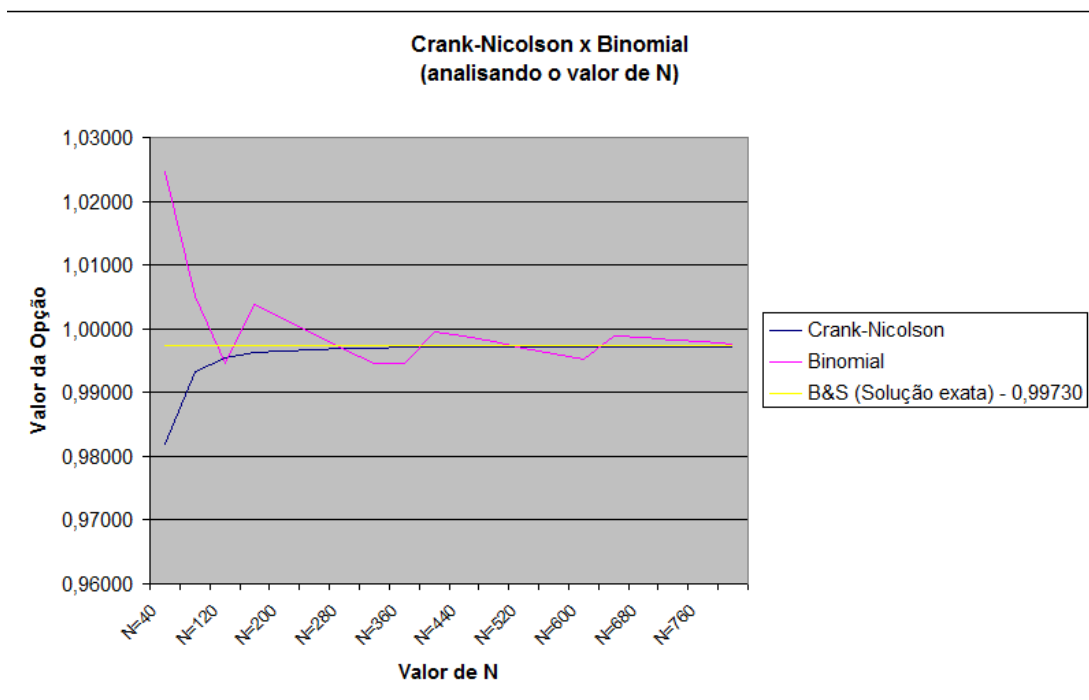


Figura 5.3: Comparação dos refinamentos das discretizações usadas nos métodos Crank-Nicolson e Binomial

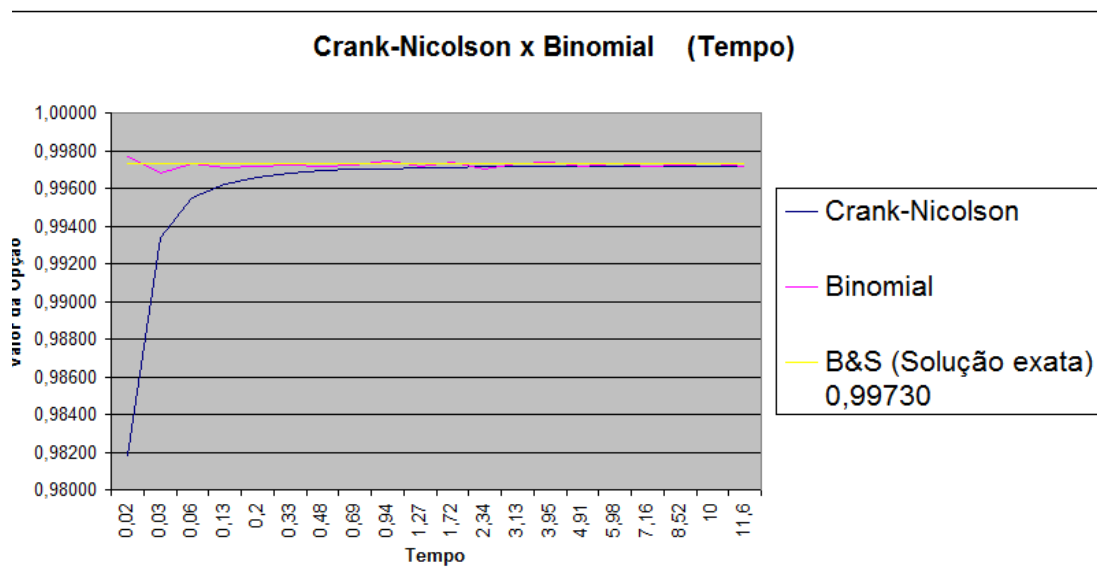


Figura 5.4: Comparação do tempo de processamento entre os métodos Crank-Nicolson e Binomial

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo do trabalho foi demonstrar como são obtidos os coeficientes para resolução da Equação Diferencial Parcial em cada método e fazer uma avaliação dos 5 métodos de diferenças finitas (Euler Explícito, Euler Implícito, Crank-Nicolson, Brennan&Schwartz e Courtadon) e o modelo Binomial em relação à solução fechada proposta pelo modelo de Black&Scholes.

Independente da discretização da malha, os métodos Euler Implícito, de Crank-Nicolson, Brennan&Schwartz e Courtadon mostram-se mais estáveis. Entretanto, possuem como desvantagem o fato de que $(M+1)$ equações com $(N+1)$ incógnitas têm que ser resolvidas simultaneamente para obter os valores da opção a cada instante. O método Euler Explícito apresenta uma solução mais simples, contudo esta abordagem possui algumas limitações no que diz respeito à convergência, principalmente quando são avaliadas opções americanas, pois podem ocorrer algumas distorções, principalmente, próximo às bordas. Contudo, este problema pode ser amenizado se for adotado um grid suficientemente pequeno no que se refere aos intervalos de tempo e preço de modo a assegurar a convergência. Mesmo sabendo dos problemas de convergência o método continua a ser largamente utilizado. Felizmente, existem algumas sugestões que têm como objetivo minimizar este problema. Por exemplo, segundo [11], uma condição suficiente para assegurar a estabilidade do método é considerar $\Delta t \leq (\frac{\Delta S}{\sigma S})^2$ (Ver tabelas abaixo onde são feitas simulações que atendem esta condição). Além disso, segundo [4], no método desenvolvido por eles, o valor de Δt deve ser menor ou igual a $(\frac{\sigma^2}{r - \frac{1}{2}\sigma^2})$ para que os coeficientes sejam não negativos, ou seja, condição suficiente para o método convergir.

