

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ALEXANDRE JOSÉ MIRANDA ANTUNES

**Método de diferenças finitas para a equação da onda
acústica utilizando passos de tempos ajustados
localmente**

NITERÓI

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ALEXANDRE JOSÉ MIRANDA ANTUNES

**Método de diferenças finitas para a equação da onda
acústica utilizando passos de tempos ajustados
localmente**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Computação Científica (Métodos Computacionais para Equações Diferenciais.)

Orientadora:

Profa. Regina C. P. Leal Toledo, D.Sc.

NITERÓI

2012

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de Computação da UFF

A636 Antunes, Alexandre José Miranda
Método de diferenças finitas para a equação da onda acústica
utilizando passos de tempos ajustados localmente / Alexandre José
Miranda Antunes. – Niterói, RJ : [s.n.], 2012.
128 f.

Dissertação (Mestrado em Computação) - Universidade Federal
Fluminense, 2012.
Orientador: Regina C. P. Leal Toledo.

1. Equação diferencial parcial. 2. Equação de onda. 3. Método de
diferenças finitas. I. Título.

CDD 515.353

Alexandre José Miranda Antunes

Método de diferenças finitas para a equação da onda acústica utilizando passos de tempos ajustados localmente

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Computação Científica (Métodos Computacionais para Equações Diferenciais.)

Aprovada em dezembro de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Regina C. P. Leal Toledo, D.Sc. - Orientadora, UFF

Prof. Otton Teixeira da Silveira Filho, D.Sc. , UFF

Prof. Carlos Antonio de Moura, Ph.D. , UERJ

Niterói

2012

"... A vida vem em ondas como um mar
Num indo e vindo infinito ..."
Nelson Motta/Lulu Santos

Dedico a Deus e meus familiares: nossa conquista!

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por ter concluído mais essa parte de minha formação profissional. Agradeço, também, a Ele por ter colocado pessoas tão marcantes e importantes para que eu tenha logrado êxito. Foram muitos os amigos e amigas dentre os quais destacarei abaixo:

Aos meus pais e meu irmão, Sebastião, que sempre me apoiaram e sofreram comigo as dificuldades e lutas que passei nesse período, mas também alegraram-se em vários momentos como, por exemplo, em meu casamento com a Daniéla, convívio com o nosso filho Tiago e com a nossa filha Maria Luíza que nasceu em meio aos estudos desta dissertação. Ao falar de meu irmão incluo a minha cunhada Rosângela, meu sobrinho Henrique, meu afilhado Ubirajara (Birinha), minha afilhada Adriana a quem considero como minha filha e demais familiares. Todos eles sabem o quanto batalhamos por essa conquista e o quanto é importante tê-los ao meu lado. Com a família ficamos mais fortes para conseguir nossos objetivos.

Ao ingressar na UERJ/FFP conheci um professor que, ao longo do tempo, se tornou um amigo, um irmão. Carlos Paixão foi meu primeiro orientador acadêmico e, se hoje estou aqui, muito devo aos seus conselhos, força e orientações. Da universidade não posso deixar de citar os professores Marco Antonio (em memória), Jorge Araújo, e Luérbio Faria que muito me incentivaram. Claro que não esqueço dos vários amigos que comigo estudaram. São tantos que vou citar apenas alguns representando todos os meus companheiros: Rosiney Ferreira (meu afilhado de casamento), Herivelto Nunes, Fábio Freitas representando os matemáticos e Luciano Lemos, Biologia, por todos os outros cursos.

Ao chegar no Instituto de Computação da UFF, tive muita dificuldade para iniciar a migração de professor de matemática para aluno de mestrado em computação. Com todas as ajudas já citadas e meu esforço consegui superar. Contudo devo ressaltar o apoio que tive de vários alunos e professores. Dentre os alunos, o Henrique Bueno foi o primeiro a me receber e me apresentar a instituição. O Diego Brandão sempre me orientando sobre como o cotidiano acadêmico, o Marcelo Zamith que me deu várias dicas

sobre Linguagem C e foi um ótimo parceiro de estudo em Álgebra Linear e Pucca com quem fiz dupla de estudo em Estrutura de Dados. Mais adiante participei de um grupo de pesquisa num projeto da Petrobras no qual trabalhei com Adelmo, Thales e Jefferson Mello. O grupo foi sensacional comigo e no desenvolvimento do trabalho. O Jefferson Mello foi um gende parceiro nas implementações dos programas e análise dos problemas e o Adelmo teve grande participação nas vezes em que tivemos a oportunidade de trocar ideias "dispersivas". Entre outras ajudas do Thales, destaco o esquema $2D$, elaborado por ele e utilizada por mim (Fig. 3.4). Todos desse grupo, foram especiais. Por último destaco o suporte do Carlos.

Aos meus professores reconheço o muito que tenho a agradecer a todos pela paciência e empenho em transmitir o conhecimento. Mesmo aqueles que não foram meus professores nas disciplinas, pois estiveram sempre à disposição para discutir os temas acadêmicos. Aliado a isso agradeço ao ótimo convívio proporcionado. Agradeço a todas as dicas e cobranças acadêmicas dadas pelo professor Otton Teixeira. Ele sempre buscava me instigar a pesquisar o assunto e não apenas ficar perguntando o que eu queria saber. O professor Maurício Kischinhevsky que esteve comigo em momentos difíceis que passei como um verdadeiro conselheiro e amigo. A minha professora e orientadora, Regina Leal, eu realmente nem tenho palavras para apresentar o meu reconhecimento e agradecimento a tudo o que ela representa para mim. Sabia cobrar na hora certa e animava sempre que possível. Durante meus estudos, foi quem mais esteve próxima das nossas conquistas e dos meus problemas. Devo a ela muito dessa conquista. Acrescento o professor Carlos Moura visto que terei a honra de tê-lo na banca de defesa do mestrado.

Agradeço a oportunidade de estar num grupo de pesquisa junto ao Cenpes/Petrobras que envolvia aplicações da área de sísmica e a Secretaria Estadual de Educação, SEEDUC, que me concedeu uma licença para que eu pudesse me dedicar à conclusão de minha dissertação. Citando Maria José, Zezé, e Haroldo Granja, professores do Colégio Estadual Doutor Adino Xavier, CEDAX, que sempre me incentivaram, a professora Joséli Ramos do Centro de Educação de Jovens e Adultos, CEJA, que lutou comigo na tramitação de minha licença, a Solange Severiano do Centro de Educação Tecnológica e Profissionalizante, CETEP/SG, e a professora Eliana Viana, polo UAB São Gonçalo, agradeço a todos os professores, funcionários, alunos e ex-alunos da SEEDUC, da FAETEC e do CEDERJ.

Aos amigos pessoais agradeço o apoio e a compreensão. Mesmo tendo ficado ausente a vários eventos e programações, pois eles sabem que era para alcançar um objetivo. André Valente, Guilherme Guedes, José Roberto Gonzales, Osvalnir Xavier, Paulo Alexandre,

Marisa Alexandrina, Marcos Alves, entre outros, tiveram uma participação, direta ou indireta, nessa conquista. Em especial, dentre todos esses amigos, vou ressaltar a grande e inestimável ajuda do amigo, professor Guilherme Guedes, pois as figuras contidas neste trabalho foram feitas em parceria com ele utilizando recursos especiais do Latex.

Em resumo, se cheguei até aqui agradeço a Deus, a minha esposa Daniéla Ramos, aos meus filhos Tiago e Maria Luíza, aos meus pais, meus familiares, meus professores e amigos. Todos vocês fazem parte dessa conquista. Finalizando vejo o quanto 2012 foi um ano bom. Defendo o mestrado e o meu querido Fluminense foi campeão Brasileiro. Valeu!

Resumo

A resolução do problema de propagação de ondas acústicas em meios contínuos é de grande interesse nas mais diversas áreas da ciência, como por exemplo, na geofísica, medicina, engenharia, entre outras. Este problema é modelado através de equações diferenciais parciais com condições iniciais e de contorno conhecidas. Em problemas de sismica, por exemplo, utiliza-se com frequência o método de diferenças finitas explícito. Nestes casos o domínio é heterogêneo e devido a questões de estabilidade numérica, é necessário utilizar uma discretização que garanta a estabilidade do método em todo o domínio. Desta maneira, alguns subdomínios utilizam passos de tempo mais refinados do que o necessário. Isso implica acréscimo do custo computacional.

Neste trabalho apresentam-se dois algoritmos que ajustam localmente o passo de tempo, propostos na literatura, de acordo com a característica do subdomínio. Identificamos, nestes esquemas, o aparecimento de um "*ruído*" no sinal da onda em simulações onde o passo de tempo está próximo do limiar de estabilidade do método.

Propõe-se, neste trabalho, um algoritmo, chamado de Região de Transição Triangular (RTT) que elimina esses efeitos indesejáveis e permite a livre divisão do passo de tempo, conforme a necessidade imposta pela característica da subregião. Esta abordagem, aponta para a redução do custo computacional em domínio não homogêneo, e possibilita a utilização do passo de tempo próximo do limite de estabilidade do método.

Palavras-chave: diferenças finitas, passos de tempo ajustáveis, adaptatividade temporal, região de transição triangular, equação de onda acústica.

Abstract

The resolution of the problem of acoustic wave propagation in continuous media is of great interest in various areas of science, such as geophysics, medicine, and engineering among others. This problem is modeled by partial differential equations with initial and boundary conditions. In seismic problems, for example, the explicit finite-difference method is often used. In these cases, the field is heterogeneous and due to issues of numerical stability, it is necessary to use a discretization which guarantees the stability of the method throughout the domain. In this way, some subdomains use time steps more refined than necessary, which implies increased computational cost.

In this paper, two algorithms are presented which adjust locally the time step, proposed in the literature, according to the characteristic of the sub-domain. In these schemes, it has been identified the appearance of a "*noise*" in the wave signal in simulations where the time step is near the threshold of stability of the method.

This work proposes an algorithm called triangular transition region (TTR) that eliminates these unwanted effects and allows for free division of time, as the need imposed by the characteristic of the subregion. This approach points to the reduction of the computational cost in non-homogeneous domain and allows the use of the time step close to the limit of stability of the method.

Keywords: finite-difference, locally adjustable time step sizes, temporal adaptivity, triangular transition region, acoustic wave equation.

Lista de Figuras

2.1	Malha no tempo e no espaço	6
2.2	Esquemas numéricos no tempo. Fonte: Tucci (1998)	7
2.3	Simulação onda 1D - Meio Homogêneo $V = 1,0m/s$ $\Delta t = 0,00541s$	11
2.4	Simulação onda 1D - Meio Heterogêneo $v_1 = 1,0m/s$ e $v_2 = 2,0m/s$ $\Delta t = 0,00271s$	11
2.5	Simulação onda 1D - Meio Heterogêneo $V_1 = 1,0m/s$ e $V_2 = 4,0m/s$ $\Delta t = 0,00135$	12
3.1	Molécula de cálculo 1D (Aproximação 2-4).	15
3.2	Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios. . .	16
3.3	Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).	17
3.4	Esquema Falk/Tessmer para o caso 2-D com 1 nível de adaptatividade para uma aproximação 2-2.	18
3.5	Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios. . .	19
3.6	Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios. . .	20
3.7	Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios. . .	21
3.8	Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios. . .	22
3.9	Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios. . .	22
3.10	Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).	23
3.11	Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	24
3.12	Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + 2\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	25
3.13	Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	25
3.14	Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).	26

3.15	Esquema Tessmer 1D (Aproximação 2-4).	28
3.16	Esquema Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	29
3.17	Esquema Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	30
3.18	Esquema Tessmer 1D em $t + 2\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	31
3.19	Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	32
3.20	Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).	32
3.21	Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).	33
3.22	Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	34
3.23	Esquema Tessmer 1D em $t + 2\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	35
3.24	Esquema Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).	36
3.25	Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).	36
3.26	Esquema Tessmer 1-D para uma aproximação 2-4 com três divisões do passo de tempo.	37
4.1	Campo de velocidades - Domínio bidimensional	39
4.2	Condição inicial (Eq. 4.2)	40
4.3	Convencional (2-2, 2-4 e 2-6) nos respectivos limite de estabilidade dos métodos - problema (a).	43
4.4	Convencional (2-2, 2-4 e 2-6) nos respectivos limite de estabilidade dos métodos - problema (b).	44
4.5	Campo de velocidades - Domínio bidimensional	45
4.6	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1, 50s$ (aproximação 2-2). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	46
4.7	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1, 50s$ (aproximação 2-4). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	47
4.8	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1, 50s$ (aproximação 2-6). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	48
4.9	Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3	49
4.10	Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3	50

4.11	Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .	51
4.12	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1, 50s$ (a) Métodos Adaptativos 2-2, 2-4 e 2-6 em (b) Zoom em $[3.000m ; 6.000m]$.	52
4.13	(a) Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1, 40s$ para uma aproximação 2-2. (b) Zoom: $x \in [3.100m ; 3.600m]$.	54
4.14	(a) Seção da onda em $y = 3000m$ e $t = 1, 60s$ para uma aproximação 2-2. (b) Zoom: $x \in [3.100m ; 3.600m]$.	55
4.15	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 90s$ (aproximação 2-2). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	57
4.16	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 90s$ (aproximação 2-4). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	58
4.17	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 90s$ (aproximação 2-6). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	59
4.18	Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .	60
4.19	Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .	61
4.20	Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .	62
4.21	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 90s$ (a) Comparação com adaptativos 2-2, 2-4 e 2-6 (b) Zoom: $x \in [1.800m ; 6.000m]$.	63
4.22	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 45s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.	65
4.23	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 70s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.	66
4.24	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 85s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.	67
4.25	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1, 00s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.	68
4.26	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 45s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.	70
4.27	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0, 70s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.	71

4.28	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,85s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$	72
4.29	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,00s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$	73
5.1	Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + \Delta t$	77
5.2	Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 3\Delta t/4$	78
5.3	Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 2\Delta t/4$	79
5.4	Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + \Delta t/4$	80
5.5	Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 3\Delta t/4$	81
5.6	Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 3\Delta t/4$	82
5.7	Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo.	83
5.8	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	85
5.9	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-4). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	86
5.10	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-6). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	87
5.11	Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .	89
5.12	Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .	90
5.13	Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .	91
5.14	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6) (a) Método Adaptativos em (b) Zoom em $[3.000m ; 6.000m]$	92
5.15	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2) (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	94

5.16	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-4) (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	95
5.17	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-6) (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.	96
5.18	Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3	97
5.19	Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3	98
5.20	Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3	99
5.21	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6) (a) Método Adaptativos em (b) Zoom em $[3.000m ; 6.000m]$	100
5.22	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,50s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6). Métodos: Adaptativos x Convencionais x RTT no Limite.	104
5.23	Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6). Métodos: Adaptativos x Convencionais x RTT no Limite.	106

Lista de Tabelas

2.1	Tabela com os limites de estabilidade - Laurence et al. (1998).	9
3.1	Tabela com regras gerais para mudança de Δt	14
3.2	Tabela com regras gerais para mudança de Δt	27
4.1	Tabela com a discretização temporal - Problema (a)	42
4.2	Tabela com a discretização temporal - Problema (b)	43
4.3	Tabela - Passo de tempo - Problema (a)	45
4.4	Tabela - Passo de tempo - Problema (b)	56
5.1	Tabela com a discretização temporal - Domínio com $v_1 = 750m/s$ e $v_2 = 1.500m/s$	84
5.2	Tabela com a discretização temporal - Domínio com $v_1 = 750m/s$ e $v_2 = 3000m/s$	93
5.3	Tabela com a quantidade de pontos na região de transição - Duas divisões do passo de tempo.	102
5.4	Tabela com a quantidade de pontos na região de transição - Quatro divisões do passo de tempo.	102
5.5	Tabela com os tempos das simulações - Duas divisões do passo de tempo. .	103
5.6	Tabela com os tempos das simulações - Quatro divisões do passo de tempo.	105

Lista de Abreviaturas e Siglas

- DF : Diferenças Finitas;
MDF : Método de Diferenças Finitas;
RTT : Região de Transição Triangular;

Sumário

1	Introdução	1
2	Equação da onda acústica	4
2.1	Introdução	4
2.1.1	A equação da onda acústica	4
2.2	Método de Diferenças Finitas (MDF)	5
2.2.1	Apresentação do método	5
2.2.2	Consistência, convergência e estabilidade	6
2.2.3	Esquemas: implícito e explícito	6
2.2.4	Aproximações de Diferenças Finitas (DF) para Equação da onda acústica	7
2.2.5	Limites de estabilidade	9
2.3	O problema da onda acústica em meios heterogêneos	10
3	Adaptatividade temporal	13
3.1	Introdução	13
3.2	Adaptatividade temporal proposta em Falk et al. (1998)	14
3.2.1	Esquema com duas divisões do passo de tempo	15
3.2.2	Esquema com quatro divisões do passo de tempo	19
3.3	Adaptatividade temporal proposta em Tessmer (2000)	26
4	Exemplos numéricos	38

4.1	O problema a ser resolvido	38
4.2	Discretizações	40
4.3	Resultados 2D	41
4.3.1	Critério de comparação dos resultados	42
4.3.2	Duas divisões do passo de tempo	44
4.3.3	Quatro divisões do passo de tempo	56
4.4	Conclusões preliminares	74
4.4.1	Armazenamento - Estrutura de Dados	74
5	Algoritmo Adaptativo: Região de Transição Triangular (RTT)	76
5.1	Resultados 2D	83
5.1.1	Duas divisões do passo de tempo	84
5.1.2	Quatro divisões do passo de tempo	93
5.2	Conclusões preliminares	101
5.2.1	Custo computacional	101
6	Conclusões e trabalhos futuros	107
6.1	Referências Bibliográficas	109

Capítulo 1

Introdução

Uma grande variedade de fenômenos da natureza podem ser descritos através de modelos matemáticos. A propagação de ondas acústicas, por exemplo, modelada através de equações diferenciais parciais, é de grande interesse nas mais diversas áreas da ciência, por exemplo, na geofísica (modelagem sísmica), medicina (ultrasonografia), engenharia (identificação de danos estruturais), entre outras. No entanto, quando pretende-se modelar problemas reais, em geral não é possível a obtenção da solução analítica do problema que se quer resolver. Em sísmica, por exemplo, a anisotropia, a heterogeneidade do meio, fornecendo mapas de velocidades com geometrias complexas, podem inviabilizar que se encontre a solução analítica para o problema, necessitando da utilização de métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas.