	σ	0,02											
				Explícito	Implícito	Brennan&Schwartz	Courtadon	Crank-Nicolson	Black&Scholes				
Δt		$(\Delta S/\sigma \cdot S)^2$		Opção	Tempo	Opção	Tempo	Opção	Tempo	Opção	Tempo	Opção	Tempo
0,006349	<=	1,562500	N=40	0,00099	0,018750000	0,00109	0,000000000	0,00086	0,018750000	0,00104	0,000000000	0,00104	0,018750000
0,003175	<=	0,390625	N=80	0,00096	0,018750000	0,00106	0,056250000	0,00078	0,037500000	0,00101	0,037500000	0,00101	0,037500000
0,002116	<=	0,173611	N=120	0,00094	0,056250000	0,00103	0,093750000	0,00078	0,075000000	0,00098	0,112500000	0,00098	0,075000000
0,001587	<=	0,097656	N=160	0,00092	0,131250000	0,00100	0,131250000	0,00078	0,131250000	0,00096	0,225000000	0,00096	0,150000000
0,001270	<=	0,062500	N=200	0,00090	0,206250000	0,00098	0,262500000	0,00072	0,206250000	0,00094	0,450000000	0,00094	0,243750000
0,001058	<=	0,043403	N=240	0,00088	0,318750000	0,00096	0,375000000	0,00072	0,337500000	0,00092	0,750000000	0,00092	0,393750000
0,000907	<=	0,031888	N=280	0,00087	0,468750000	0,00094	0,562500000	0,00072	0,506250000	0,00090	1,218720000	0,00090	0,581250000
0,000794	<=	0,024414	N=320	0,00085	0,656250000	0,00093	0,768750000	0,00067	0,712500000	0,00089	2,062800000	0,00089	0,825000000
0,000705	<=	0,019290	N=360	0,00084	0,900000000	0,00091	1,050000000	0,00072	0,993750000	0,00088	3,337500000	0,00088	1,125000000
0,000635	<=	0,015625	N=400	0,00083	1,181250000	0,00090	1,443720000	0,00072	1,350000000	0,00086	5,175000000	0,00086	1,518720000
0,000577	<=	0,012913	N=440	0,00082	1,556280000	0,00089	1,856280000	0,00072	1,743720000	0,00085	7,593720000	0,00085	2,062500000
0,000529	<=	0,010851	N=480	0,00081	1,987560000	0,00088	2,343720000	0,00067	2,231280000	0,00084	10,612500000	0,00084	2,812500000
0,000488	<=	0,009246	N=520	0,00081	2,456280000	0,00087	2,906280000	0,00072	2,793720000	0,00084	14,325600000	0,00084	3,750000000
0,000454	<=	0,007972	N=560	0,00080	3,000000000	0,00086	3,618720000	0,00072	3,393720000	0,00083	18,919200000	0,00083	4,743720000
0,000423	<=	0,006944	N=600	0,00079	3,600000000	0,00085	4,593720000	0,00072	4,143720000	0,00082	24,319200000	0,00082	5,887560000
0,000397	<=	0,006104	N=640	0,00079	3,993720000	0,00084	5,737560000	0,00072	4,968720000	0,00081	30,675600000	0,00081	7,181280000
0,000373	<=	0,005407	N=680	0,00078	4,556280000	0,00083	7,125000000	0,00072	5,887560000	0,00081	38,156400000	0,00081	8,587560000
0,000353	<=	0,004823	N=720	0,00078	5,250000000	0,00083	8,718720000	0,00072	6,918720000	0,00080	46,669200000	0,00080	10,218720000
0,000334	<=	0,004328	N=760	0,00077	6,018720000	0,00082	10,593720000	0,00072	8,062560000	0,00080	56,325600000	0,00080	12,000000000
0,000317	<=	0,003906	N=800	0,00077	6,881280000	0,00082	12,487200000	0,00072	9,281280000	0,00079	67,687200000	0,00079	13,950000000

Tabela 6.1: Comparação entre os métodos. Uso da taxa de volatilidade de 2%

	σ	0,02				σ	0,03			σ	0,04				
				Explícito				Explícito				Explícito			
Δt		$(\Delta S/\sigma \cdot S)^2$		Opção	Tempo	Δt		$(\Delta S/\sigma \cdot S)^2$	Opção	Tempo	Δt		$(\Delta S/\sigma \cdot S)^2$	Opção	Tempo
0,006349	<=	1,562500	N=40	0,00099	0,018750000	0,006349	<=	0,694444	0,00830	0,021562500	0,006349	<=	0,390625	0,06000	0,021705469
0,003175	<=	0,390625	N=80	0,00096	0,018750000	0,003175	<=	0,173611	0,00827	0,021562500	0,003175	<=	0,097656	0,03920	0,021705469
0,002116	<=	0,173611	N=120	0,00094	0,056250000	0,002116	<=	0,077160	0,00824	0,064687500	0,002116	<=	0,043403	0,03220	0,065116406
0,001587	<=	0,097656	N=160	0,00092	0,131250000	0,001587	<=	0,043403	0,00822	0,150944400	0,001587	<=	0,024414	0,02910	0,151945227
0,001270	<=	0,062500	N=200	0,00090	0,206250000	0,001270	<=	0,027778	0,00820	0,237194400	0,001270	<=	0,015625	0,02750	0,238767102
0,001058	<=	0,043403	N=240	0,00088	0,318750000	0,001058	<=	0,019290	0,00818	0,366569400	0,001058	<=	0,010851	0,02660	0,368999915
0,000907	<=	0,031888	N=280	0,00087	0,468750000	0,000907	<=	0,014172	0,00817	0,539069400	0,000907	<=	0,007972	0,02610	0,542643665
0,000794	<=	0,024414	N=320	0,00085	0,656250000	0,000794	<=	0,010851	0,00816	0,754694400	0,000794	<=	0,006104	0,02570	0,759698352
0,000705	<=	0,019290	N=360	0,00084	0,900000000	0,000705	<=	0,008573	0,00815	1,035000000	0,000705	<=	0,004823	0,02550	1,041862500
0,000635	<=	0,015625	N=400	0,00083	1,181250000	0,000635	<=	0,006944	0,00814	1,358444400	0,000635	<=	0,003906	0,02530	1,367451477
0,000577	<=	0,012913	N=440	0,00082	1,556280000	0,000577	<=	0,005739	0,00813	1,789722000	0,000577	<=	0,003228	0,02520	1,801588635
0,000529	<=	0,010851	N=480	0,00081	1,987560000	0,000529	<=	0,004823	0,00812	2,285694000	0,000529	<=	0,002713	0,02510	2,300849145
0,000488	<=	0,009246	N=520	0,00081	2,456280000	0,000488	<=	0,004109	0,00811	2,824722000	0,000488	<=	0,002311	0,02510	2,843451135
0,000454	<=	0,007972	N=560	0,00080	3,000000000	0,000454	<=	0,003543	0,00810	3,450000000	0,000454	<=	0,001993	0,02500	3,472875000
0,000423	<=	0,006944	N=600	0,00079	3,600000000	0,000423	<=	0,003086	0,00810	4,140000000	0,000423	<=	0,001736	0,02500	4,167450000
0,000397	<=	0,006104	N=640	0,00079	3,993720000	0,000397	<=	0,002713	0,00809	4,592778000	0,000397	<=	0,001526	0,02490	4,623230115
0,000373	<=	0,005407	N=680	0,00078	4,556280000	0,000373	<=	0,002403	0,00809	5,239722000	0,000373	<=	0,001352	0,02490	5,274463635
0,000353	<=	0,004823	N=720	0,00078	5,250000000	0,000353	<=	0,002143	0,00808	6,037500000	0,000353	<=	0,001206	0,02490	6,077531250
0,000334	<=	0,004328	N=760	0,00077	6,018720000	0,000334	<=	0,001924	0,00808	6,921528000	0,000334	<=	0,001082	0,02490	6,967420740
0,000317	<=	0,003906	N=800	0,00077	6,881280000	0,000317	<=	0,001736	0,00808	7,913472000	0,000317	<=	0,000977	0,02480	7,965941760
			Black&Scholes	0,00070					0,00800					0,02480	

Tabela 6.2: Uso das taxas de volatilidade 2%, 3% e 4%.