Diversos métodos numéricos são utilizados para encontrar soluções aproximadas para a equação de onda, tais como o método de diferenças finitas, de elementos finitos e de volumes finitos. O método das diferenças finitas (MDF), por exemplo, é largamente utilizado na resolução de equações diferenciais parciais. Num artigo clássico, Yee (1966) resolveu as equações de Maxwell a partir de um esquema de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) que possibilitava o uso de malhas espaciais multidimensionais. Alterman (1968) utilizou aproximações de Diferenças Finitas (DF) na modelagem sísmica de equação de onda elástica num meio dividido em duas camadas. Uma análise das soluções usando o MDF em domínios com variações de propriedades físicas é descrita em Boore (1972), Virieux (1984) e Virieux (1986). Alford et al. (1974) comparou uma solução utilizando o MDF com uma solução analítica para a equação de onda acústica num campo com quinas. Esses métodos alcançam elevada precisão desde que malhas refinadas sejam utilizadas. Desta maneira, a precisão da aproximação da derivada depende do refinamento da malha.

Como em problemas de sísmica deseja-se obter uma soluço precisa e em curta dura o de tempo,   comum a utiliza o do MDF explícito. Num domínio espacial heterogêneo a garantia de estabilidade do método fica condicionada   região que necessita da discretiza o mais refinada, ou seja, em um problema de sísmica, por exemplo, quanto maior a velocidade de propaga o do meio, mais refinado deve ser o passo de tempo. Desta maneira, caso uma pequena parcela do domínio tenha maior velocidade, a necessidade de garantia de estabilidade implicará no uso de um passo de tempo que será conservador para as demais regiões do domínio espacial. Essa medida, para garantia de estabilidade da soluço do problema, pode gerar um custo computacional excessivo que pode inviabilizar ou tornar complexa a obten o dessa soluço.

Tendo isso em vista, esse trabalho tem por objetivo avaliar técnicas que possam auxiliar na minimiza o desse custo computacional, como a utiliza o de passos de tempo variáveis, definidas dependendo da característica do meio.

Encontram-se, na literatura, propostas apresentadas por Falk et al. (1998) e Tessmer (2000) que descrevem esquemas que utilizam adaptatividade temporal com passos de tempo ajustados localmente, de acordo com a velocidade da subregião, de modo a garantir a condi o de estabilidade do método em todo o domínio. Uma das vantagens de fazer uso do esquema de adaptatividade temporal   um possível ganho no tempo final de simula o, uma vez que um passo de tempo maior pode ser utilizado em partes do domínio que tenham velocidades de propaga o menores. No entanto, a eficiência e a qualidade dos resultados dos esquemas propostos depende da rela o entre a dimensão dos subdomínios com maior e menor velocidade. Falk et al. (1998) propõe a utiliza o de passos de tempo variáveis de acordo com a região do domínio que permite trabalhar com passos de tempo múltiplos de 2 na forma $\Delta t/2^i$ onde i   um inteiro positivo ou negativo. Na segunda, Tessmer (2000) modifica a proposta anterior, permitindo passos de tempo na forma $\Delta t/(i + 1)$, onde i   um inteiro ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Neste trabalho foram implementadas e testadas essas técnicas, incluindo situa es potencialmente críticas, como nas regiões onde ocorrem mudanças de velocidades e simula es no limiar de estabilidade. Identifica-se o aparecimento de um "*ruído*" nas solu es, quando são utilizados passos de tempo próximos ao limiar da estabilidade. Buscando uma soluço, propõe-se uma modifica o nestas técnicas, que elimina o aparecimento desse "*ruídos*", e que passou a chamar Região de Transi o Triangular (RTT).

Apresenta-se no Capítulo 2 uma breve descri o do problema da onda acústica e do método das diferenças finitas. No capítulo 3 são descritos os esquemas de adaptatividade

temporal encontrados na literatura e os conceitos neles envolvidos e a seguir, no capítulo 4, são apresentados resultados da aplicação desses esquemas em problemas bidimensionais, utilizando-se o MDF explícito com aproximações de segunda ordem, para aproximar a derivada temporal, e de segunda, quarta e sexta ordens, para aproximar as derivadas espaciais. O capítulo 5 apresenta a nova proposta de algoritmo denominada Região de Transição Triangular (RTT) e respectivos resultados no limiar da estabilidade e por fim, no capítulo 6 as conclusões desse trabalho, bem como propostas para sua continuidade são descritos.

Capítulo 2

Equação da onda acústica

2.1 Introdução

Diversos sistemas dinâmicos que tratam de situações reais podem ser modelados através de equações diferenciais. As equações diferenciais aplicadas na modelagem desses sistemas raramente possuem soluções analíticas, necessitando, nesses casos, de um método numérico para a obtenção de uma solução aproximada. Esses métodos, se adequadamente utilizados, podem ser empregados para permitir uma correta interpretação de dados de campo, prover dados sintéticos para avaliação de modelos e testar técnicas de aquisição de dados.

O presente capítulo apresenta a equação da onda acústica, que será utilizada neste trabalho tendo como motivação aplicações em geofísica, como descritos em Bulcão (2004). Faz-se também um breve resumo sobre o Método de Diferenças Finitas (MDF) e, finalmente, descreve-se o problema da onda acústica em meio heterogêneo.

2.1.1 A equação da onda acústica

A equação da onda acústica para um problema unidimensional ($1D$) é descrita como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

com condições iniciais: $u(x, 0) = f(x)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, $\forall x$, com $x \in [0, x_n]$;

e condição de contorno: $u(0, t) = h_1(t)$ e $u(x_n, t) = h_2(t)$, $t > 0$.

onde $u = u(x, t)$ é uma função da posição (x) e do tempo (t) que descreve o comportamento

da onda, c a velocidade de propagação da onda num dado meio.

A seguir apresenta-se a equação da onda acústica para um problema bidimensional (2D):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

definida no domínio espacial Ω , onde Γ representa o contorno do domínio, com condições iniciais: $u(x, y, 0) = f(x, y), \forall x, y$, com $x \in [0, x_n]$ e $y \in [0, y_n]$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y), \forall x, y$, com $x \in [0, x_n]$ e $y \in [0, y_n]$; e condição de contorno: $u(\Gamma, t) = h(x, y), t > 0$, onde $u = u(x, y, t)$ é uma função da posição (x, y) e do tempo (t) que descreve o comportamento da onda e $c = c(x, y)$ é a velocidade de propagação da onda num dado meio.

2.2 Método de Diferenças Finitas (MDF)

2.2.1 Apresentação do método

A teoria básica do MDF é de fácil compreensão, razoavelmente simples em seus conceitos e por isso é de imediata aplicação. O fundamento consiste na substituição das derivadas parciais da equação contínua, que descrevem o fenômeno, por fórmulas discretas de diferenças e na aplicação da equação resultante em um número finito de pontos da região de interesse (malha espacial). No entanto a simples escolha de um esquema numérico não é suficiente para a garantia de uma boa aproximação para a solução do problema. A princípio, quanto mais refinada a discretização do domínio, obedecendo as questões de estabilidade do método, mais próxima da solução estará a aproximação obtida. Porém, o custo computacional aumenta proporcionalmente ao refinamento espacial e temporal adotado. Assim, para um problema 1D, por exemplo, que varia em função do espaço e do tempo, definido no intervalo $0 \leq x \leq x_n$ e $0 \leq t \leq T$, uma discretização da função $u = u(x, t)$ é obtida considerando apenas os valores u_i^j sob um número finito de pontos (x_i, t_j) na forma:

$$u_i^j = u(x_i, t_j) = u(i\Delta x, j\Delta t), i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n, \quad (2.3)$$

onde $\Delta x = L/m$, $\Delta t = T/n$. Na notação empregada para descrever as aproximações, os índices subscritos correspondem às dimensões espaciais enquanto que o índice sobrescrito refere-se ao passo de tempo. Para exemplificar apresenta-se, na Figura 2.1, uma malha

que aproxima a discretização de um problema que varia com o espaço e com o tempo, $u = u(x, t)$.

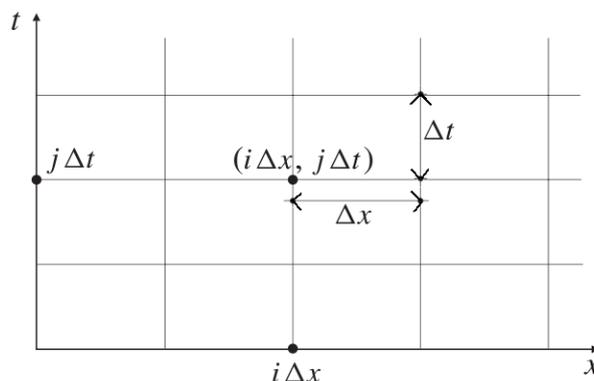


Figura 2.1: Malha no tempo e no espaço

2.2.2 Consistência, convergência e estabilidade

A confiança em um esquema de Diferenças Finitas (DF) [1] se dá com a constatação das seguintes propriedades:

- Consistência: para que uma discretização seja consistente com a equação diferencial parcial seu Erro Local de Truncamento (ELT) deve tender a zero quando $\Delta h, \Delta t \rightarrow 0$.

- Estabilidade: Um método numérico estável é aquele no qual quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificadas sem limite. Essa amplificação, quando presente, faz com que o módulo dos valores da solução numérica cresça a cada etapa dos cálculos.

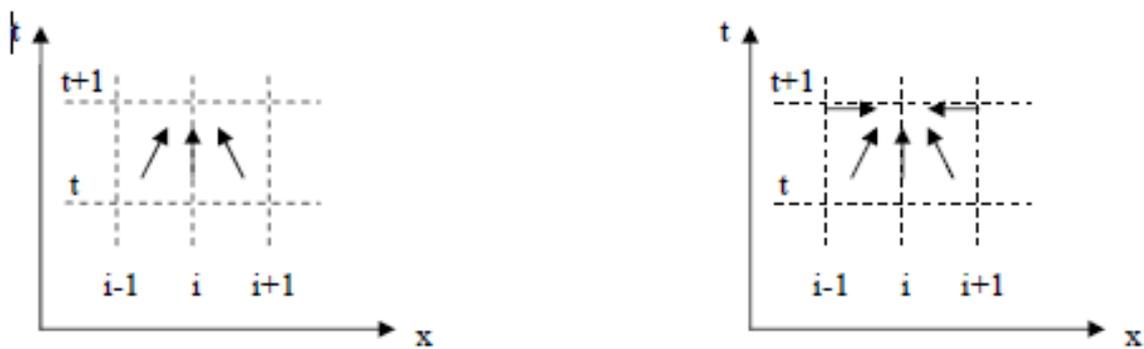
Se a formulação é consistente e estável o esquema é convergente.

- Convergência: Um método numérico é convergente se a solução numérica no domínio de interesse u_i^t se aproximar da solução exata $u(x_i, t_n)$. A *consistência* é condição necessária e a *estabilidade* é condição necessária e suficiente para a **convergência**.

2.2.3 Esquemas: implícito e explícito

Existem dois tipos de esquemas clássicos do método de Diferenças Finitas para equações diferenciais que variam com o tempo: implícito e explícito. O esquema implícito relaciona o valor de u em cada ponto, no nível de tempo $t + 1$, com outros valores desconhecidos no mesmo nível de tempo, $t + 1$, e também no instante de tempo t , conhecido, o que gera um sistema de equações algébricas a ser resolvido simultaneamente a cada nível de tempo 2.2 (b).

Um esquema de Diferenças Finitas no domínio do tempo é chamado explícito quando, na discretização da equação, o valor desconhecido de u em cada ponto, no nível de tempo $t + 1$, é calculado usando-se unicamente valores nos níveis de tempo anteriores, nesse exemplo o instante de tempo t , onde estes valores são conhecidos: ou dados como condições iniciais do problema ou calculados no passo de tempo anterior 2.2 (a). Assim, não é necessário resolver um sistema de equações algébricas para cada passo de tempo. Esses esquemas são sujeitos a condições ou critérios de estabilidade, que restringem ou inter-relacionam os valores dos incrementos espaciais, Δx e Δy , e o incremento temporal, Δt .



(a) Esquema explícito

(b) Esquema implícito

Figura 2.2: Esquemas numéricos no tempo. Fonte: Tucci (1998)

Os métodos numéricos implícitos demandam uma quantidade de memória maior e requerem um número de operações matemáticas, consideravelmente maior que métodos explícitos para um mesmo incremento de tempo, pois envolvem a resolução de sistemas lineares, o que pode torna-los inviáveis para algumas aplicações. Por outro lado os métodos explícitos deparam-se com problemas de estabilidade, necessitando de discretizações refinadas para garantia de convergência da solução numérica, o que também pode levar a um alto custo computacional. Assim, a pesquisa de métodos que sejam computacionalmente viáveis e precisos numericamente é uma tarefa que vem desafiando inúmeros pesquisadores [10-13].

2.2.4 Aproximações de Diferenças Finitas (DF) para Equação da onda acústica

Neste trabalho, que trata de aproximações para a solução do problema de onda acústica, aproximam-se as derivadas segundas no tempo utilizando-se um operador de diferenças finitas de segunda ordem e operadores espaciais de segunda, quarta e sexta ordem para

aproximar as derivadas espaciais. Além disso, como em aplicações de geofísica, que motivaram esse trabalho, utiliza-se com freqüência os MDF explícitos, e somente esses serão aqui representados.

Ao longo deste texto, utiliza-se a seguinte notação 2-2, 2-4 e 2-6, para denotar que foram utilizadas aproximações de diferenças finitas de 2ª ordem no tempo para todos os casos e aproximações de 2ª, 4ª e 6ª ordem no espaço, respectivamente.

As aproximações para as derivadas segundas são aproximações por expressões de diferenças centrais de segunda, quarta e sexta ordens que estão descritas como $(\mathbf{u}_{xx})_{i,j}$ nas Eq. 2.4 a 2.6, respectivamente. A aproximação de segunda ordem para a derivada temporal pode ser obtida de maneira análoga.

$$(\mathbf{u}_{xx})_{i,j} = \frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - 2\mathbf{u}_{i,j} + \mathbf{u}_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.4)$$

$$(\mathbf{u}_{xx})_{i,j} = \frac{-\mathbf{u}_{i-2,j} + 16\mathbf{u}_{i-1,j} + 30\mathbf{u}_{i,j} + 16\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i+2,j}}{12\Delta x^2} \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{u}_{xx})_{i,j} = \frac{2\mathbf{u}_{i-3,j} - 27\mathbf{u}_{i-2,j} + 270\mathbf{u}_{i-1,j} - 490\mathbf{u}_{i,j} + 270\mathbf{u}_{i+1,j} - 27\mathbf{u}_{i+2,j} + 2\mathbf{u}_{i+3,j}}{180\Delta x^2} \quad (2.6)$$

Para o caso da onda acústica bidimensional, substituindo-se as aproximações temporal e espacial ambas de segunda ordem (2-2) descritas na Eq. 2.4, obtém-se para o método explícito a seguinte expressão:

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \mathbf{u}_{i,j}^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} = c \frac{\mathbf{u}_{i+1,j}^t - 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \mathbf{u}_{i-1,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+1}^t - 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \mathbf{u}_{i,j-1}^t}{\Delta h^2} + O(\Delta t^2, \Delta h^2) \quad (2.7)$$

ou

$$\mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t} = 2\mathbf{u}_{i,j}^t + C^2(\mathbf{u}_{i+1,j}^t - 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \mathbf{u}_{i-1,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+1}^t - 2\mathbf{u}_{i,j}^t + \mathbf{u}_{i,j-1}^t) - \mathbf{u}_{i,j}^{t-\Delta t} \quad (2.8)$$

com $C = c \frac{\Delta t}{\Delta h}$, onde t representa o passo de tempo, os índices i e j representam os pontos

da malha espacial em cada direção e Δt e Δh correspondem às discretizações temporal e espacial respectivamente. Apresenta-se, a seguir (Eq. 2.9) a expressão do MDF explícito para a aproximação 2-4 e na Eq. 2.10 para a aproximação 2-6.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t} = & 2\mathbf{u}_{i,j}^t \frac{C^2}{12} [-\mathbf{u}_{i+2,j}^t - \mathbf{u}_{i-2,j}^t - \mathbf{u}_{i,j+2}^t - \mathbf{u}_{i,j-2}^t + \\ & + 16(\mathbf{u}_{i+1,j}^t + \mathbf{u}_{i-1,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+1}^t + \mathbf{u}_{i,j-1}^t) + \\ & - 60\mathbf{u}_{i,j}^t] - \mathbf{u}_{i,j}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{t+\Delta t} = & 2\mathbf{u}_{i,j}^t \frac{C^2}{180} [2(\mathbf{u}_{i+3,j}^t + \mathbf{u}_{i-3,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+3}^t + \mathbf{u}_{i,j-3}^t) + \\ & - 27(\mathbf{u}_{i+2,j}^t + \mathbf{u}_{i-2,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+2}^t + \mathbf{u}_{i,j-2}^t) + \\ & + 270(\mathbf{u}_{i+1,j}^t + \mathbf{u}_{i-1,j}^t + \mathbf{u}_{i,j+1}^t + \mathbf{u}_{i,j-1}^t) + \\ & - 980\mathbf{u}_{i,j}^t] - \mathbf{u}_{i,j}^{t-\Delta t} \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2.5 Limites de estabilidade

Apresenta-se na Tabela 2.1, os limites de estabilidade do MDF para aproximações de segunda ordem temporal e, respectivamente, segunda e quarta ordem espacial, para problemas unidimensionais e bidimensionais.

Dimensão	2ª ordem	4ª ordem
1D	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2D	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{8}}$

Tabela 2.1: Tabela com os limites de estabilidade - Laurence et al. (1998).

Acrescenta-se, aos valores dessa tabela, o limite de estabilidade para o 2-6 bidimensional, $C = 0,575$. Este valor foi obtido experimentalmente.

Apresenta-se a seguir um problema num domínio em meio heterogêneo.

2.3 O problema da onda acústica em meios heterogêneos

Nas aproximações de geofísica o domínio de interesse é normalmente heterogêneo, isso é a velocidade de propagação da onda depende do ponto (x_i, y_i) do domínio.

Normalmente as discretizações espaciais e temporais são feitas com incrementos constantes. Para garantir a estabilidade do método em todo o domínio, para um dado Δh , há a necessidade de se utilizar o Δt mais refinado que o necessário em certas regiões gerando, com isso, maior custo computacional.