Os métodos Crank-Nicolson e Courtadon apresentam resultados semelhantes em virtude de apresentarem a mesma abordagem, ou seja, explícita e implícita; entretanto, Courtadon necessita de um tempo maior pois, ao final do programa, o valor da função deve ser dividido por e^{rt} .

Os métodos Euler Implícito e Brennan&Schwartz apresentaram o menor tempo de processamento, sendo que o segundo apresentou o menor tempo de processamento e a menor raiz do erro quadrático médio. Mesmo aumentando o valor de N, os valores obtidos com estes métodos apresentam uma solução com a raiz do erro quadrático médio maior que a obtida com o método de Crank-Nicolson.

Analisando o gráfico Crank-Nicolson X Binomial (tempo), verifica-se maior adequação

no uso do primeiro.

O uso do método Crank-Nicolson é recomendado, pois apresentou a solução mais próxima da solução exata. Porém requer maior número de intervalos de tempo.

Como sugestão de trabalhos futuros, para uma melhor avaliação do grau de aderência do modelo desenvolvido, propomos utilizar os métodos para precificar: opções sem fórmula fechada, opções exóticas americanas como as opções com barreiras, bem como opções sobre opções. Outro aspecto a ser observado é o estudo de novos modelos que não partam da premissa de que a taxa de juros e volatilidades são constantes e que incorporem novos fatores de risco, como saltos (variações bruscas no preço das ações).

Apêndice 1

Listagem dos programas

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Explícito-Completar as linhas 1 e $M+1$

function explicit-fdm-C-Ame(S,Smax,K,r,vol,T,N)

% Inicialização dos parâmetros

%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto

%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros

%vol = volatilidade; T = Vencimento

% Inicialização da Grade

M=N;

% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)

% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)

Dt = T/N; %Dt

DS = Smax/M; %DS

f=sparse(zeros(N+1,M+1));

A=sparse(zeros(N+1,M+1));

% Condições de Contorno

% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)

for i = 1 : M+1

f(i,N+1) = max((i-1)*DS-K,0);

end;

% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)

```

for j = 1 : N+1

f(1,j) = K;

end;

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for j = 1 : M-1

 $a(j) = 1/(1 + r * Dt) * (-0.5 * r * j * Dt + 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt);$ 

 $b(j) = 1/(1 + r * Dt) * (1 - vol^2 * j^2 * Dt);$ 

 $c(j) = 1/(1 + r * Dt) * (0.5 * r * j * Dt + 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt);$ 

end;

% Resolução da equação  $a_j * C_{i,j-1} + b_j * C_{i,j} + c_j * C_{i,j+1} = C_{i+1,j}$ 

% Construção da Matriz com os valores de aj, bj e cj calculados

% anteriormente

for j = 2 : M

A(j,j-1) = a(j-1);

A(j,j) = b(j-1);

A(j,j+1) = c(j-1);

end;

% Inclusão dos valores de 1 na primeira e última posição da Matriz para

% torná-la quadrada e passível de inversão. Este procedimento não altera o

% resultado, tendo em vista os valores superior e inferior de f serem

% conhecidos (contorno) e a matriz inversa de A (invA), possuir a primeira linha e

% a última linha igual a matriz A

```

```
A(1,1) = 1; %  
A(N+1,M+1) = 1; %  
% Inversão da Matriz  
invA = inv(A);  
% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da  
% matriz invA pela matriz f no instante posterior)  
for j = N:-1:1  
f(:,j) = A*f(:,j+1); % Cálculo dos Valores  
% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima  
for i = 1 : M+1  
if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)  
f(i,j) = ((i-1)*DS-K);  
end;  
end;  
end;  
%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante  
%inicial (j=1)  
disp(f((S/DS)+1,1))
```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Explícito-Eliminar as colunas 1 e $M+1$ da matriz A

```
function explicit-fdm-C-Inv(S,Smax,K,r,vol,T,N)
```

```
% Inicialização dos parâmetros
```

```
%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto
```

```
%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros
```

```
%vol = volatilidade; T = Vencimento
```

```
% Inicialização da Grade
```

```
M=N;
```

```
% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)
```

```
% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)
```

```
Dt = T/N; %Dt
```

```
DS = Smax/M; %DS
```

```
f=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
A=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
% Condições de Contorno
```

```
% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)
```

```
for i = 1 : M+1
```

```
f(i,N+1) = max((i-1)*DS-K,0);
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```
f(1,j) = K;
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for j = 1 : M-1

a(j) = 1/(1 + r * Dt) * (-0.5 * r * j * Dt + 0.5 * vol2 * j2 * Dt);

b(j) = 1/(1 + r * Dt) * (1 - vol2 * j2 * Dt);

c(j) = 1/(1 + r * Dt) * (0.5 * r * j * Dt + 0.5 * vol2 * j2 * Dt);

end;

% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 da

% matriz A e, conseqüente, subtração do termo a(1)*K da segunda linha da

% matriz f em todos os instantes.

A(1,1)=b(1);

A(1,2)=c(1);

for j = 2 : M-2

A(j,j-1) = a(j);

A(j,j) = b(j);

A(j,j+1) = c(j);

end;

A(M-1,M-1) = b(M-1);

A(M-1,M-2) = a(M-1);

for j = N:-1:1

% subtração do termo a(1)*K da segunda linha da matriz f em todos os instantes.

f(2,j+1)=f(2,j+1) - a(1)*K;

f(2:M,j) = A*f(2:M,j+1); % Cálculo dos Valores

% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima

for i = 1 : M+1

```

```
if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)
```

```
f(i,j) = ((i-1)*DS-K);
```

```
end;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante
```

```
%inicial (j=1)
```

```
disp(f((S/DS)+1,1))
```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Implícito - Completar as linhas 1 e M+1

```
function implicit-fdm-C-Ame(S,Smax,K,r,vol,T,N)
```

```
% Inicialização dos parâmetros
```

```
%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto
```

```
%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros
```

```
%vol = volatilidade; T = Vencimento
```

```
% Inicialização da Grade
```

```
M=N;
```

```
% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)
```

```
% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)
```

```
Dt = T/N; %Dt
```

```
DS = Smax/M; %DS
```

```
f=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
A=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
% Condições de Contorno
```

```
% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)
```

```
for i = 1 : M+1
```

```
    f(i, N + 1) = max((i - 1) * DS - K, 0);
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```
    f(1,j) = K;
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for j = 1 : M-1

a(j) = 0.5 * r * j * Dt - 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt;

b(j) = 1 + vol^2 * j^2 * Dt + r * Dt;

c(j) = -0.5 * r * j * Dt - 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt;

end;

% Resolução da equação aj*Ci,j-1+bj*Ci,j+cj*Ci,j+1=Ci+1,j

% Construção da Matriz com os valores de aj, bj e cj calculados

% anteriormente

for j = 2 : M

A(j,j-1) = a(j-1);

A(j,j) = b(j-1);

A(j,j+1) = c(j-1);

end;

% Inclusão dos valores de 1 na primeira e última posição da Matriz para

% torná-la quadrada e passível de inversão. Este procedimento não altera o

% resultado, tendo em vista os valores superior e inferior de f serem

% conhecidos (contorno) e a matriz inversa de A (invA), possuir a primeira linha e

% a última linha igual a matriz A

A(1,1) = 1; %

A(N+1,M+1) = 1; %

% Inversão da Matriz

invA = inv(A);

% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da