Para ilustrar a necessidade de refinar a discretização temporal para garantir a estabilidade do método em todo domínio, apresentam-se nesta seção resultados de um problema da onda acústica unidimensional (1D), primeiro com um domínio homogêneo e, em seguida, com domínios heterogêneos: um no qual o meio de maior velocidade requer a divisão do passo de tempo por 2 e outro que requer a divisão do passo de tempo por 4.

Apresentam-se resultados de simulações num domínio 1D com $0,0 \leq x \leq 5,0$ com uma interface de velocidade em $x = 3,5$ sendo que em $x \in [0,0; 3,5[$ a velocidade é dada por v_1 e em $x \in [3,5; 5,0]$ é dada por v_2 . O instante de tempo final de cada simulação é $t = 3,0$, com a condição inicial descrita em 2.11.

$$f(x) = e^{\left(\frac{-(x-2,5)^2}{0,0075}\right)} \quad (2.11)$$

Utilizam-se aproximações de segunda ordem no tempo e quarta no espaço (2-4). Utiliza-se, também a discretização espacial, $\Delta x = 0,00625$ fixo.

Primeiramente, apresentam-se na Fig. 2.3, resultados para $v_1 = 1,0m/s$ e $v_2 = v_1$ que significa um domínio homogêneo com Δt no limite da condição de estabilidade do método ($\Delta t = 0,00541s$), em dois instantes de tempo: (a) $t = 1,75s$ e (b) $t = 2,0s$.

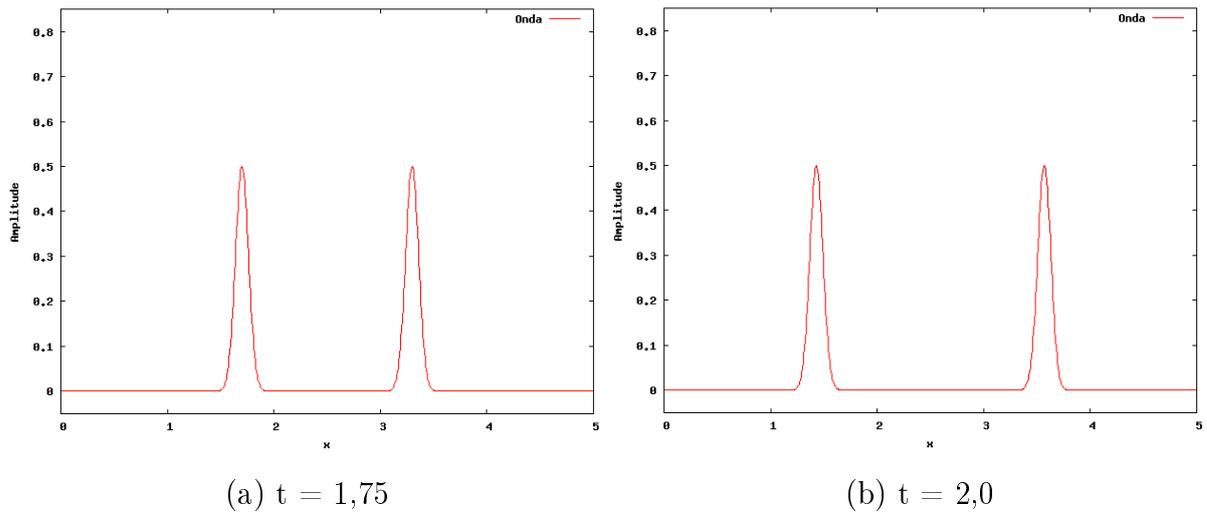


Figura 2.3: Simulação onda 1D - Meio Homogêneo $V = 1,0m/s$ $\Delta t = 0,00541s$.

Em seguida na Fig. 2.4 apresentam-se resultados quando $v_1 = 1,0m/s$ e $v_2 = 2,0m/s$ em dois instantes de tempo: (a) $t = 1,75$, antes que a onda atinja a interface de mudança de velocidade; (b) $t = 2,0$ após a interface de velocidade. Utilizou-se $\Delta t = 0,00271$, o que significa $C = 0,43$, abaixo do limite de estabilidade, para o primeiro subdomínio, enquanto no segundo subdomínio, $C = 0,86$ está no limite de estabilidade do método.

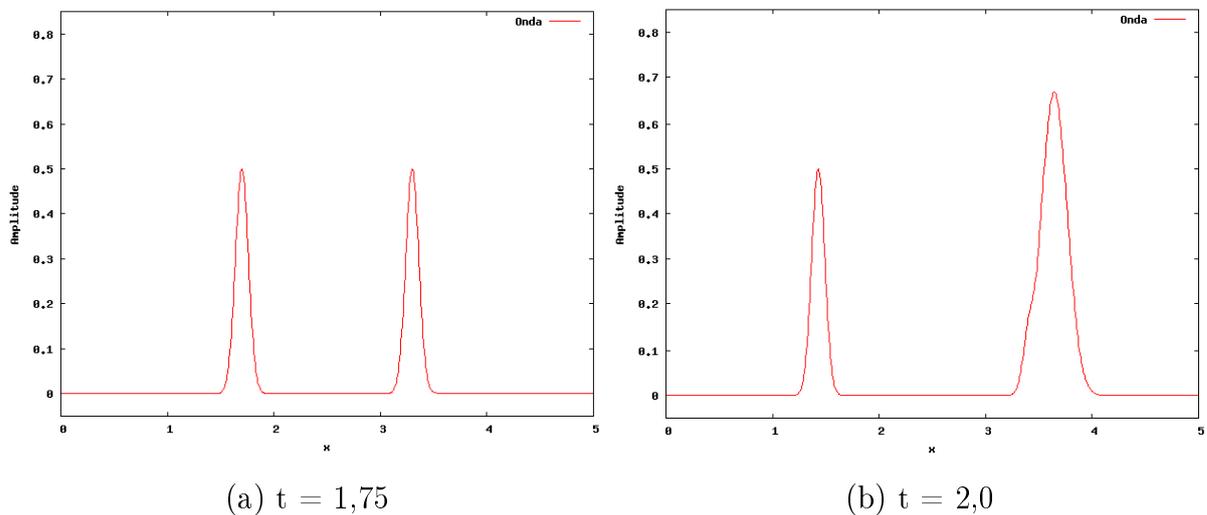


Figura 2.4: Simulação onda 1D - Meio Heterogêneo $v_1 = 1,0m/s$ e $v_2 = 2,0m/s$ $\Delta t = 0,00271s$.

A Fig. 2.5 apresenta os mesmos resultados quando $v_2 = 4,0m/s$. Utilizou-se, nesse caso, $\Delta t = 0,00135s$, em todo domínio para a garantia da estabilidade, significando que no primeiro subdomínio $C = 0,215$.

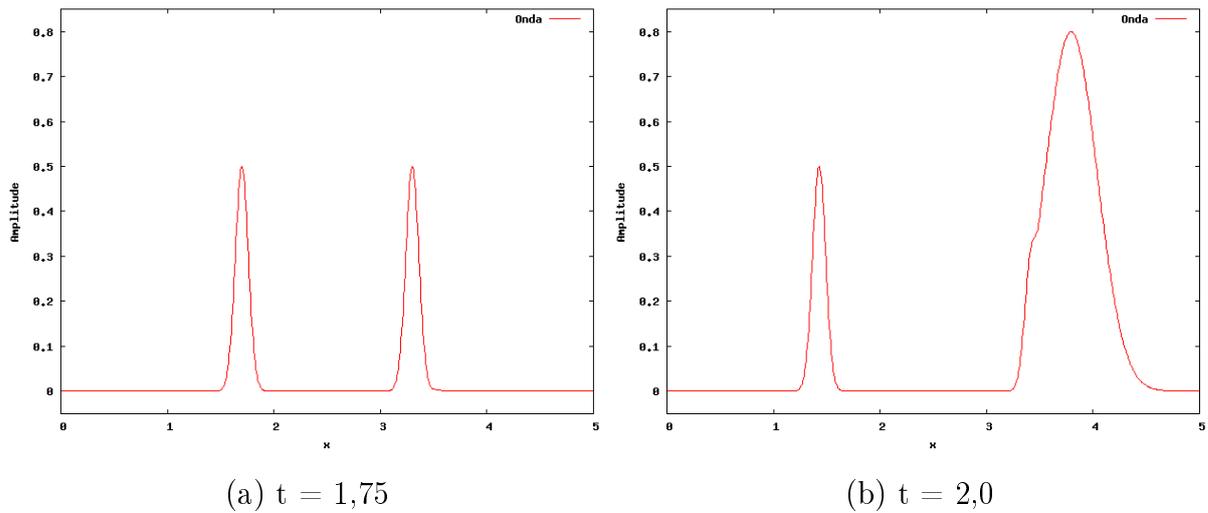


Figura 2.5: Simulação onda 1D - Meio Heterogêneo $V_1 = 1,0m/s$ e $V_2 = 4,0m/s$ $\Delta t = 0,00135$.

Pode-se observar que, trabalhando no limiar de estabilidade, precisou-se refinar a discretização temporal nas simulações com domínio heterogêneo para a garantia da estabilidade. Estas simulações com o mesmo passo de tempo (Δt fixo) são chamadas neste trabalho de convencionais. Nestes esquemas convencionais tem-se um maior esforço computacional na região de menor velocidade, devido a necessidade da escolha da discretização temporal, para a garantia de estabilidade em todo o domínio. Essa escolha é feita em função da região com maior velocidade. Para a diminuição desse esforço ajustam-se localmente, por subregiões, os passos de tempos (adaptatividade temporal).

Capítulo 3

Adaptatividade temporal

3.1 Introdução

Conforme exposto na seção 2.2, métodos numéricos explícitos possuem um limiar de estabilidade para assegurar a convergência da solução numérica da equação da onda acústica. Domínios heterogêneos, isto é, aqueles que apresentam variações de velocidades, possuem diferentes condições de estabilidade, de acordo com a velocidade de propagação da onda no meio.

Em simulações onde se utiliza o mesmo passo de tempo para todo o domínio, a condição de estabilidade é governada pela região que tiver maior velocidade, ou seja, necessitam de um menor intervalo de tempo para garantir a estabilidade em todo o domínio. Com isso, o intervalo de tempo utilizado nas regiões de menor velocidade passa a ser muito conservador em determinados subdomínios, o que acarreta cálculos desnecessários para essas regiões.

Visando diminuir o custo computacional, a alternativa investigada nesta dissertação é a utilização de passos de tempo variáveis dependendo da velocidade de propagação do meio. Uma proposta para tentar diminuir o número de cálculos e, conseqüentemente, otimizar o (tempo) custo computacional sugerido em Falk et al. (1998) e Tessmer (2000) é adotar um algoritmo de adaptatividade temporal, que consiste em utilizar, em cada subdomínio, um intervalo de tempo que garanta a estabilidade da solução numérica. Neste capítulo apresentam-se os algoritmos de adaptatividade temporal propostos por Falk et al. (1998) e Tessmer (2000).

3.2 Adaptatividade temporal proposta em Falk et al. (1998)

Para se utilizar passos de tempo localmente ajustáveis como apresentado por Falk et al. (1998), os incrementos no tempo são ajustados em função do meio, utilizando passos de tempo intermediários que sejam múltiplos de 2^i , onde i é um inteiro positivo ou negativo. Desta forma, dado um domínio, divide-se o mesmo considerando a velocidade do meio em cada um dos subdomínios. Para ilustrar, considere um domínio com um campo de velocidades em que existem várias velocidades diferentes, v_1, v_2, \dots, v_n . Cada uma dessas velocidades determina um subdomínio (ou subregião).

A partir desta subdivisão, o subdomínio com a menor velocidade (v_{min}) utiliza $\Delta t_{max} = \Delta t$, ou seja, necessita de apenas uma divisão do passo de tempo. O subdomínio com duas divisões do passo de tempo utiliza $\Delta t/2$. Da mesma forma um subdomínio com quatro divisões do passo de tempo utilizará $\Delta t/4$. Assim por diante até que, no subdomínio onde a velocidade é a maior (v_{max}) utiliza o menor passo de tempo, ou seja, $\Delta t_{min} = \frac{\Delta t}{2^n}$.

Conforme apresentado em Falk et al. (1998), uma regra para a mudança do passo de tempo pode ser definida, *a priori*, ao se estabelecer relações com o limite de estabilidade da região de menor velocidade, que pode utilizar um maior passo de tempo. Considere $V = v_{subreg(i)}/v_{min}$ a relação entre a velocidade num subdomínio ($v_{subreg(i)}$) dividido pela menor velocidade do domínio (v_{min}). Se essa razão for maior que 1 e menor ou igual a 2 o passo de tempo a ser utilizado nessa subregião deve ser $\Delta t_{subreg(i)} = \Delta t/2$, caso seja maior que 2 e menor ou igual a 4 então, $\Delta t_{subreg(i)} = \Delta t/4$. A utilização de diferentes incrementos de tempo, proposta por Falk et al. (1998), pode ser sintetizada na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Tabela com regras gerais para mudança de Δt .

$V = v_{subreg}/v_{min}$	i	Divisões	Passo de tempo
$V = 1$	0	1	Δt
$1 < V \leq 2$	1	2	$\frac{\Delta t}{2}$
$2 < V \leq 4$	2	4	$\frac{\Delta t}{4}$
$4 < V \leq 8$	3	8	$\frac{\Delta t}{8}$
$8 < V \leq 16$	4	16	$\frac{\Delta t}{16}$
...
$2^{(n-1)} < V \leq 2^n$	n	2^n	$\frac{\Delta t}{2^n}$

3.2.1 Esquema com duas divisões do passo de tempo

Para apresentar o esquema adaptativo utiliza-se um problema da onda acústica unidimensional (1D) com aproximações de 2ª ordem no tempo e 4ª ordem no espaço (esquema 2-4), descrita pela expressão:

$$u_i^{t+\Delta t} = 2.0(1.0 - 15.0\nu)u_i^t + \nu(16.0(u_{i+1}^t + u_{i-1}^t) - (u_{i+2}^t + u_{i-2}^t)) - u_i^{t-\Delta t} \quad (3.1)$$

com $\nu = c^2 \frac{\Delta t^2}{12.0 \Delta x^2}$, onde c é a velocidade, t representa o passo de tempo, o índice i representa o ponto da malha espacial e Δt e Δx correspondem às discretizações temporal e espacial respectivamente. Apresentam-se, na Fig. 3.1, os pontos necessários para se calcular o valor de u no ponto k e no instante de tempo $t + \Delta t$ ($u_k^{t+\Delta t}$) utilizando a expressão descrita na Eq. 3.1.

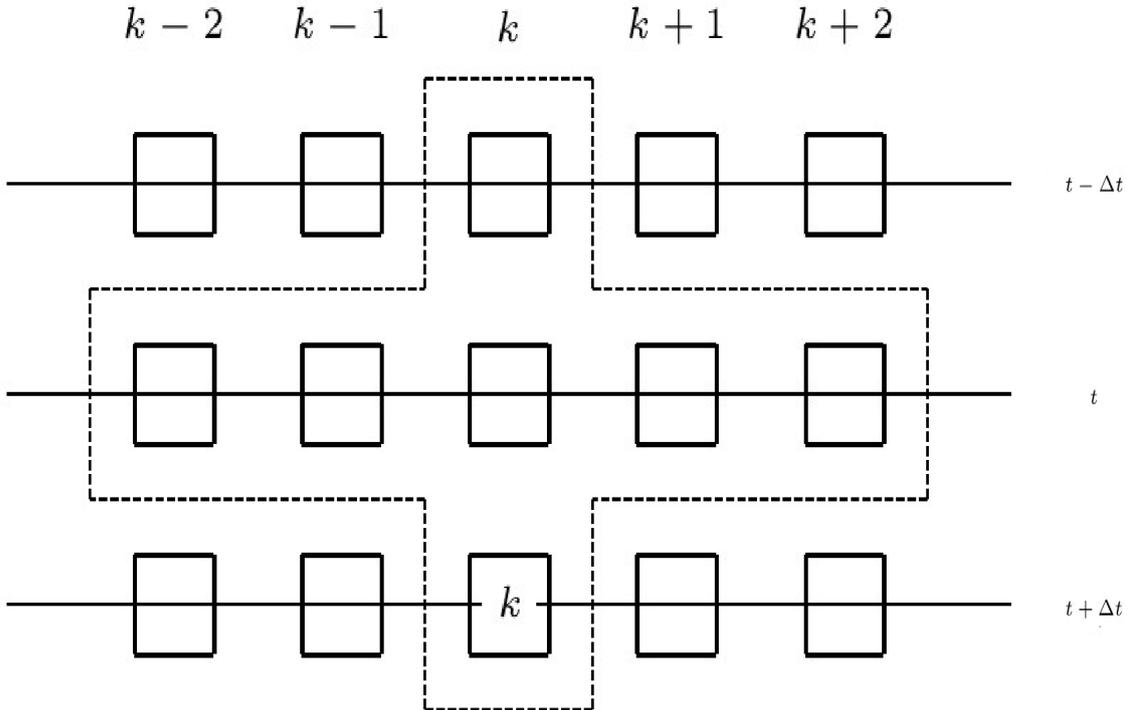


Figura 3.1: Molécula de cálculo 1D (Aproximação 2-4).

Na Fig. 3.2 apresenta-se um domínio 1D onde na região 2 a velocidade de propagação do meio é maior do que a velocidade de propagação da região 1 ($v_2 > v_1$). A estabilidade de cada região pode ser garantida com a utilização de $\Delta t_{max} = \Delta t$ e $\Delta t_{min} = \Delta t/2$.

Nesta figura, o tempo avança para baixo e, os quadrados pretos e brancos representam os pontos do domínio espacial discretizados. Os quadrados pretos são pontos situados na região com menor velocidade e que podem ser calculados com incremento de tempo Δt e os quadrados brancos são pontos da malha na região de maior velocidade e que devem ser calculados com $\Delta t/2$. Pode-se notar, na Fig. 3.2, que há uma distinção entre o número de pontos da malha espacial que são calculados a cada passo de tempo. Instantes de tempos que calculam os valores de u nos pontos em todo o domínio são chamados de tempos inteiros e, entre eles, chama-se de tempos intermediários, que calculam apenas os valores de u nos pontos da região de maior velocidade.

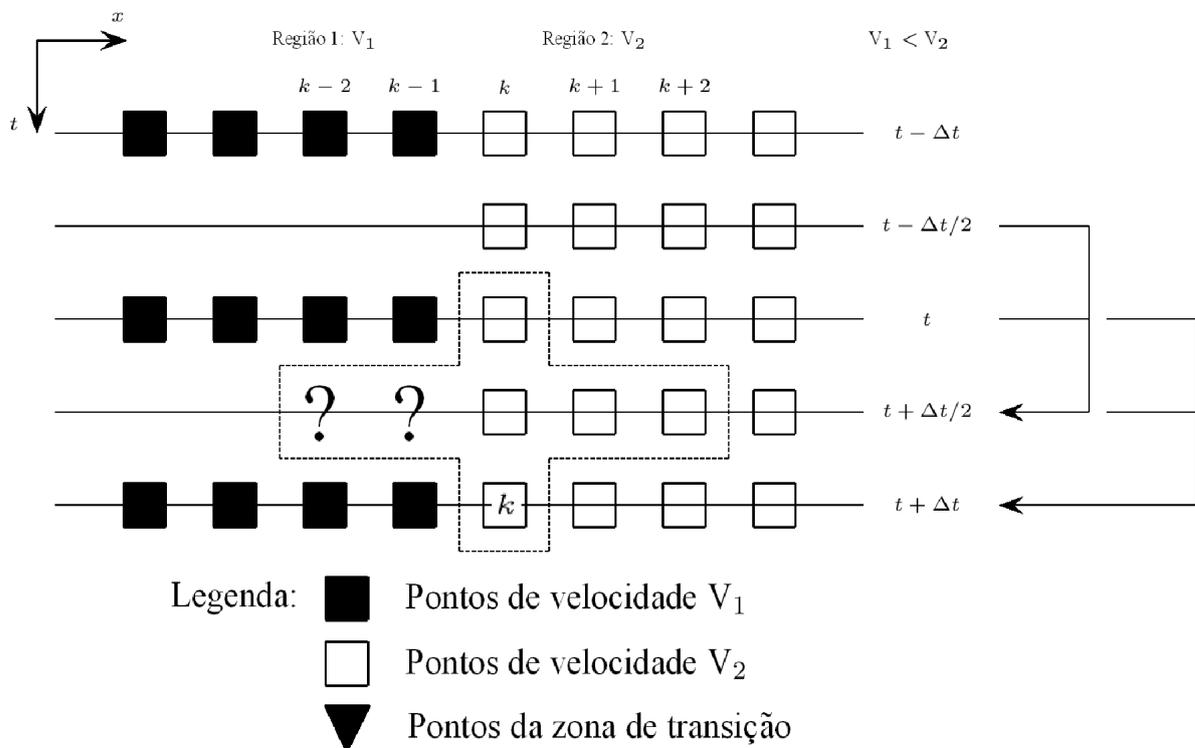


Figura 3.2: Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios.

Pode-se observar, na Fig. 3.2, que ao se calcular o valor de u no ponto k do instante de tempo $t + \Delta t$ ($u_k^{t+\Delta t}$), da região de maior velocidade, onde utiliza-se Δt_{min} , necessita-se de valores extras na região de menor velocidade, em $t + \Delta t/2$, a serem calculados com Δt_{min} , marcados na Figura, com "?".

É necessário então o cálculo desses pontos extras que estão identificados por triângulos pretos na Fig. 3.3 e são chamados de região de transição. O número de pontos extras, na região de menor velocidade, necessários para o cálculo de $u_k^{t+\Delta t}$, depende da ordem da aproximação espacial e do número de divisões do passo de tempo que o problema requer.

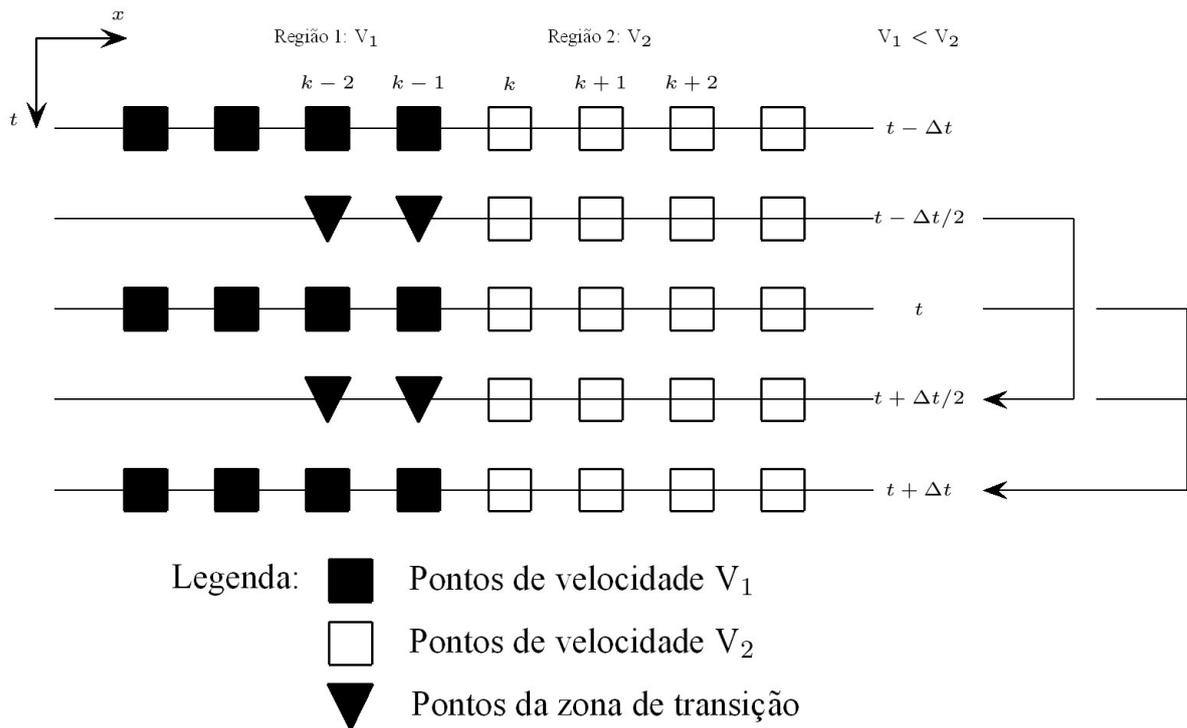


Figura 3.3: Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).

Desta forma, quando realiza-se somente duas divisões do passo de tempo, esse esquema pode ser utilizado, qualquer que seja a quantidade de subdomínios. Assim, esse esquema prossegue ao longo do tempo, calculando-se os valores de u para todos os pontos do domínio espacial nos tempos inteiros e calculando, nos tempos intermediários, os valores de u nos pontos da região de maior velocidade e os da região de transição. Este esquema é diretamente estendido para duas ou três dimensões.

Um exemplo análogo para o caso 2-D, utilizando uma aproximação 2-2, é mostrado na Fig. 3.4. Nesse esquema, para duas divisões do passo de tempo, os pontos que estão dentro do quadrado marcado em negrito (inclusive os pontos sob a linha) possuem velocidade maior v_2 e os pontos de fora possuem velocidade menor v_1 . A figura apresenta as três possibilidades ao se calcular pontos neste domínio. O valor da aproximação no ponto da região com v_1 é calculado com $\Delta t_{max} = \Delta t$ e os outros dois casos mostram os valores das aproximações nos pontos sendo calculados com $\Delta t_{min} = \Delta t/2$. Um deles está dentro da região de maior velocidade v_2 e o outro situa-se na interface de mudança de velocidades, ou seja, ele é vizinho de um ponto com menor velocidade e, por isso, utiliza pontos da zona de transição que é representado neste esquema como um triângulo.

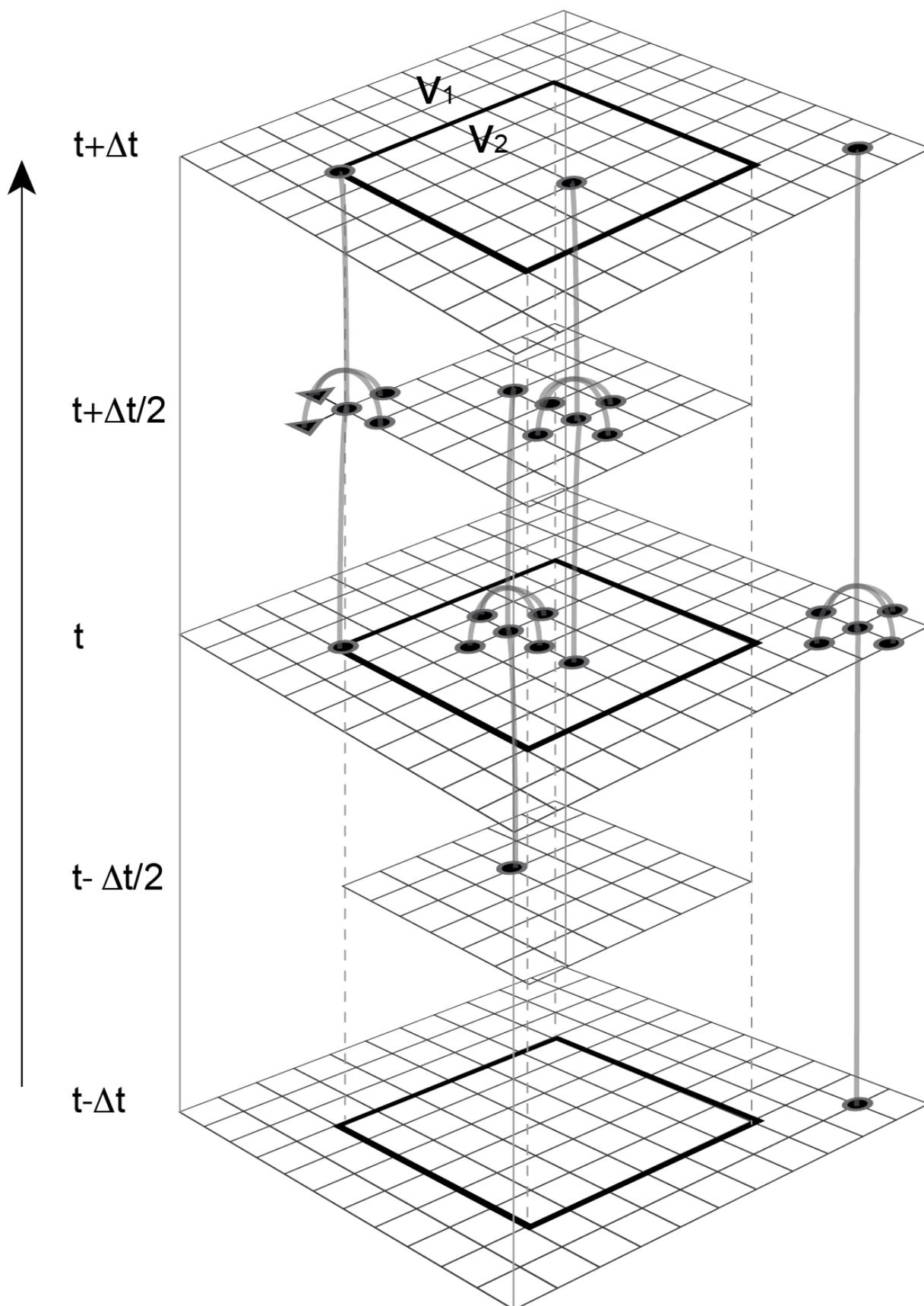


Figura 3.4: Esquema Falk/Tessmer para o caso 2-D com 1 nível de adaptatividade para uma aproximação 2-2.

3.2.2 Esquema com quatro divisões do passo de tempo

Em várias situações, dependendo da variação dos valores das velocidades no domínio, pode ser conveniente utilizar um esquema adaptativo com mais de duas divisões do passo de tempo. No algoritmo proposto em Falk et al. (1998) a discretização temporal é da forma $\Delta t/2^i$ onde $i = 0, 1, 2, \dots, n$. No caso de $i = 2$, ou seja, quatro divisões do passo de tempo, usa-se $\Delta t_{min} = \Delta t/4$ como menor discretização temporal.

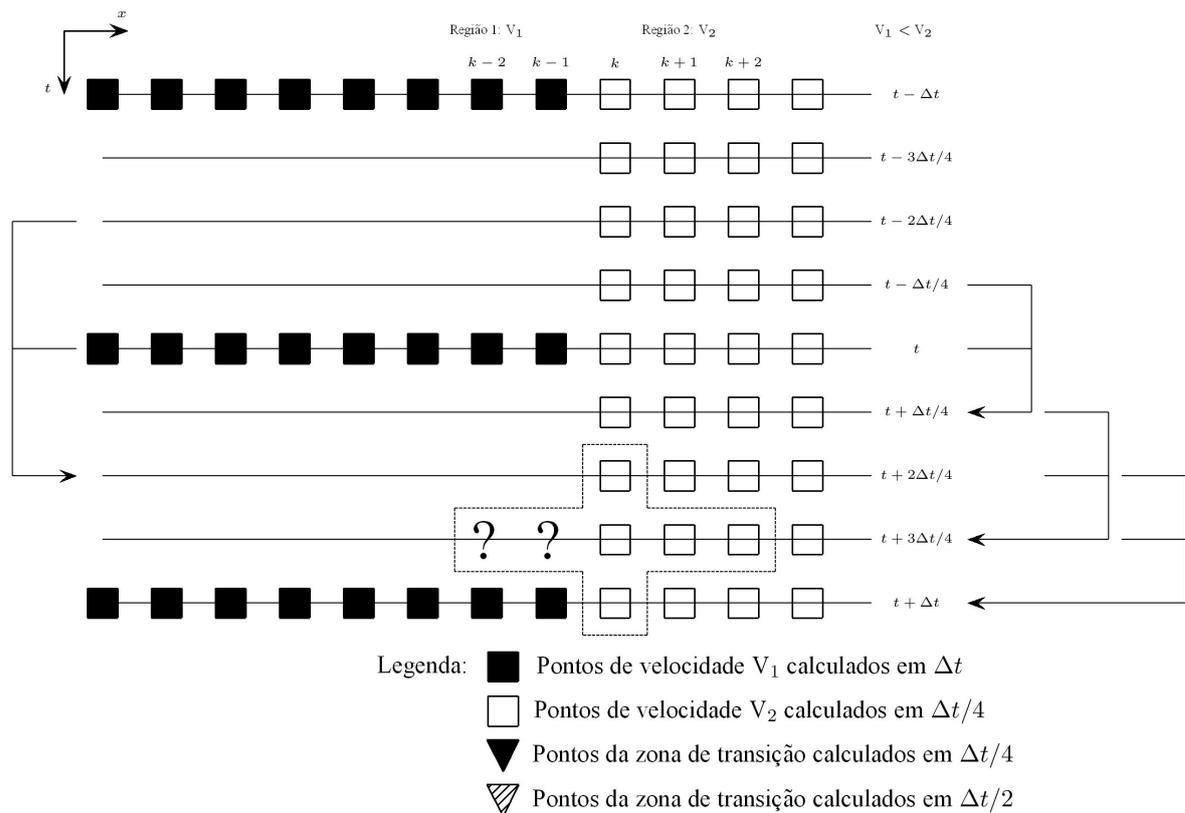


Figura 3.5: Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios.

Apresenta-se, na Fig. 3.5, o esquema do método adaptativo para quatro divisões do passo de tempo em um domínio 1D onde $v_2 > v_1$. A estabilidade do método em cada região poderia ser garantida com a utilização adequada do passo de tempo: $\Delta t_{max} = \Delta t$ para a região de menor velocidade e $\Delta t_{min} = \Delta t/4$ para a região de maior velocidade. Nesta figura, o tempo avança para baixo e os quadrados pretos e brancos representam os pontos do domínio espacial discretizados. Os quadrados pretos são pontos situados na região com menor velocidade e que podem ser calculados com Δt e os quadrados brancos são pontos da malha dentro da região de maior velocidade e que devem ser calculados com $\Delta t/4$. Conforme descrito na Subseção 3.2.1, instantes de tempos que calculam os

valores de u para todos os pontos do domínio são chamados de tempos inteiros e, entre eles, são chamados de instantes de tempos intermediários nos quais calculam-se os valores de u apenas nos pontos da região de maior velocidade.

No entanto, pode-se observar na Fig. 3.5 que ao se calcular o valor de u no ponto k , na região de maior velocidade, em $t + \Delta t$, $u_k^{t+\Delta t}$, onde utiliza-se $\Delta t_{min} = \Delta t/4$, necessita-se de valores extras, na região de menor velocidade, em $t + 3\Delta t/4$, a serem calculados com Δt_{min} , marcados na Figura, com "?". É necessário então o cálculo desses pontos extras utilizando Δt_{min} para o cálculo de $u_k^{t+\Delta t}$.

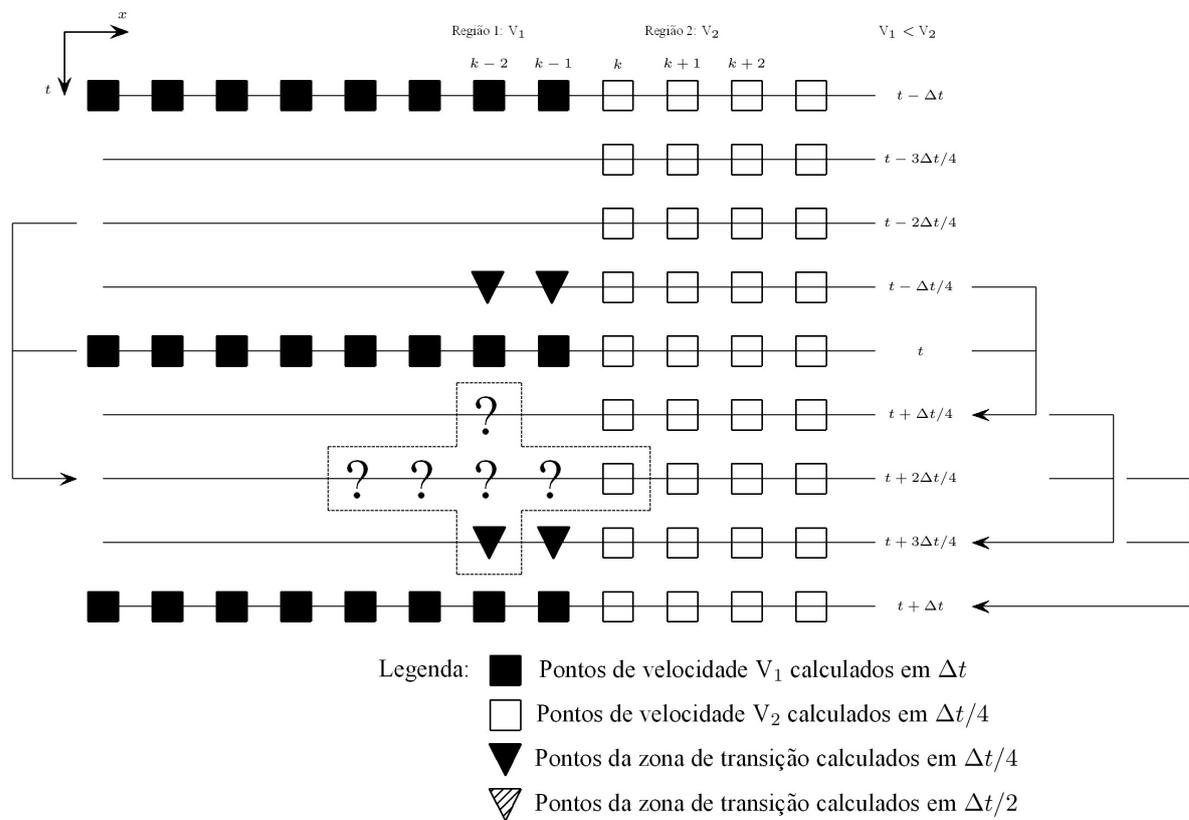


Figura 3.6: Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios.