```

```
% matriz invA pela matriz f no instante posterior)

for j = N:-1:1

f(:,j) = invA*f(:,j+1); % Cálculo dos Valores

% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima

for i = 1 : M+1

if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)

f(i,j) = ((i-1)*DS-K);

end;

end;

end;

%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante

%inicial (j=1)

disp(f((S/DS)+1,1))
```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Implícito - Eliminar as colunas 1 e $M+1$ da matriz A

```
function implicit-fdm-C-Inv(S,Smax,K,r,vol,T,N)
```

```
% Inicialização dos parâmetros
```

```
%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto
```

```
%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros
```

```
%vol = volatilidade; T = Vencimento
```

```
% Inicialização da Grade
```

```
M=N;
```

```
% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)
```

```
% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)
```

```
Dt = T/N; %Dt
```

```
DS = Smax/M; %DS
```

```
f=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
A=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
% Condições de Contorno
```

```
% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)
```

```
for i = 1 : M+1
```

```
f(i,N+1) = max((i-1)*DS-K,0);
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```
f(1,j) = K;
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for j = 1 : M-1

a(j) = 0.5 * r * j * Dt - 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt;

b(j) = 1 + vol^2 * j^2 * Dt + r * Dt;

c(j) = -0.5 * r * j * Dt - 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt;

end;

% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 da

% matriz A e, conseqüente, subtração do termo a(1)*K da segunda linha da

% matriz f em todos os instantes.

A(1,1)=b(1);

A(1,2)=c(1);

for j = 2 : M-2

A(j,j-1) = a(j);

A(j,j) = b(j);

A(j,j+1) = c(j);

end;

A(M-1,M-1) = b(M-1);

A(M-1,M-2) = a(M-1);

% Inversão da Matriz

invA = inv(A);

% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da

% matriz invA pela matriz f no instante posterior)

for j = N:-1:1

% subtração do termo a(1)*K da segunda linha da matriz f em todos os instantes.

```

```
f(2,j+1) = f(2,j+1) - a(1) * K;  
f(2:M,j) = invA*f(2:M,j+1); % Cálculo dos Valores  
% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima  
for i = 1 : M+1  
    if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)  
        f(i,j) = ((i-1)*DS-K);  
    end;  
end;  
end;  
end;  
%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante  
%inicial (j=1)  
disp(f((S/DS)+1,1))
```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Implícito - Decomposição LU na Matriz Tridiagonal

function implicit-fdm-C-Tri-LU(S,Smax,K,r,vol,T,N)

% Inicialização dos parâmetros

%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto

%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros

%vol = volatilidade; T = Vencimento

% Inicialização da Grade

M=N;

% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)

% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)

Dt = T/N; %Dt

DS = Smax/M; %DS

f=sparse(zeros(N+1,M+1));

A=sparse(zeros(N-1,M-1));

% Condições de Contorno

% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)

for i = 1 : M+1

$f(i, N + 1) = \max((i - 1) * DS - K, 0);$

end;

% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)

for j = 1 : N+1

f(1,j) = K;

end;

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

```

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for j = 1 : M-1

a(j) = 0.5 * r * j * Dt - 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt;

b(j) = 1 + vol^2 * j^2 * Dt + r * Dt;

c(j) = -0.5 * r * j * Dt - 0.5 * vol^2 * j^2 * Dt;

end;

% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 da

% matriz A e, conseqüente, subtração do termo a(1)*K da segunda linha da

% matriz f em todos os instantes.

A(1,1)=b(1);

A(1,2)=c(1);

for j = 2 : M-2

A(j,j-1) = a(j);

A(j,j) = b(j);

A(j,j+1) = c(j);

end;

A(M-1,M-1) = b(M-1);

A(M-1,M-2) = a(M-1);

% Obtenção das Matrizes L e U

[L,U]=lu(A);

for j = N:-1:1

% subtração do termo a(1)*K da segunda linha da matriz f em todos os instantes.

f(2,j+1) = f(2,j+1) - a(1) * K;

% Passo 1 na obtenção do vetor Q

```

```

Q(1)=f(2,j+1);

for i = 2 : M-1

Q(i) = f(i + 1, j + 1) - L(i, i - 1) * Q(i - 1);

end;

% Passo 1 na obtenção do vetor f no instante atual (i)

f(M,j)=Q(M-1)/U(M-1,M-1);

for i=(M-1):-1:2

f(i,j) = (Q(i - 1) - U(i - 1, i) * f(i + 1, j))/U(i - 1, i - 1);

end;

for i = 1:M+1

if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)

f(i,j) = ((i-1)*DS-K);

end;

end;

end;

%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante

%inicial (j=1)

disp(f((S/DS)+1,1))

```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Crank-Nicolson-Completar as linhas 1 e M+1

```
function Crank-fdm-C-Ame(S,Smax,K,r,vol,T,N)
```

```
% Inicialização dos parâmetros
```

```
%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto
```

```
%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros
```

```
%vol = volatilidade; T = Vencimento
```

```
% Inicialização da Grade
```

```
M=N;
```

```
% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)
```

```
% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)
```

```
Dt = T/N; %Dt
```

```
DS = Smax/M; %DS
```

```
f=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
A=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
B=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
d=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
% Condições de Contorno
```

```
% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)
```

```
for i = 1 : M+1
```

```
     $f(i, N + 1) = \max((i - 1) * DS - K, 0);$ 
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```
    f(1,j) = K;
```

```
end;
```

```

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for i = 1:M

a(i) = -0.25 * r * (i) * Dt + 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

b(i) = 1 - 0.5 * vol2 * (i)2 * Dt;

c(i) = +0.25 * r * (i) * Dt + 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

e(i) = 1 + 0.5 * vol2 * (i)2 * Dt + r * Dt;

end;

% Resolução das equações:

% aj*fi-1,j+1+bj*fi,j+1+cj*fi+1,j+1=dj ou dj=B*fj+1

% -aj*fi-1,j+ej*fi,j-cj*fi+1,j=dj ou fj=invA*d

% Construção da Matriz com os valores de aj, bj e cj e -aj, ej e -cj calculados

% anteriormente

for j = 2:M

B(j,j - 1) = a(j-1);

B(j,j ) = b(j-1);

B(j,j + 1) = c(j-1);

end;

B(1,1) = 1;

B(M+1,M+1) = 1;

for j = 2:M

A(j,j - 1) = -a(j-1);

A(j,j ) = e(j-1);

```

```

A(j,j + 1) = -c(j-1);
end;

% Inclusão dos valores de 1 na primeira e última posição da Matriz para
% torná-la quadrada e passível de inversão. Este procedimento não altera o
% resultado, tendo em vista os valores superior e inferior de f serem
% conhecidos (contorno) e a matriz inversa de A (invA), possuir a primeira linha e
% a última linha igual a matriz A
A(1,1) = 1;
A(M+1,M+1) = 1;

% Inversão da Matriz
invA = inv(A);

for j = N:-1:1

% Solução explícita - multiplicação do valor de f(:,j+1) pela matriz B
d = B * f(:, j + 1);

% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da
% matriz invA pelo vetor d calculado anteriormente-Implicita
f(:,j) = invA*d;

% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima
for i = 1 : M+1
if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)
f(i,j) = ((i-1)*DS-K);
end;
end;
end;

%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante
%inicial (j=1)