Tomando como base o ponto extremo em que deve-se calcular o valor de u , para que os valores nesses pontos extras em $t + 3\Delta t/4$ sejam calculados, necessita-se de outros valores extras, a serem calculados em instantes de tempos intermediários anteriores, $t + 2\Delta t/4$ e $t + \Delta t/4$, conforme os pontos marcados na molécula de cálculo com "?" na Fig. 3.6.

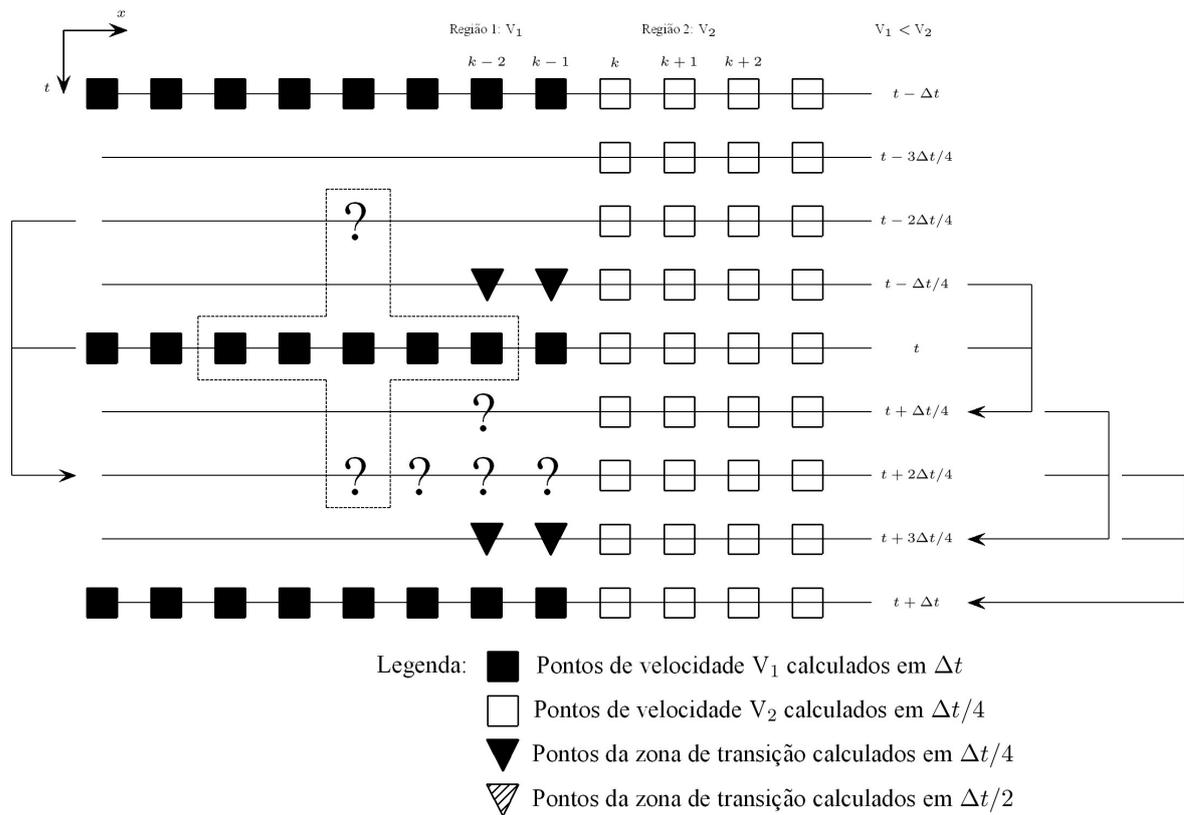


Figura 3.7: Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios.

Para que essa região de transição não aumente indefinidamente, os cálculos desses pontos serão feitos com uma diferença em relação aos demais pontos extras: utiliza-se, para esses pontos um passo de tempo de $\Delta t_{int} = \Delta t/2$, utilizando os valores já calculados nos instantes de tempos t e $t - 2\Delta t/4$, conforme apresentado na Fig. 3.7.

Finalizando calculam-se os valores de u para os pontos extras no instante de tempo $t + \Delta t/4$, utilizando $\Delta t_{min} = \Delta t/4$ (Fig. 3.8).

Apresenta-se na Fig. 3.9 toda a região de transição utilizada no esquema Falk et al. (1998) para um esquema 2-4 onde o domínio requer a utilização de quatro divisões do passo de tempo.

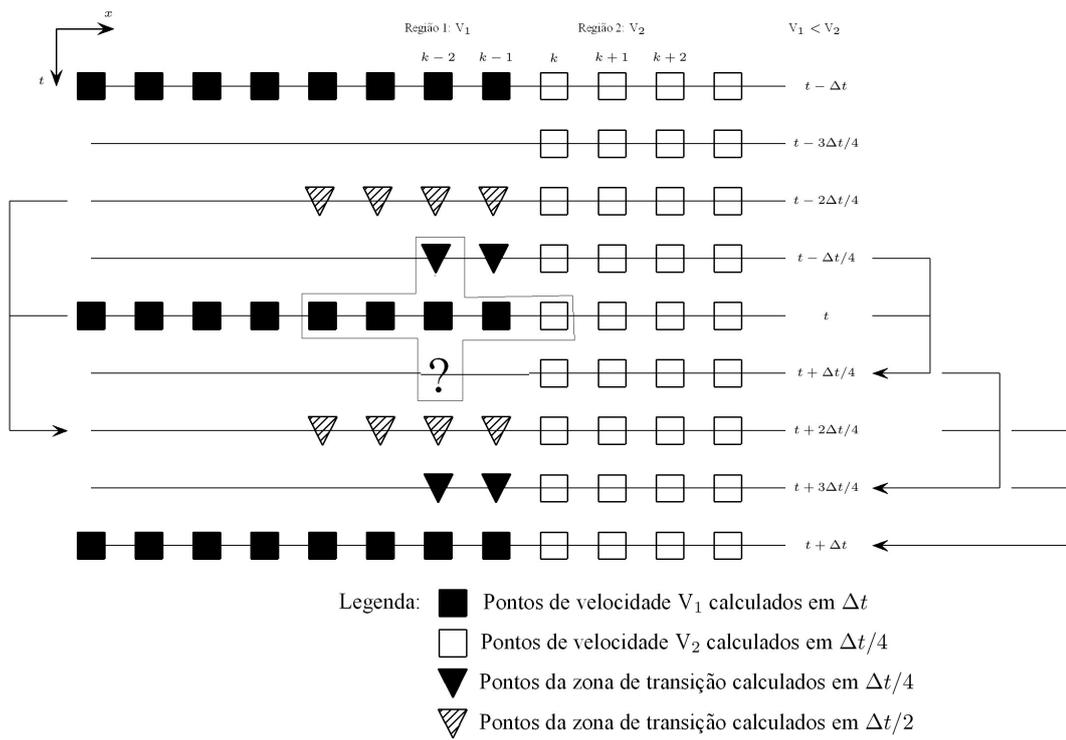


Figura 3.8: Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios.

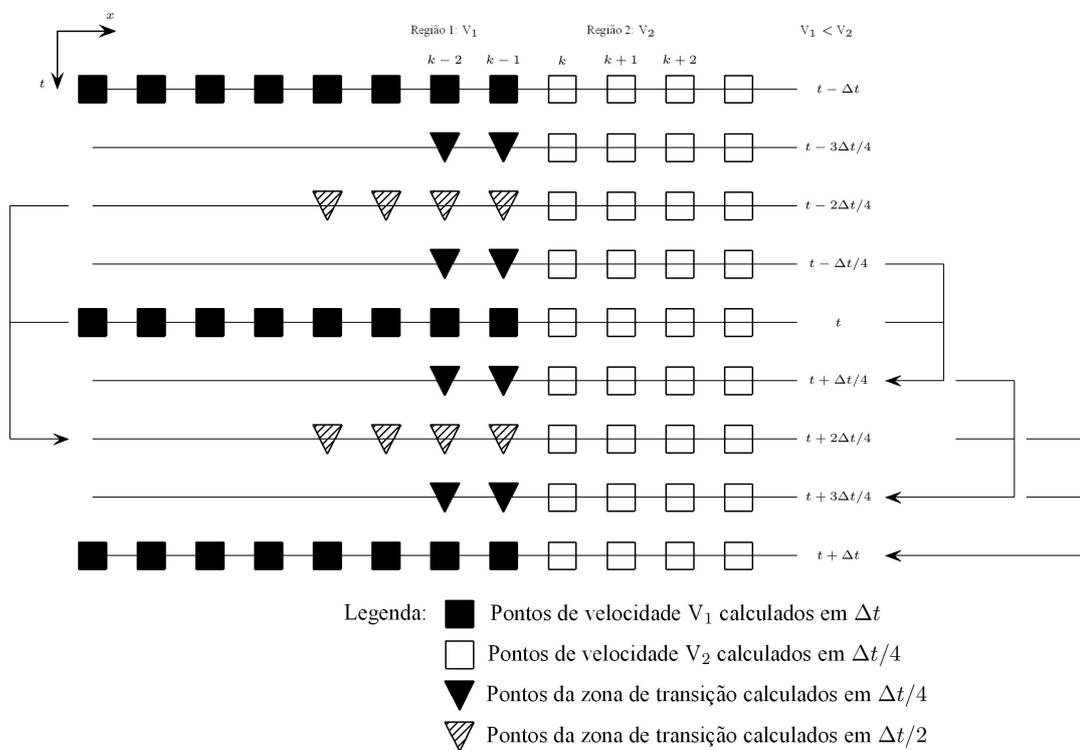


Figura 3.9: Esquema Falk/Tessmer 1D (Aproximação 2-4) divisão em subdomínios.

Esses pontos extras, chamados de Região de Transição, estão identificados na Fig. 3.9 por triângulos pretos (calculados com $\Delta t_{min} = \Delta t/4$) e hachurados (calculados com $\Delta t_{int} = \Delta t/2$). Assim, o algoritmo calcula nos instantes de tempos inteiros, o valor de u para todos os pontos do domínio, sendo parte dele utilizando $\Delta t_{max} = \Delta t$, e parte, $\Delta t_{min} = \Delta t/4$. Nos instantes de tempos intermediários, além dos pontos da região de maior velocidade (quadrados brancos), há necessidade de se calcular também o valor de u para os pontos extras da região de transição (triângulos pretos e hachurados). O tamanho dessa região depende da ordem da aproximação de Diferenças Finitas utilizada na discretização espacial.

A seguir apresenta-se um passo a passo para que sejam calculados o valor de u para todos pontos em $t + \Delta t$ considerando que o avanço do tempo inicie a partir de um instante de tempo t qualquer.

Passo 1: calcula-se o valor de u para todos os pontos da região de menor velocidade em $t + \Delta t$ utilizando os instantes de tempos t e $t - \Delta t$ e passo de tempo $\Delta t_{max} = \Delta t$ (Fig. 3.10).

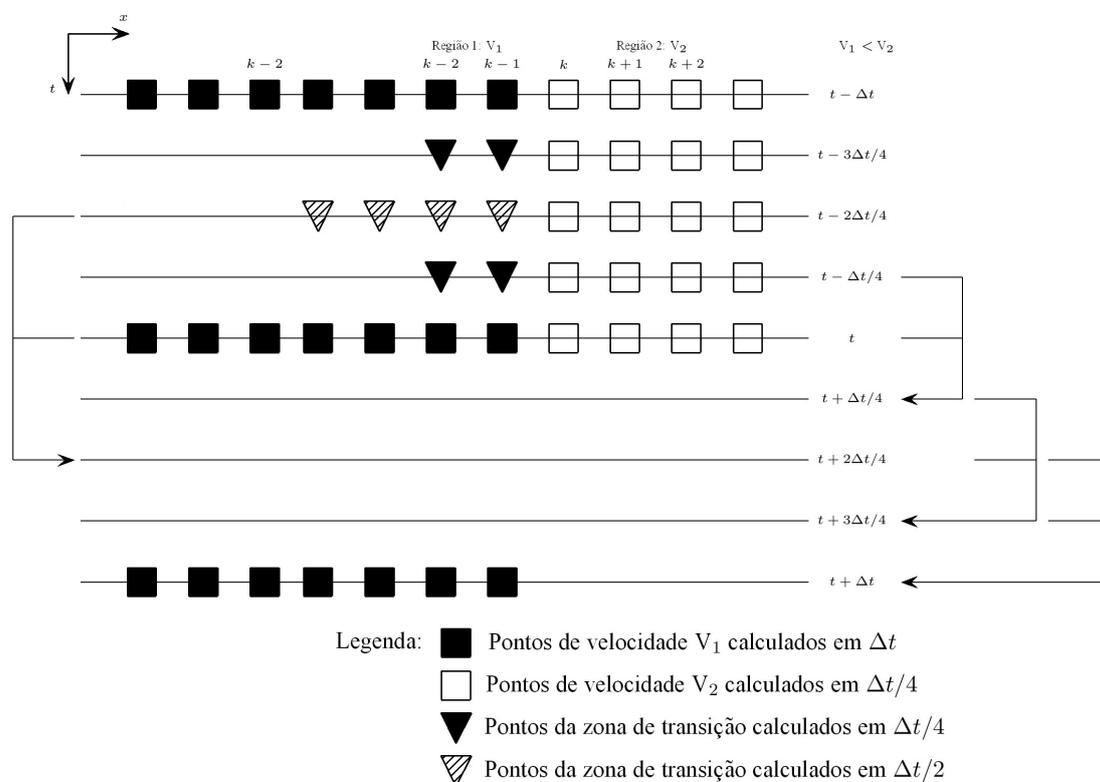


Figura 3.10: Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).

Passo 2: considerando que a interface da velocidade é no ponto k , inicia-se o cálculo do

instante de tempo intermediário, $t + \Delta t/4$, em $k - 2$ para o qual utiliza-se $\Delta t_{min} = \Delta t/4$ (Fig. 3.11). Além dos pontos da região de maior velocidade acrescenta-se o cálculo do valor de u nos pontos extras da região de transição.

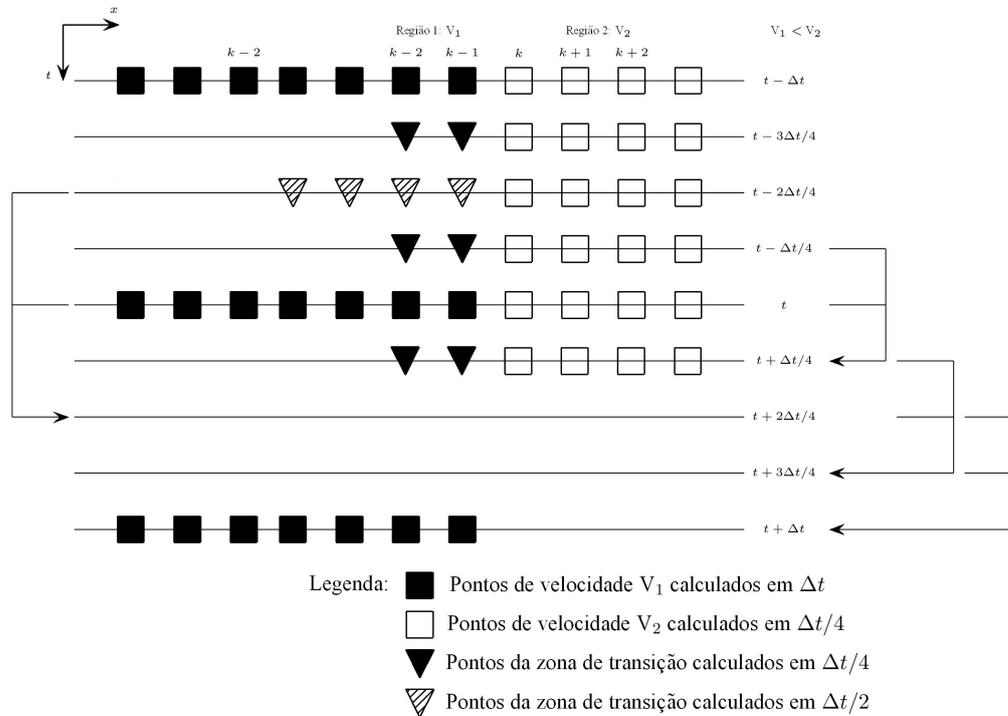


Figura 3.11: Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Passo 3: divide-se em duas etapas conforme apresentado na Fig. 3.12.

Passo 3.1: surge um caso especial ao se calcular valor de u nos pontos na zona de transição desse instante de tempo intermediário. Eles são calculados, utilizando os instantes de tempos t e $t - 2\Delta t/4$ com discretização $\Delta t_{int} = \Delta t/2$

Passo 3.2: calculam-se os demais pontos utilizando os instantes de tempos $t + \Delta t/4$ e t e passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$.

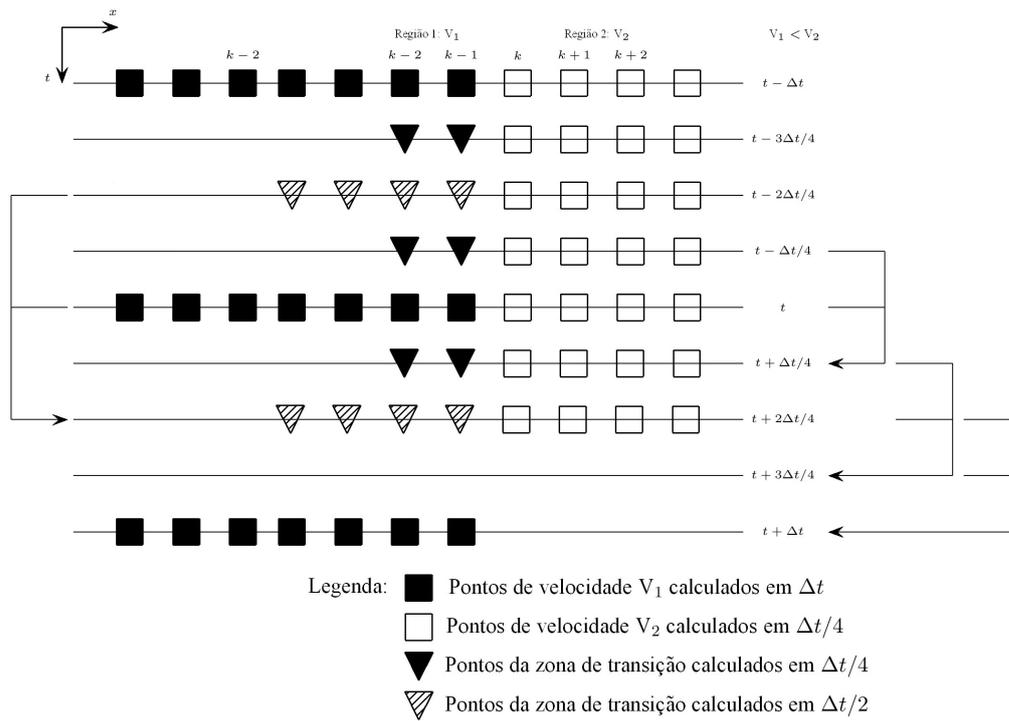


Figura 3.12: Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + 2\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Passo 4: calcula-se o instante de tempo intermediário $t + 3\Delta t/4$ iniciando em $k - 2$ (Fig. 3.13).

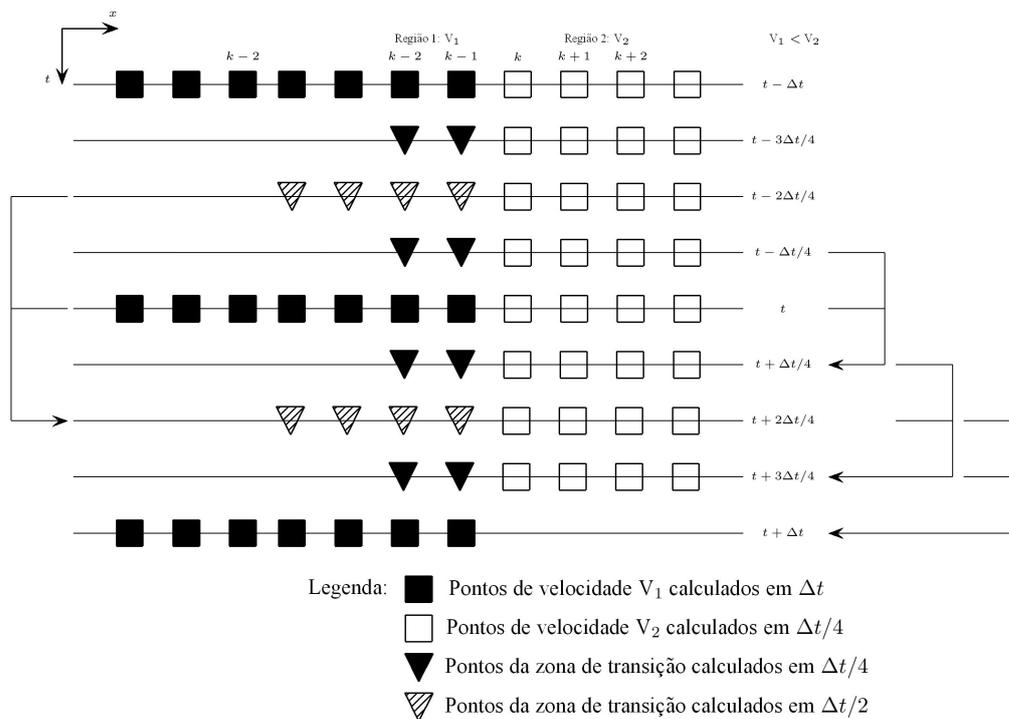


Figura 3.13: Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Passo 5: calcula-se o valor de u nos pontos do instante de tempo $t + \Delta t$, para a região de maior velocidade, iniciado a partir da interface da velocidade, ponto k (Fig. 3.14).

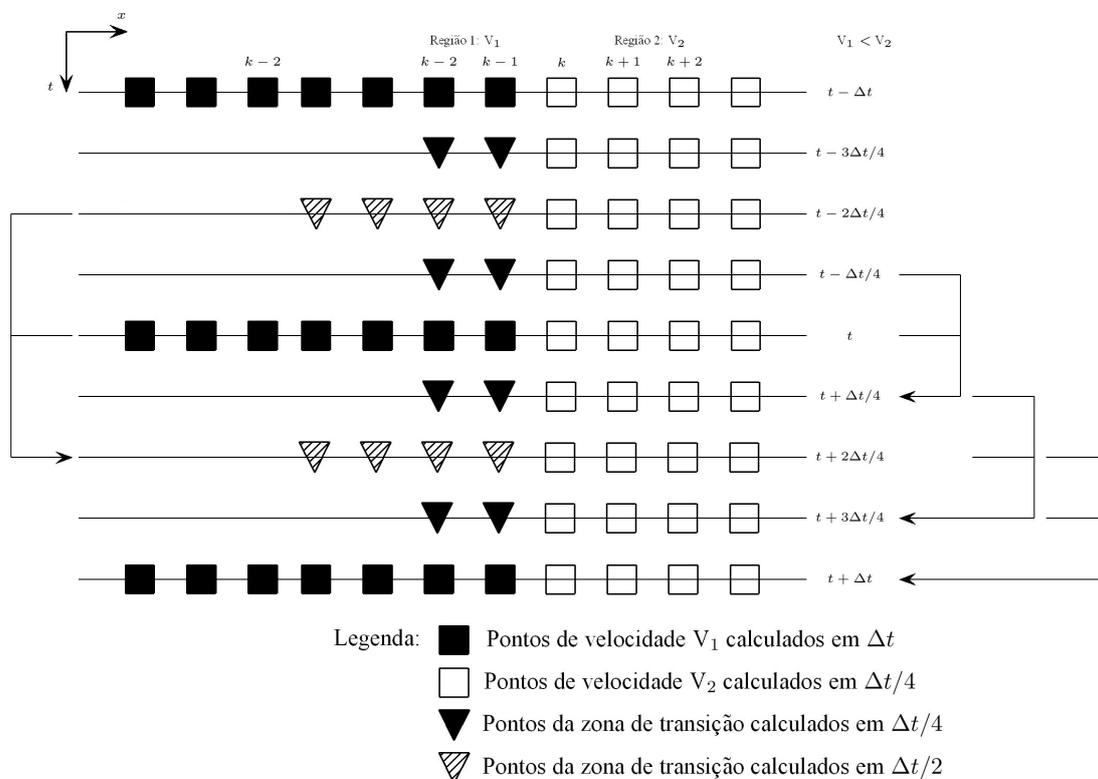


Figura 3.14: Esquema Falk/Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).

3.3 Adaptatividade temporal proposta em Tessmer (2000)

Como já mencionado neste trabalho, no esquema Falk et al. (1998) existe uma limitação na escolha da discretização temporal, onde só pode-se utilizar passos de tempo na forma de potência de 2, ou seja, $2^n \Delta t$, ..., $2\Delta t$, Δt , $\Delta t/2$, $\Delta t/4$, ..., $\Delta t/2^n$

Em Tessmer (2000), foi proposta uma modificação no algoritmo anterior que permite utilizar qualquer discretização temporal da forma $\Delta t_{subreg} = \Delta t/(i + 1)$, onde i é um inteiro ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$) que representa a razão entre as velocidades e determina as $i + 1$ divisões para cada subdomínio. A Tabela 3.3 sintetiza essas regras para este esquema.

$V = v_{subreg}/v_{min}$	i	Divisões	Passo de tempo
1	0	1	Δt
$1 < V \leq 2$	1	2	$\Delta t/2$
$2 < V \leq 3$	2	3	$\Delta t/3$
$3 < V \leq 4$	3	4	$\Delta t/4$
$4 < V \leq 5$	4	5	$\Delta t/5$
...
$n < V \leq n + 1$	n	n + 1	$\Delta t/(n + 1)$

Tabela 3.2: Tabela com regras gerais para mudança de Δt .

No esquema com duas divisões do passo de tempo, ou seja, utilizando $\Delta t_{max} = \Delta t$ e $\Delta t_{min} = \Delta t/2$, não existem diferenças entre os dois algoritmos.

Como o algoritmo desta seção permite dividir o passo de tempo por 3, somente pode-se perceber as diferenças entre os algoritmos, Falk et al. (1998) e Tessmer (2000), comparando o caso com quatro divisões do passo de tempo, ou seja, para os quais utilizam-se a discretização temporal $\Delta t_{min} = \frac{\Delta t}{4}$ para a subregião de maior velocidade para ambos esquemas.

Conceitualmente, no primeiro, como a escolha da divisão do passo de tempo é limitada em dividir por potências na forma 2^i tem-se uma menor flexibilidade para as simulações em domínios onde os valores das velocidades possuem a razão $V = (v_{subreg}/v_{min}) \neq 2^i$, onde $i \in 0, 1, 2, 3, \dots, n$. No segundo, pode-se utilizar qualquer divisão do passo de tempo máximo.

Porém, a principal diferença é a forma com que passa-se a calcular as aproximações de u nos pontos extras (região de transição), pois é essa diferença que nos permite a flexibilidade na escolha do passo de tempo da subregião de maior velocidade. No esquema proposto em Tessmer (2000), utiliza-se sempre o instante de tempo t para o cálculo do valor de u , referente aos pontos da região de transição para os instantes de tempos intermediários. Varia-se, adequadamente, a discretização temporal em $\Delta t/4$, $2\Delta t/4$ e $3\Delta t/4$ nessa ordem. Na Fig. 3.15 apresenta-se um domínio 1D onde $v_2 > v_1$ no qual a estabilidade de cada região pode ser garantida com a utilização de $\Delta t_{max} = \Delta t$ e $\Delta t_{min} = \Delta t/4$. Nesta figura, como nas anteriores, tempo avança para baixo e, os quadrados pretos e brancos representam os pontos do domínio espacial discretizados. Os quadrados pretos são pontos situados na região com menor velocidade e que podem ser calculados com incremento de tempo Δt e os quadrados brancos são pontos da malha na região de maior

velocidade e que devem ser calculados com $\Delta t/4$.

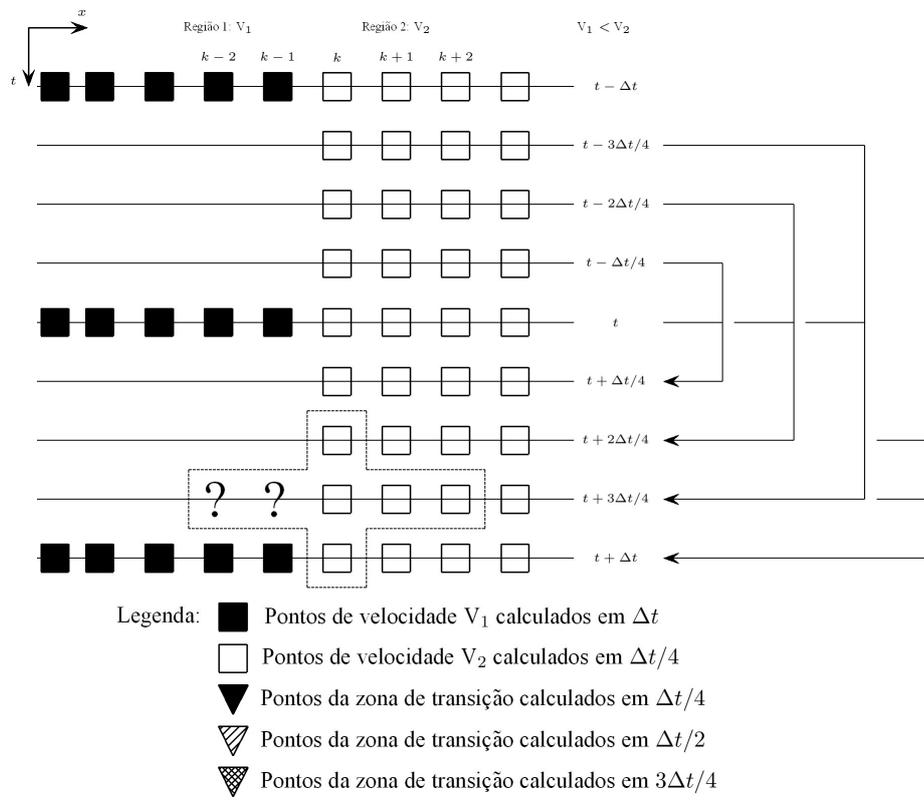


Figura 3.15: Esquema Tessmer 1D (Aproximação 2-4).

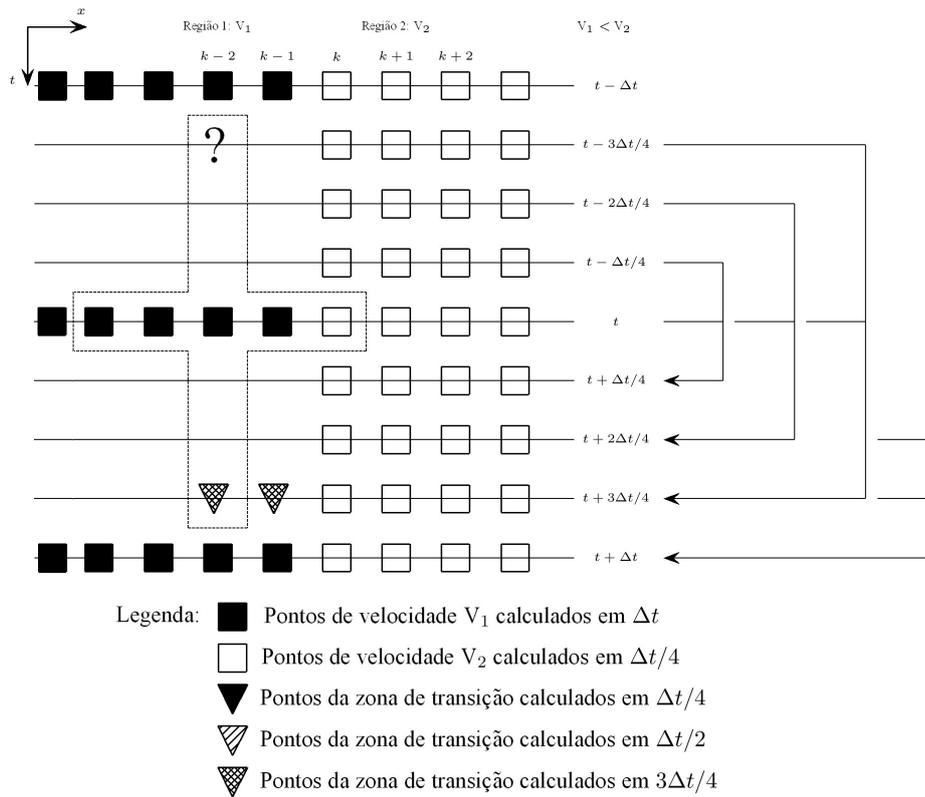


Figura 3.16: Esquema Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Pode-se notar na Fig. 3.15 que, como no algoritmo anterior, para se calcular o valor de u no ponto k no instante de tempo $t + \Delta t$, $u_k^{t+\Delta t}$, necessita-se de pontos extras na região de menor velocidade no instante de tempo intermediário $t + 3\Delta t/4$.

Diferentemente do proposto em Falk et al. (1998), para o cálculo do valor de u nesses pontos extras utilizam-se, conforme destacado na Fig. 3.16, os valores conhecidos dos instantes de tempos anteriores t e $t - 3\Delta t/4$, com um passo de tempo de $\Delta t_{int2} = 3\Delta t/4$.