```

$\text{disp}(f((S/DS)+1,1))$

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Crank-Nicolson - Eliminar as colunas 1 e M+1 das matrizes A e B

```
function Crank-fdm-C-Inv(S,Smax,K,r,vol,T,N)
```

```
% Inicialização dos parâmetros
```

```
%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto
```

```
%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros
```

```
%vol = volatilidade; T = Vencimento
```

```
% Inicialização da Grade
```

```
M=N;
```

```
% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)
```

```
% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)
```

```
Dt = T/N; %Dt
```

```
DS = Smax/M; %DS
```

```
f=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
A=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
B=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
d=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
% Condições de Contorno
```

```
% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)
```

```
for i = 1 : M+1
```

```
     $f(i, N + 1) = \max((i - 1) * DS - K, 0);$ 
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)
```

```
for j = 1 : N+1
```

```
    f(1,j) = K;
```

```
end;
```

```

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for i = 1:M

a(i) = -0.25 * r * (i) * Dt + 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

b(i) = 1 - 0.5 * vol2 * (i)2 * Dt;

c(i) = +0.25 * r * (i) * Dt + 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

e(i) = 1 + 0.5 * vol2 * (i)2 * Dt + r * Dt;

end;

% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 das

% matrizes A e B e, consequente, subtração do termo a(1)*K da segunda linha da

% matriz f e -a(1)*K da segunda linha do vetor em todos os instantes.

B(1,1)=b(1);

B(1,2)=c(1);

for j = 2 : M-2

B(j,j-1) = a(j);

B(j,j) = b(j);

B(j,j+1) = c(j);

end;

B(M-1,M-1) = b(M-1);

B(M-1,M-2) = a(M-1);

A(1,1)=e(1);

A(1,2)=-c(1);

for j = 2 : M-2

```

```

A(j,j-1) = -a(j);
A(j,j) = e(j);
A(j,j+1) = -c(j);
end;

A(M-1,M-1) = e(M-1);
A(M-1,M-2) = -a(M-1);

% Inversão da Matriz
invA = inv(A);

for j = N:-1:1

% Solução explícita - multiplicação do valor de f(:,j+1) pela matriz B

$$f(2, j + 1) = f(2, j + 1) - a(1) * K;$$


$$d = B * f(2 : M, j + 1);$$


% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da
% matriz invA pelo vetor d calculado anteriormente-Implicita

$$d(1) = d(1) + a(1) * K;$$


$$f(2:M,j) = invA*d;$$


% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima

for i = 1 : M+1

if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)

f(i,j) = ((i-1)*DS-K);

end;

end;

end;

%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante
%inicial (j=1)

disp(f((S/DS)+1,1))

```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Crank-Nicolson - Decomposição LU na Matriz Tridiagonal

function Crank-fdm-C-Tri-LU(S,Smax,K,r,vol,T,N)

% Inicialização dos parâmetros

%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto

%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros

%vol = volatilidade; T = Vencimento

% Inicialização da Grade

$M = N;$

% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)

% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)

$Dt = T/N;$ %Dt

$DS = Smax/M;$ %DS

f=sparse(zeros(N+1,M+1));

A=sparse(zeros(N-1,M-1));

B=sparse(zeros(N-1,M-1));

d=sparse(zeros(N-1,M-1));

% Condições de Contorno

% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)

for i = 1 : M+1

$f(i, N + 1) = \max((i - 1) * DS - K, 0);$

end;

% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)

for j = 1 : N+1

$f(1, j) = K;$

end;

```

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for i = 1:M

a(i) = -0.25 * r * (i) * Dt + 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

b(i) = 1 - 0.5 * vol2 * (i)2 * Dt;

c(i) = +0.25 * r * (i) * Dt + 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

e(i) = 1 + 0.5 * vol2 * (i)2 * Dt + r * Dt;

end;

% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 das

% matrizes A e B e, consequente, subtração do termo a(1)*K da segunda linha da

% matriz f e -a(1)*K da primeira linha do vetor d em todos os instantes.

B(1,1)=b(1);

B(1,2)=c(1);

for j = 2 : M-2

B(j,j-1) = a(j);

B(j,j) = b(j);

B(j,j+1) = c(j);

end;

B(M-1,M-1) = b(M-1);

B(M-1,M-2) = a(M-1);

A(1,1)=e(1);

A(1,2)=-c(1);

for j = 2 : M-2

```

```

A(j,j-1) = -a(j);
A(j,j) = e(j);
A(j,j+1) = -c(j);
end;

A(M-1,M-1) = e(M-1);
A(M-1,M-2) = -a(M-1);

% Obtenção das Matrizes L e U
[L,U]=lu(A);
for j = N:-1:1

% subtração do termo a(1)*K da segunda linha da matriz f em todos os instantes.

$$f(2, j + 1) = f(2, j + 1) - a(1) * K;$$


% Solução explícita - multiplicação do valor de f(:,j+1) pela matriz B

$$d = B * f(2 : M, j + 1);$$


% Passo 1 na obtenção do vetor Q

$$d(1) = d(1) + a(1) * K;$$


$$Q(1) = d(1);$$

for i = 2 : M-1

$$Q(i) = d(i) - L(i, i - 1) * Q(i - 1);$$

end;

% Passo 1 na obtenção do vetor f no instante atual (i)

$$f(M, j) = Q(M - 1) / U(M - 1, M - 1);$$

for i=(M-1):-1:2

$$f(i, j) = (Q(i - 1) - U(i - 1, i) * f(i + 1, j)) / U(i - 1, i - 1);$$

end;

for i = 1:M+1
if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)

```

```
 $f(i, j) = ((i - 1) * DS - K);$ 
```

```
end;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante
```

```
%inicial (j=1)
```

```
 $disp(f((S/DS) + 1, 1))$ 
```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Brennan-Schwartz - Completar as linhas 1 e M+1

function BrSch-fdm-C-Ame(S,Smax,K,r,vol,T,N)

% Inicialização dos parâmetros

%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto

%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros

%vol = volatilidade; T = Vencimento

% Inicialização da Grade

% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)

% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)

$M = N;$

$Dt = T/N;$ %Dt

$DS = (vol^2 / (r - 1/2 * vol^2)) / M;$ %DS - Discretização no método Brennan&Schwartz

$Zmax = round(log(Smax));$

$Zmin = Zmax - DS * M;$

$f = sparse(zeros(N + 1, M + 1));$

$A = sparse(zeros(N, M));$

% Condições de Contorno

% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita);

for i = 1:M+1

$sBS(i) = exp(Zmin + (i - 1) * DS);$

$f(i, N + 1) = max(sBS(i) - K, 0);$ % Exercício

end;

% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)

for j = 1 : N+1

$f(1, j) = K;$

```

end;

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M + 1, j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de a, b e c - parâmetros do modelo

% No modelo de Brennan&Schwartz eles são independentes de j

a = (-0.5 * (vol/DS)2 + 0.5 * (r - 0.5 * vol2)/DS) * Dt;

b = 1 + (vol/DS)2 * Dt + r * Dt;

c = (-0.5 * (vol/DS)2 - 0.5 * (r - 0.5 * vol2)/DS) * Dt;

% Resolução da equação a*Ci,j-1+b*Ci,j+c*Ci,j+1=Ci+1,j

% Construção da Matriz com os valores de aj, bj e cj calculados

% anteriormente

for j = 2 : M

A(j, j - 1) = a;

A(j, j) = b;

A(j, j + 1) = c;

end;

% Inclusão dos valores de 1 na primeira e última posição da Matriz para

% torná-la quadrada e passível de inversão. Este procedimento não altera o

% resultado, tendo em vista os valores superior e inferior de f serem

% conhecidos (contorno) e a matriz inversa de A (invA), possuir a primeira linha e

% a última linha igual a matriz A

A(1, 1) = 1;

A(M + 1, M + 1) = 1;

% Inversão da Matriz