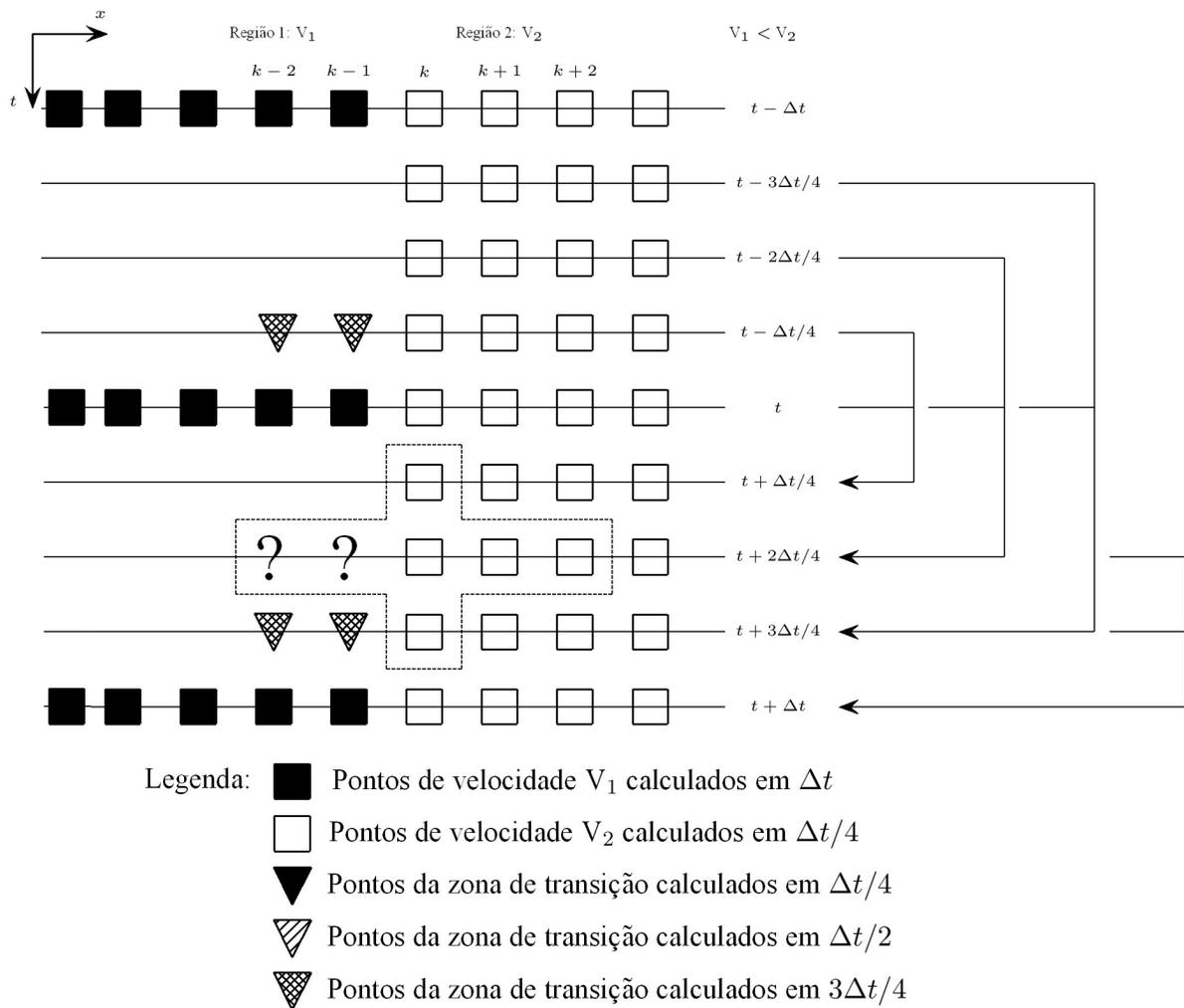


Figura 3.17: Esquema Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Calculados os valores de u nesses pontos extras pode-se notar, na Fig. 3.17, que, para se calcular o valor de u no ponto k , no instante de tempo $t + 3\Delta t/4$, $u_k^{t+3\Delta t/4}$, necessita-se de pontos extras na região de menor velocidade no instante de tempo intermediário $t + 2\Delta t/4$.

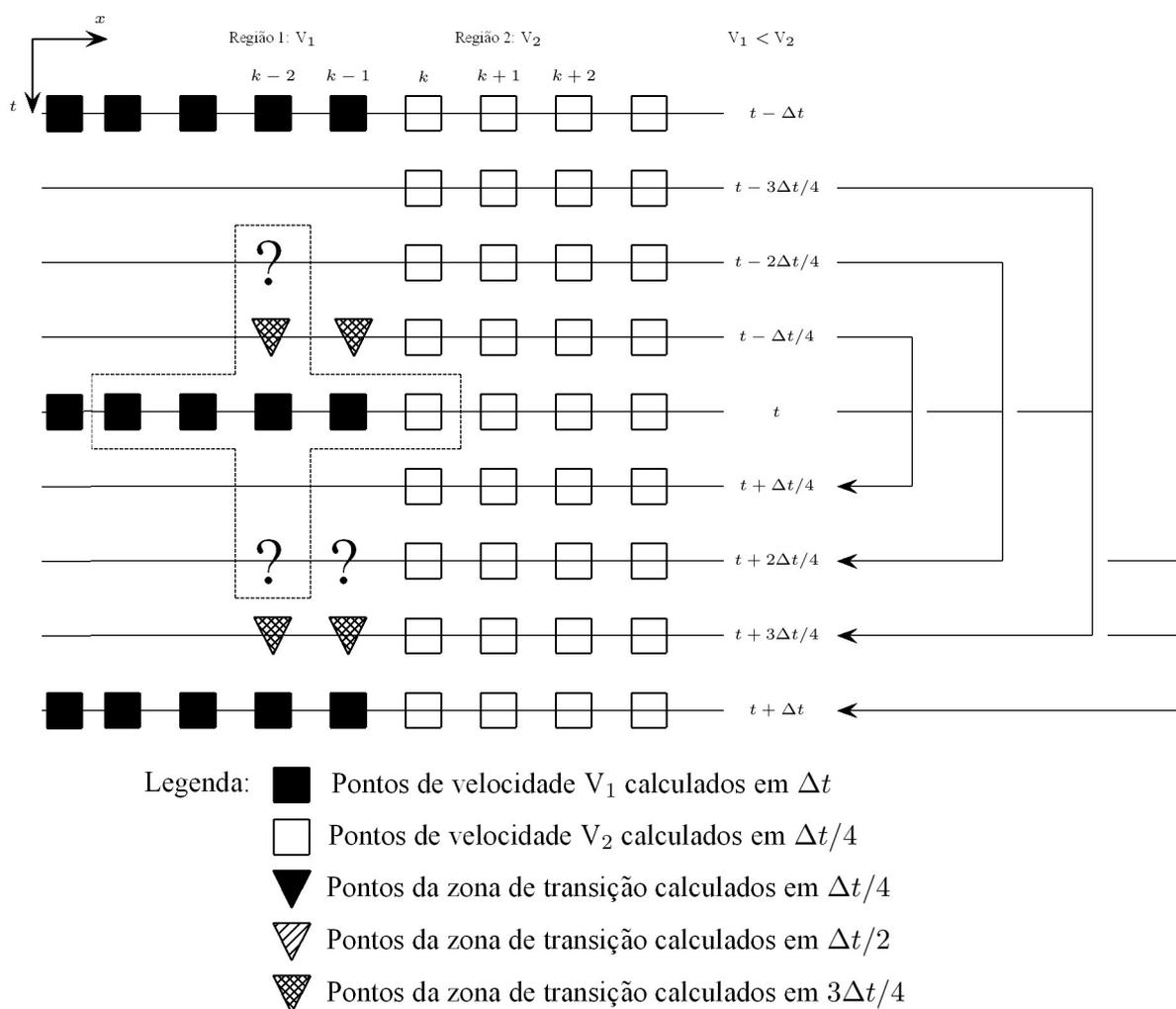


Figura 3.18: Esquema Tessmer 1D em $t + 2\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Para o cálculo do valor de u nesses pontos extras utiliza-se, conforme apresentado na Fig. 3.18, os valores conhecidos dos instantes de tempos anteriores t e $t - 2\Delta t/4$, com um passo de tempo de $\Delta t_{int1} = 2\Delta t/4$.

A Fig. 3.19, apresenta esses pontos extras calculados. Concluindo a construção da região de transição calcula-se, analogamente, o valor de u nos pontos extras em $t + \Delta t/4$, necessários para o cálculo de u no ponto k do instante de tempo $t + 2\Delta t/4$, $u_k^{t+\Delta t/4}$, utilizando os instantes de tempos t e $t - \Delta t/4$ e o passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$.

Finalmente a Fig. 3.20 apresenta o esquema Tessmer (2000) com todos os pontos extras necessários em sua região de transição para um problema em que se necessita a utilização de um passo de tempo mínimo igual ao maior passo de tempo dividido por 4, $\Delta t_{min} = \Delta t/4$.

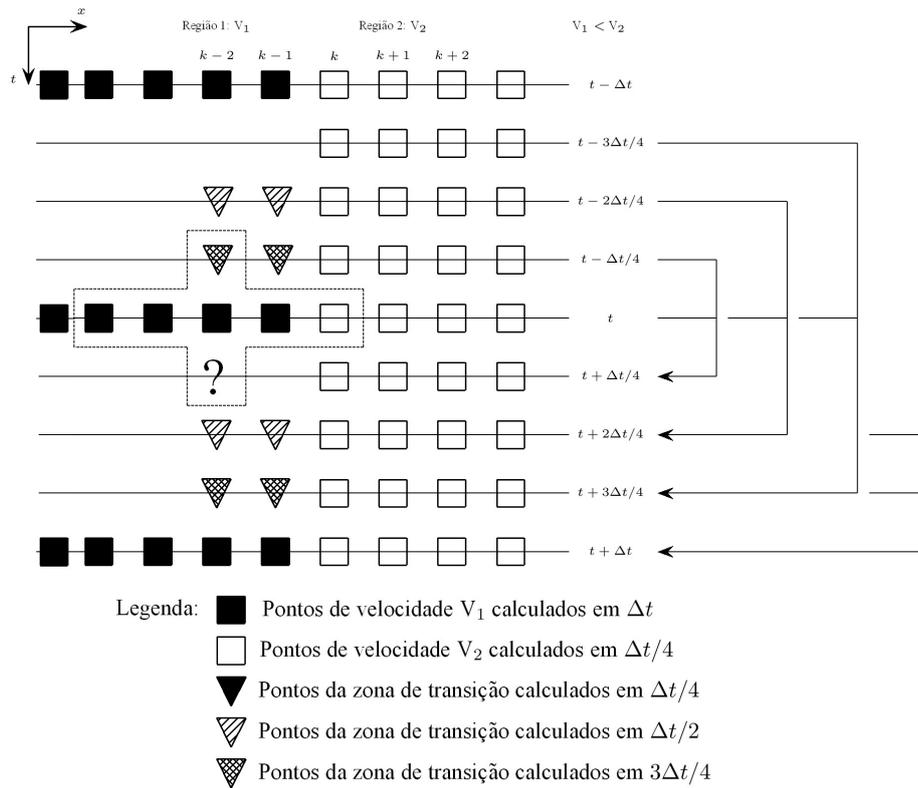


Figura 3.19: Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

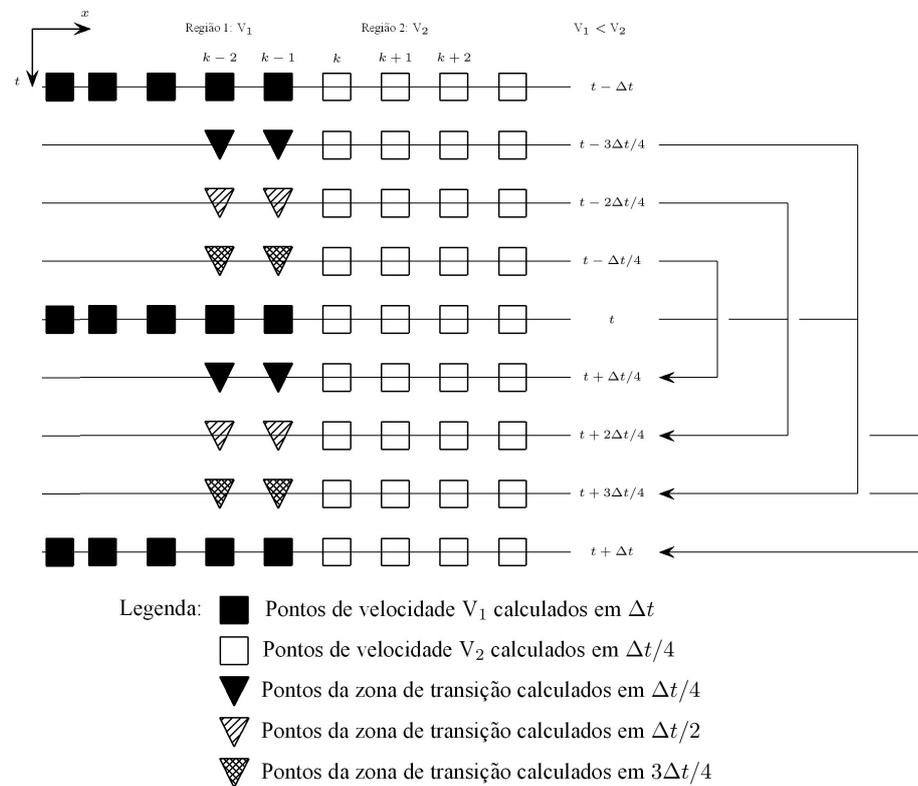


Figura 3.20: Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).

Para ilustrar o algoritmo proposto em Tessmer (2000) apresenta-se, a seguir, um passo a passo. Os pontos extras necessários para o cálculo do valor de u nos pontos da região de maior velocidade são representados pelos índices $k - 2$ e $k - 1$.

Passo 1: calculam-se os valores de u no instante de tempo $t + \Delta t$ (Fig. 3.21) da região de menor velocidade utilizando os instantes de tempos t e $t - \Delta t$.

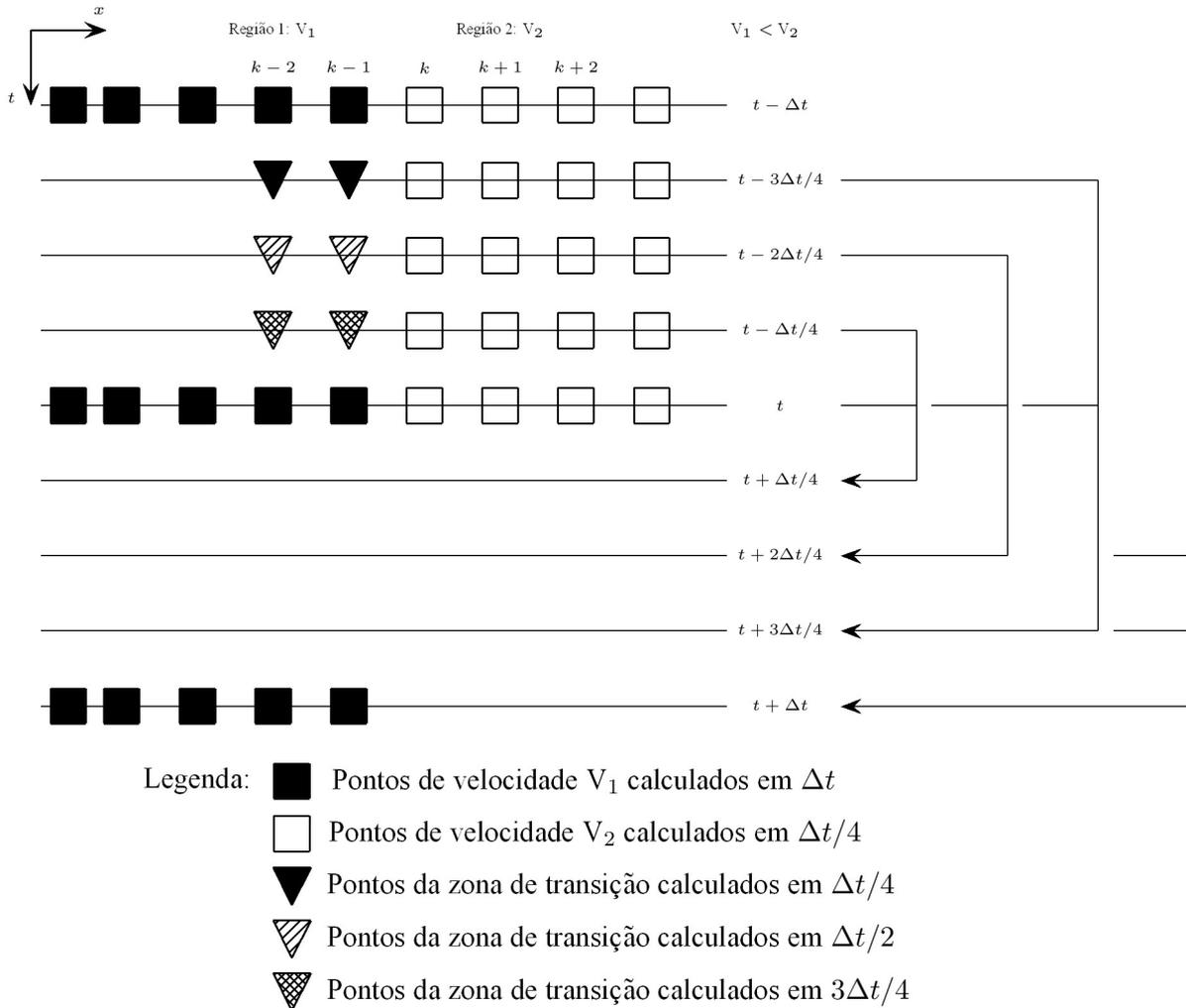


Figura 3.21: Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).

Passo 2: calculam-se os valores de u no instante de tempo $t + \Delta t/4$ (Fig. 3.22) a partir do ponto em $k - 2$ utilizando $\Delta t_{min} = \Delta t/4$. Neste passo estão os pontos extras da região de transição mais os pontos da região de maior velocidade.

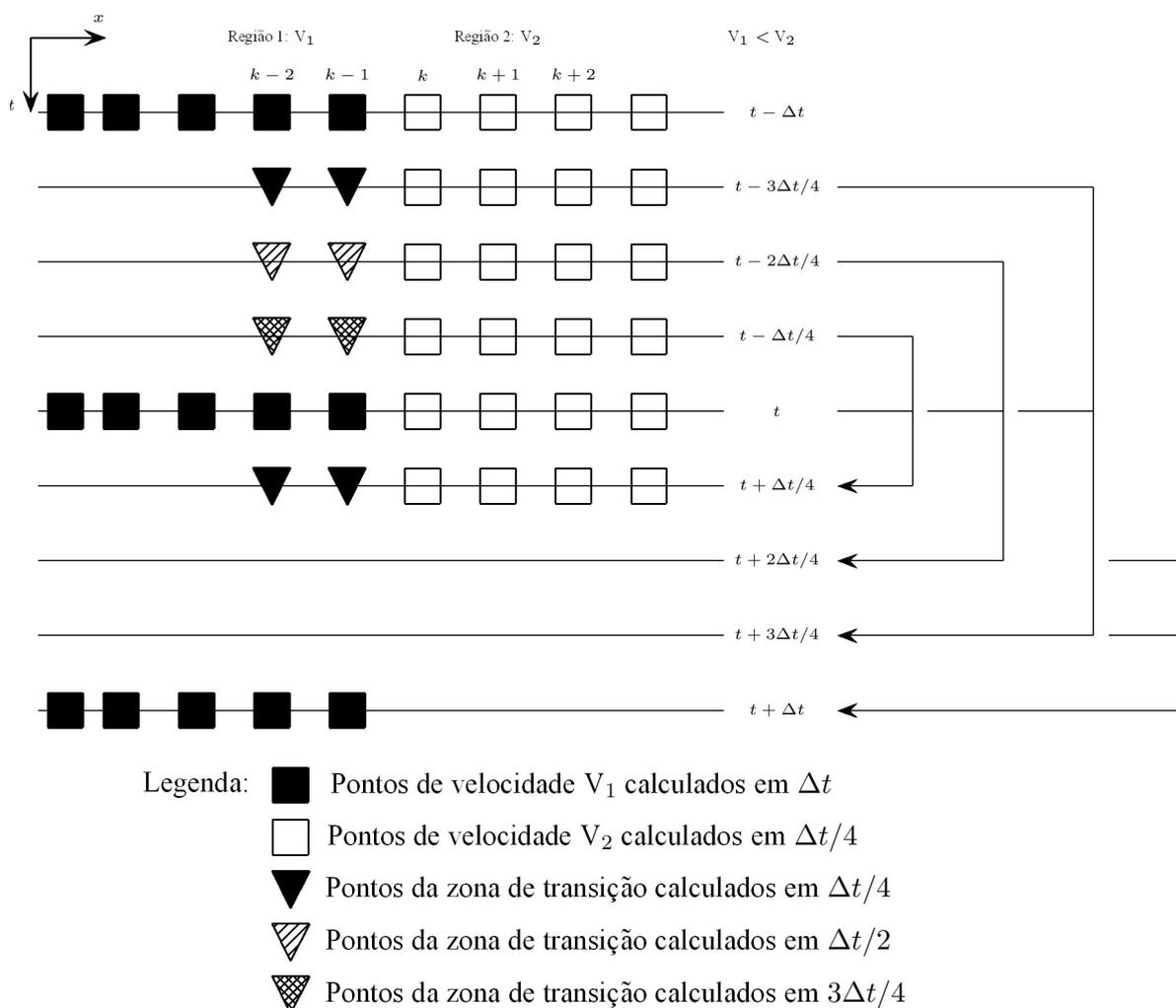


Figura 3.22: Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Os passos 3 e 4 serão divididos, cada um, em duas etapas de cálculo: pontos extras e os da região de maior velocidade.