```

```

invA = inv(A);

% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da
% matriz invA pela matriz f no instante posterior
for j = N:-1:1
    f(:,j) = invA * f(:,j + 1);

% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima-Opção Americana
for i = 1 : M+1
    if f(i,j) < (sBS(i) - K)
        f(i,j) = (sBS(i) - K);
    end;
end;
end;

% Interpolação do preço da opção de compra do S
I = find(sBS > S);

% O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante
% inicial (j=1)
f0 = interp1([sBS(I(1) - 1)sBS(I(1))], [f(I(1) - 1, 1)f(I(1), 1)], S, 'linear');
disp(f0)

```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Brennan-Schwartz - Eliminar as colunas 1 e M+1 da matriz A

function BrSch-fdm-C-Inv(S,Smax,K,r,vol,T,N)

% Inicialização dos parâmetros

%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto

%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros

%vol = volatilidade; T = Vencimento

% Inicialização da Grade

% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)

% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)

$M = N;$

$Dt = T/N;$ %Dt

$DS = (vol^2 / (r - 1/2 * vol^2)) / M;$ %DS - Discretização no método Brennan&Schwartz

$Zmax = round(log(Smax));$

$Zmin = Zmax - DS * M;$

f=sparse(zeros(N+1,M+1));

A=sparse(zeros(N-1,M-1));

% Condições de Contorno

% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita);

for i = 1:M+1

$sBS(i) = exp(Zmin + (i - 1) * DS);$

$f(i, N + 1) = max(sBS(i) - K, 0);$ % Exercício

end;

% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)

for j = 1 : N+1

f(1,j) = K;

```

end;

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de a, b e c - parâmtros do modelo

% No modelo de Brennan&Schwartz eles são independentes de j


$$a = (-0.5 * (vol/DS)^2 + 0.5 * (r - 0.5 * vol^2)/DS) * Dt;$$


$$b = 1 + (vol/DS)^2 * Dt + r * Dt;$$


$$c = (-0.5 * (vol/DS)^2 - 0.5 * (r - 0.5 * vol^2)/DS) * Dt;$$


% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 da
% matriz A e, consequente, subtração do termo  $a(1)*K$  da segunda linha da
% matriz f em todos os instantes.

A(1,1)=b;

A(1,2)=c;

for j = 2 : M-2

A(j,j-1) = a;

A(j,j) = b;

A(j,j+1) = c;

end;

A(M-1,M-1) = b;

A(M-1,M-2) = a;

% Inversão da Matriz


$$invA = inv(A);$$


% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da
% matriz invA pela matriz f no instante posterior)

```

```

for j = N:-1:1

% subtração do termo a(1)*K da segunda linha da matriz f em todos os instantes.

 $f(2, j + 1) = f(2, j + 1) - a * K;$ 

 $f(2 : M, j) = invA * f(2 : M, j + 1);$ 

% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima-Opção Americana

for i = 1 : M+1

if  $f(i, j) < (sBS(i) - K)$ 

 $f(i, j) = (sBS(i) - K);$ 

end;

end;

end;

% Interpolação do preço da opção de compra do S

 $I = find(sBS > S);$ 

%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante

%inicial (j=1)

 $f0 = interp1([sBS(I(1) - 1) sBS(I(1))], [f(I(1) - 1, 1) f(I(1), 1)], S, 'linear');$ 

disp(f0)

```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Brennan-Schwartz - Decomposição LU na Matriz Tridiagonal

function BrSch-fdm-C-Tri-LU(S,Smax,K,r,vol,T,N)

% Inicialização dos parâmetros

%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto

%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros

%vol = volatilidade; T = Vencimento

% Inicialização da Grade

% N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)

% M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)

$M = N;$

$Dt = T/N;$ %Dt

$DS = (vol^2 / (r - 1/2 * vol^2)) / M;$ %DS - Discretização no método Brennan&Schwartz

$Zmax = round(log(Smax));$

$Zmin = Zmax - DS * M;$

f=sparse(zeros(N+1,M+1));

A=sparse(zeros(N-1,M-1));

% Condições de Contorno

% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita);

for i = 1:M+1

$sBS(i) = exp(Zmin + (i - 1) * DS);$

$f(i, N + 1) = max(sBS(i) - K, 0);$ % Exercício

end;

% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)

for j = 1 : N+1

f(1,j) = K;

```

end;

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de a, b e c - parâmtros do modelo

% No modelo de Brennan&Schwartz eles são independentes de j


$$a = (-0.5 * (vol/DS)^2 + 0.5 * (r - 0.5 * vol^2)/DS) * Dt;$$


$$b = 1 + (vol/DS)^2 * Dt + r * Dt;$$


$$c = (-0.5 * (vol/DS)^2 - 0.5 * (r - 0.5 * vol^2)/DS) * Dt;$$


% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 da
% matriz A e, consequente, subtração do termo  $a(1) * K$  da segunda linha da
% matriz f em todos os instantes.

A(1,1)=b;

A(1,2)=c;

for j = 2 : M-2

A(j,j-1) = a;

A(j,j) = b;

A(j,j+1) = c;

end;

A(M-1,M-1) = b;

A(M-1,M-2) = a;

% Obtenção das Matrizes L e U

[L,U]=lu(A);

for j = N:-1:1

% subtração do termo  $a(1)*K$  da segunda linha da matriz f em todos os instantes.

```

```

 $f(2, j + 1) = f(2, j + 1) - a(1) * K;$ 

% Passo 1 na obtenção do vetor Q

Q(1)=f(2,j+1);

for i = 2 : M-1

 $Q(i) = f(i + 1, j + 1) - L(i, i - 1) * Q(i - 1);$ 

end;

% Passo 1 na obtenção do vetor f no instante atual (i)

 $f(M, j) = Q(M - 1)/U(M - 1, M - 1);$ 

for i=(M-1):-1:2

 $f(i, j) = (Q(i - 1) - U(i - 1, i) * f(i + 1, j))/U(i - 1, i - 1);$ 

end;

for i = 1:M+1

if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)

 $f(i, j) = ((i - 1) * DS - K);$ 

end;

end;

end;

% Interpolação do preço da opção de compra do S

I = find(sBS > S);

%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante

%inicial (j=1)

 $f0 = interp1([sBS(I(1) - 1)sBS(I(1))], [f(I(1) - 1, 1)f(I(1), 1)], S, 'linear');$ 

disp(f0)

```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Courtadon - Inversão da Matriz

```
function Cour-fdm-C-Ame(S,Smax,K,r,vol,T,N)
```

```
% Transformação da PDE de Black&Scholes considerando o instante final
```

```
% Transformação de  $c = exp(+r * T) * f$  onde c é o valor da opção
```

```
% Inicialização dos parâmetros
```

```
%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto
```

```
%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros
```

```
%vol = volatilidade; T = Vencimento
```

```
% Inicialização da Grade
```

```
%N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)
```

```
%M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)
```

```
M = N;
```

```
Dt = T/N; %Dt
```

```
DS = Smax/M; %DS
```

```
f=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
A=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
B=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
d=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
% Condições de Contorno
```

```
% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)
```

```
for i = 1:M+1
```

```
stockprice(i) = (i - 1) * DS;
```

```
f(i, N + 1) = max(stockprice(i) - K, 0); % Exercício
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)
```

```

for j = 2:N+1

     $f(1, j) = K$ ;

end;

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 2 : N+1

     $f(M + 1, j) = 0$ ;

end;

% Resolução da equação  $a_j * C_{i, j-1} + b_j * C_{i, j} + c_j * C_{i, j+1} = C_{i+1, j}$ 

% Construção da Matriz com os valores de  $a_j$ ,  $b_j$  e  $c_j$  e  $-a_j$ ,  $e_j$  e  $-c_j$ 

% calculados anteriormente

for i = 1:M

     $a(i) = 0.25 * r * (i) * Dt - 0.25 * vol^2 * (i)^2 * Dt$ ;

     $b(i) = +1 + 0.5 * vol^2 * (i)^2 * Dt$ ;

     $c(i) = -0.25 * r * (i) * Dt - 0.25 * vol^2 * (i)^2 * Dt$ ;

     $e(i) = +1 - 0.5 * vol^2 * Dt * i^2$ ;

end;

% Solução do sistema (O valor desejado é obtido pela multiplicação da

% matriz invA pela matriz f no instante posterior)

for j = 2:M

     $B(j, j-1) = -a(j-1)$ ;

     $B(j, j) = e(j-1)$ ;

     $B(j, j+1) = -c(j-1)$ ;

end;

for j = 2:M

     $A(j, j-1) = a(j-1)$ ;

     $A(j, j) = b(j-1)$ ;

```

```

    A(j, j + 1) = c(j - 1);
end;

% Inclusão dos valores de 1 na primeira e última posição das Matrizes para
% torná-las quadradas e passíveis de inversão. Este procedimento não altera
% o resultado, tendo em vista os valores superior e inferior de f serem
% conhecidos (contorno) e a matriz inversa de A (invA), possuir a primeira linha e
% a última linha igual a matriz A
B(1, 1) = 1;
B(M + 1, M + 1) = 1;
A(1, 1) = 1;
A(M + 1, M + 1) = 1;
% Inversão da Matriz
invA = inv(A);
% Solução do sistema (Calcula-se o vetor d pelo método explícito e o valor
% desejado é obtido pela multiplicação da matriz invA pelo vetor d calcula-
% do pelo método explícito anteriormente
for j = N: -1: 1
    d = B * f(:, j + 1);
    f(:, j) = invA * d; % Cálculo dos Valores
    % Teste a cada instante de tempo com a condição ótima
    for i = 1 : M+1
        if f(i, j) < f(i, j+1)
            f(i, j) = f(i, j + 1);
        end;
    end;
end;
end;

```

```
 $c = f;$   
% Nos valores acima está embutido o termos  $\exp(+r * T)$ , deste modo, para se  
% encontrar o valor da opção de compra, devemos dividir o valor de f  
% encontrado pelo mesmo termo  $\exp(r * T)$   
 $c(:, 1) = \exp(-r * (T)) * f(:, 1);$   
%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor c no instante  
%inicial ( $j = 1$ )  
 $disp(c((S/DS) + 1, 1))$ 
```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Courtaodon-1982-Eliminação das colunas 1 e M+1 das matrizes A e B

```
function Cour-fdm-C-Inv(S,Smax,K,r,vol,T,N)
```

```
% Transformação da PDE de Black&Scholes considerando o instante final
```

```
% Transformação de  $c = f * \exp(+r * T)$  onde c é o valor da opção
```

```
% Inicialização dos parâmetros
```

```
%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto
```

```
%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros
```

```
%vol = volatilidade; T = Vencimento
```

```
% Inicialização da Grade
```

```
%N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)
```

```
%M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)
```

```
M = N;
```

```
Dt = T/N; %Dt
```

```
DS = Smax/M; %DS
```

```
f=sparse(zeros(N+1,M+1));
```

```
A=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
B=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
d=sparse(zeros(N-1,M-1));
```

```
% Condições de Contorno
```

```
% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)
```

```
for i = 1:M+1
```

```
stockprice(i) = (i - 1) * DS;
```

```
f(i, N + 1) = max(stockprice(i) - K, 0); % Exercício
```

```
end;
```

```
% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)
```

```

for j = 1:N+1

f(1,j) = K;

end;

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Resolução da equação  $a_j * C_{i,j-1} + b_j * C_{i,j} + c_j * C_{i,j+1} = C_{i+1,j}$ 

% Construção da Matriz com os valores de  $a_j$ ,  $b_j$  e  $c_j$  e  $-a_j$ ,  $e_j$  e  $-c_j$ 

% calculados anteriormente

for i = 1:M

 $a(i) = 0.25 * r * (i) * Dt - 0.25 * vol^2 * (i)^2 * Dt;$ 

 $b(i) = +1 + 0.5 * vol^2 * (i)^2 * Dt;$ 

 $c(i) = -0.25 * r * (i) * Dt - 0.25 * vol^2 * (i)^2 * Dt;$ 

 $e(i) = +1 - 0.5 * vol^2 * Dt * i^2;$ 

end;

% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 das

% matrizes A e B e, consequente, subtração do termo  $a(1)*K$  da segunda linha da

% matriz f e  $-a(1) * K$  da primeira linha do vetor d em todos os instantes.

B(1,1)=e(1);

B(1,2)=-c(1);

for j = 2 : M-2

B(j,j-1) = -a(j);

B(j,j) = e(j);

B(j,j+1) = -c(j);

end;

```

```

B(M-1,M-1) = e(M-1);
B(M-1,M-2) = -a(M-1);
A(1,1)=e(1);
A(1,2)=-c(1);
for j = 2 : M-2
A(j,j-1) = a(j);
A(j,j) = b(j);
A(j,j+1) = c(j);
end;
A(M-1,M-1) = e(M-1);
A(M-1,M-2) = -a(M-1);
% Inversão da Matriz
invA = inv(A);
% Solução do sistema (Calcula-se o vetor d pelo método explícito e o valor
% desejado é obtido pela multiplicação da matriz invA pelo vetor d calcula-
% do pelo método explícito anteriormente
for j = N: -1: 1
f(2,j+1) = f(2,j+1) - (-a(1)) * K;
d = B * f(2 : M, j + 1);
d(1) = d(1) - (-a(1)) * K;
f(2 : M, j) = invA * d; % Cálculo dos Valores
% Teste a cada instante de tempo com a condição ótima
for i = 1 : M+1
if f(i,j) < f(i,j+1)
f(i,j) = f(i,j+1);
end;

```

```
end;

end;

c = f;

% Nos valores acima está embutido o termo  $\exp(+r * T)$ , deste modo, para se
% encontrar o valor da opção de compra, devemos dividir o valor de f
% encontrado pelo mesmo termo  $\exp(r * T)$ 

c(:, 1) =  $\exp(-r * (T)) * f(:, 1)$ ;

%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor c no instante
%inicial (j=1)

disp(c((S/DS) + 1, 1))
```

Método de Diferenças Finitas para Opção de Compra

Método Courtadon - 1982 - Decomposição LU na Matriz Tridiagonal

function Cour-fdm-C-Tri-LU(S,Smax,K,r,vol,T,N)

% Inicialização dos parâmetros

%S = Valor do Ativo Objeto; Smax = Valor máximo do Ativo Objeto

%K = Preço de exercício; r = Taxa de Juros

%vol = volatilidade; T = Vencimento

% Inicialização da Grade

%N = 100; % Intervalo do T (discretização do T)

%M = 100; % Intervalo do S (discretização do S)

$M = N;$

$Dt = T/N;$ %Dt

$DS = Smax/M;$ %DS

$f = \text{sparse}(\text{zeros}(N+1,M+1));$

$A = \text{sparse}(\text{zeros}(N-1,M-1));$

$B = \text{sparse}(\text{zeros}(N-1,M-1));$

$d = \text{sparse}(\text{zeros}(N-1,M-1));$

% Condições de Contorno

% Valor do Ativo Objeto no Vencimento (fronteira direita)

for i = 1 : M+1

$f(i, N + 1) = \max((i - 1) * DS - K, 0);$

end;

% Valor do Ativo Objeto = 0 (fronteira superior)

for j = 1 : N+1

$f(1,j) = K;$

end;

```

% Valor do Ativo Objeto é máximo (fronteira inferior)

for j = 1 : N+1

f(M+1,j) = 0;

end;

% Cálculo dos valores de aj, bj e cj - parâmetros do modelo

for i = 1:M

a(i) = 0.25 * r * (i) * Dt - 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

b(i) = +1 + 0.5 * vol2 * (i)2 * Dt;

c(i) = -0.25 * r * (i) * Dt - 0.25 * vol2 * (i)2 * Dt;

e(i) = +1 - 0.5 * vol2 * Dt * i2;

end;

% Obtenção da matriz tridiagonal, pela eliminação das colunas 1 e M+1 das

% matrizes A e B e, consequente, subtração do termo a(1)*K da segunda linha da

% matriz f e -a(1)*K da primeira linha do vetor d em todos os instantes.

B(1,1)=e(1);

B(1,2)=-c(1);

for j = 2 : M-2

B(j,j-1) = -a(j);

B(j,j) = e(j);

B(j,j+1) = -c(j);

end;

B(M-1,M-1) = e(M-1);

B(M-1,M-2) = -a(M-1);

A(1,1)=b(1);

A(1,2)=c(1);

for j = 2 : M-2

```

```

A(j,j-1) = a(j);
A(j,j) = b(j);
A(j,j+1) = c(j);
end;

A(M-1,M-1) = b(M-1);
A(M-1,M-2) = a(M-1);

% Obtenção das Matrizes L e U
[L,U] = lu(A);
for j = N:-1:1

% subtração do termo a(1)*K da segunda linha da matriz f em todos os instantes.
f(2,j+1) = f(2,j+1) - a(1) * K;

% Solução explícita - multiplicação do valor de f(:,j+1) pela matriz B
d = B * f(2 : M, j + 1);

% Passo 1 na obtenção do vetor Q
d(1) = d(1) + a(1) * K;
Q(1) = d(1);

for i = 2 : M-1
Q(i) = d(i) - L(i, i - 1) * Q(i - 1);
end;

% Passo 1 na obtenção do vetor f no instante atual (i)
f(M,j) = Q(M - 1)/U(M - 1, M - 1);

for i=(M-1):-1:2
f(i,j) = (Q(i - 1) - U(i - 1, i) * f(i + 1, j))/U(i - 1, i - 1);
end;

for i = 1:M+1
if f(i,j) < ((i-1)*DS-K)

```

```
 $f(i, j) = ((i - 1) * DS - K);$ 
```

```
end;
```

```
end;
```

```
end;
```

```
%O resultado será o valor obtido no ponto médio do vetor f no instante
```

```
%inicial (j=1)
```

```
 $c = f;$ 
```

```
 $c(:, 1) = \exp(-r * (T)) * f(:, 1);$ 
```

```
 $\text{disp}(c((S/DS) + 1, 1))$ 
```

Referências

- [1] BARBEDO, C. H. D. S. Estimativa de medidas de risco através de modelos de avaliação de ativos não lineares. *Tese de Doutorado*, UFRJ/COPPEAD, 2008.
- [2] BARBEDO, C. H. D. S. *Mercado de Derivativos no Brasil*. [S.l.]: Editora Record, 2005.
- [3] BLACK, F. S. M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, v. 81, n. 81, p. 637–654, 1973.
- [4] BRENNAN M. & SCHWARTZ, E. S. Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 13, n. 13, p. 461–474, 1978.
- [5] BRENNAN M. & SCHWARTZ, E. S. The valuation of american put options. *Journal of Finance*, v. 32, n. 32, p. 449–462, 1977.
- [6] CHRISS, B. S.; BEYOND. *Option Pricing Models*. [S.l.]: Irwin, 1997.
- [7] COSTA, D. U. Análise e avaliação de opções do mercado acionário. *Trabalho de Formatura de Engenharia de Produção*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP, 1994.
- [8] COURTADON, G. A more accurate finite difference approximation for the valuation of options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1982.
- [9] COX J. C., R. S. A. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, p. 145–166, janeiro 1976.
- [10] DAMODARAN, A. *Investment valuation - tools and techniques for determining the value of any asset*. [S.l.]: Jonh Wiley & Sons, 1996.
- [11] HULL, J. C. *Opções, Futuros e Outros Derivativos-6a edição*. [S.l.]: Ed. New Jersey: Prentice Hall-tradução BM & F - Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2006.
- [12] J ROWISON, S. D.; WILMOTT, P. *The Mathematics of Financial Derivatives*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- [13] LAMBERTON D. & LAPEYRE, B. J. P. . Variational inequalities and the pricing of american options. *Acta Applicandae Mathematicae*, n. 21, p. 263–289, 1990.
- [14] LEMGRUBER, E. F. *Avaliação de contrato de opções*. [S.l.]: (BM&F), 1995.
- [15] MALLIARIS A. G. E BROCK, W. A. *Stochastic Methods in Economics and Finance*. [S.l.]: North-Holland Publishing Company, 1982.

- [16] MACBETH J., E. L. M. An empirical examination of the black-scholes call option pricing model. *Journal of Finance*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, USP, n. 34, p. 1173–1186, 1979.
- [17] MERTON, R. C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, v. 1, n. 61, p. 125–144, 1976.
- [18] RODRIGUES, E. L. Teoria de opções: concepção e evolução. *Belo Horizonte*, v. 14º ENANPAD, p. 65–78, setembro 1990.
- [19] ROGERS, L. C. G. . D. T. *Numerical Methods in Finance*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 1997.
- [20] RUBINSTEIN, M. Implied binomial trees. *The Journal of Finance*, v. 44, n. 3, p. 771–818, july 1994.
- [21] SAITO RICHARD; ROCHMAN, R. R. *Avaliação de métodos numéricos para precificação de derivativos: aplicação ao mercado brasileiro*. [S.l.]: EAESP/FGV/NPP, 1999.
- [22] SCHWARTZ, E. S. The valuation of warrants: Implementing a new approach. *Journal of Financial Economics*, n. 4, p. 79–94, 1977.
- [23] TAVELLA D.; RANDALL, R. *Pricing Financial Instruments: the Finite Difference Method*. [S.l.]: Wiley, 2000.
- [24] ZHANG, X. Numerical analysis of american option pricing in a jump-difusion model. *working paper-Societe Generale, Paris-La Defense, France*, 1995.