Passo 3: calculam-se, neste passo, os valores de u nos pontos do instante de tempo intermediário $t + 2\Delta t/4$ conforme ilustrado na Fig. 3.23.

Passo 3.1: utilizam-se os instantes de tempos t e $t - 2\Delta t/4$ para o cálculo do valor de u nos pontos extras com a discretização $\Delta t_{int1} = \Delta t/2$.

Passo 3.2: calculam-se o valor de u nos pontos da região de maior velocidade utilizando o passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$ utilizando os instantes de tempos $t + \Delta t/4$ e t .

Passo 4: calcula-se, neste passo, o valor de u nos pontos do instante de tempo intermediário $t + 3\Delta t/4$ conforme ilustrado na Fig. 3.24.

Passo 4.1: utilizam-se os instantes de tempos t e $t - \Delta t/4$ para o cálculo do valor de u nos pontos extras com a discretização $\Delta t_{int2} = 3\Delta t/4$.

Passo 4.2: calculam-se os valores de u nos pontos da região de maior velocidade utilizando o passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$ utilizando os instantes de tempos $t + 2\Delta t/4$ e $t + \Delta t/4$.

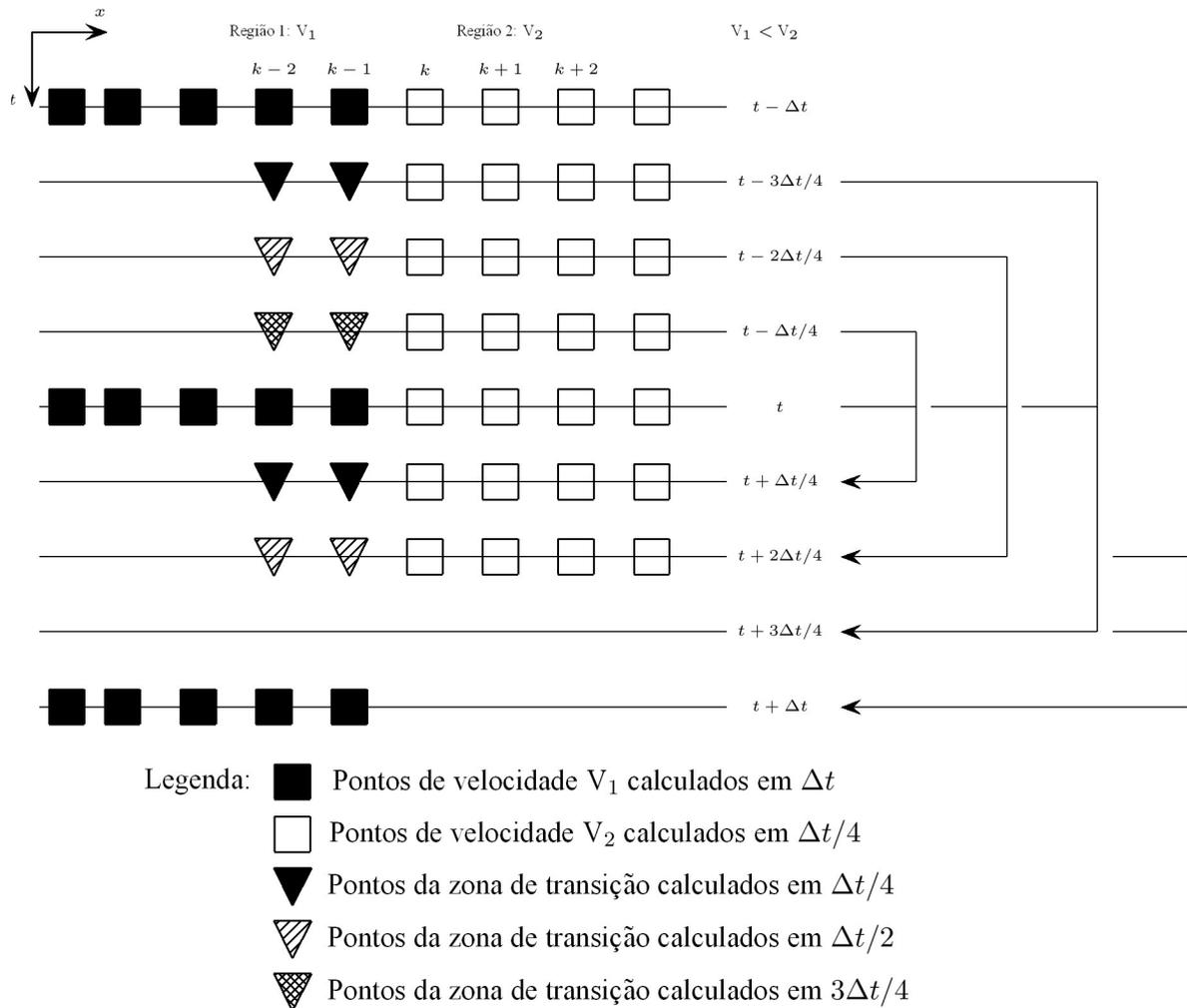


Figura 3.23: Esquema Tessmer 1D em $t + 2\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

Passo 5: finalizando, conforme a Fig. 3.25, calcula-se o valor de u nos pontos do instante de tempo $t + \Delta t$, para a região de maior velocidade, iniciado a partir do ponto k (interface da velocidade) utilizando o passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$.

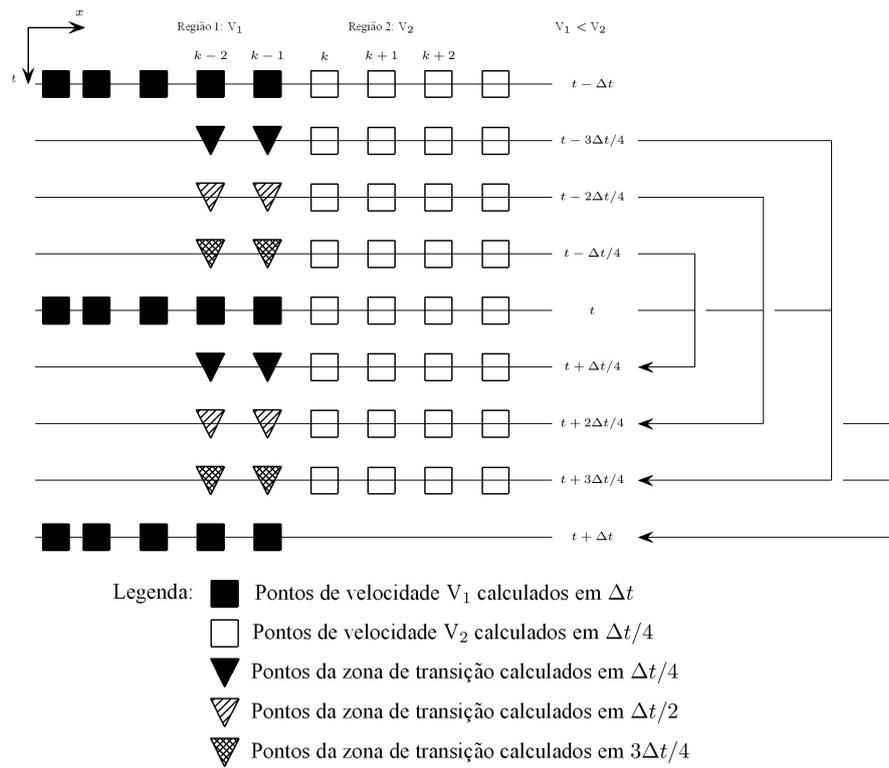


Figura 3.24: Esquema Tessmer 1D em $t + 3\Delta t/4$ (Aproximação 2-4).

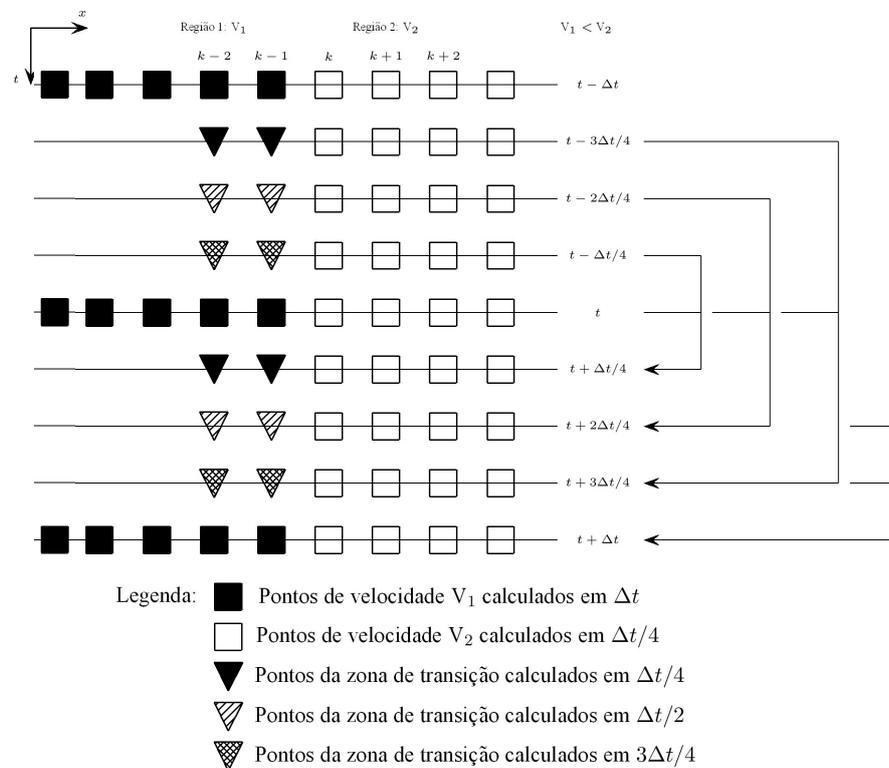


Figura 3.25: Esquema Tessmer 1D em $t + \Delta t$ (Aproximação 2-4).

Comparando as ilustrações da Fig. 3.14 com a Fig. 3.25, pode-se evidenciar as diferenças, entre os algoritmos propostos por Falk et al. (1998) e Tessmer (2000), relativas tanto à forma de construção dos pontos extras necessários nos instantes de tempos intermediários na região de transição, quanto à quantidade desses pontos extras. Outra diferença que deve-se ressaltar está nos passos de tempo utilizados nessa construção. No primeiro utilizam-se apenas dois passos de tempo, $\Delta t/4$ e $\Delta t/2$ enquanto que, no segundo, utilizam-se três passos de tempos $\Delta t/4$, $2\Delta t/4$ e $3\Delta t/4$

Além disso, pode-se observar na Fig. 3.26, um exemplo no qual $2 < (v_{subreg}/v_{min}) \neq 3$. Nesse exemplo a construção da região de transição é feita de forma análoga ao apresentado nessa seção. Aparece a primeira grande diferença e vantagem do algoritmo Tessmer (2000). Neste caso, pode-se utilizar os passos de tempo $\Delta t_{max} = \Delta t$ e $\Delta t_{min} = \Delta t/3$ cuja escolha das discretizações temporais não são possíveis na proposta do algoritmo Falk et al. (1998).

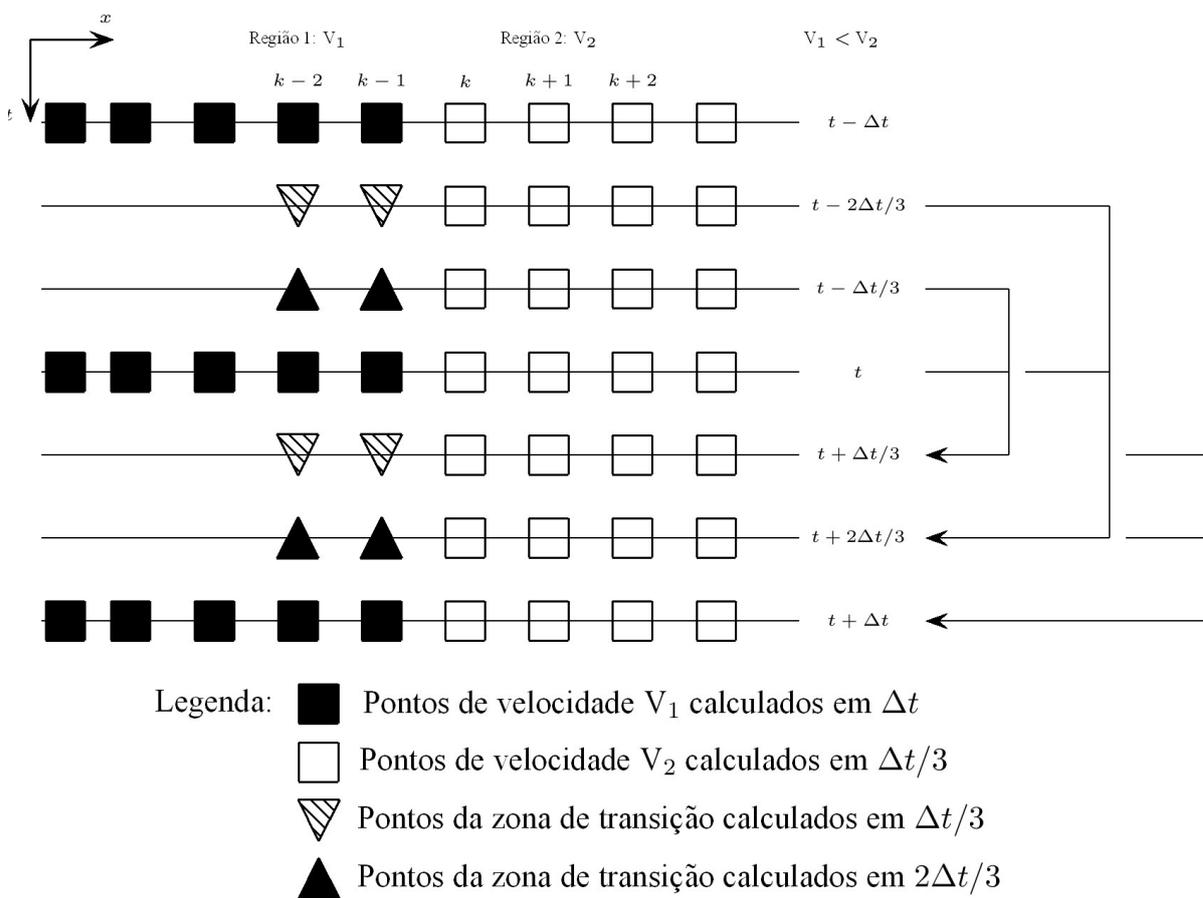


Figura 3.26: Esquema Tessmer 1-D para uma aproximação 2-4 com três divisões do passo de tempo.

Capítulo 4

Exemplos numéricos

Para testar os algoritmos de adaptatividade temporal para a equação da onda acústica apresentados no Capítulo 3 foram utilizados domínios uni e bidimensionais com condição de contorno de Dirichlet. Os testes realizados em domínios $1D$, foram feitos com o objetivo de entender o comportamento dos algoritmos Falk et al. (1998) e Tessmer (2000) e validar as respectivas implementações. Apresentam-se, nesse capítulo, somente os resultados dos testes em domínios $2D$. Nestes exemplos, para testar os algoritmos, utilizam-se discretizações temporais tanto próximas ao limite de estabilidade quanto aquelas distantes deste limite, sugeridas nas aplicações de geofísica conforme citado em Bulcão (2004).

Para isso, apresenta-se na Seção 4.1 o problema da Equação da onda acústica a ser resolvido. Na Seção, 4.2, são apresentadas as discretizações utilizadas e, por fim, na Seção 4.3 os resultados das simulações para o caso bidimensional são apresentados.

4.1 O problema a ser resolvido

Resolve-se, neste trabalho a equação da onda acústica para um problema bidimensional ($2D$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (4.1)$$

com $u(x, y, 0) = f(x, y)$ e $u_\Gamma = h(\Gamma, t)$, $\forall (x, y) \in \Omega$ e $t > 0$ onde $u = u(x, y, t)$ é uma função da posição e do tempo que descreve o comportamento da onda e c a velocidade de propagação da onda num dado meio, o domínio espacial utilizado $\Omega = \{(x, y) \mid 0m \leq x \leq 6.000m \text{ e } 0m \leq y \leq 6.000m\}$ e Γ representa a fronteira do Ω , ou seja, o contorno do domínio.

Neste trabalho utilizam-se domínios heterogêneos e, como campo de velocidades, utilizou-se o apresentado na Fig. 4.1, onde a interface de velocidade está em $x = 3.250m$. Na subregião de menor velocidade utilizou-se $c = v_1 = 750m/s$. Para a subregião de maior velocidade tem-se $c = v_2$ sempre com $v_2 > v_1$. Este valor será apresentado nas respectivas subseções de resultados.

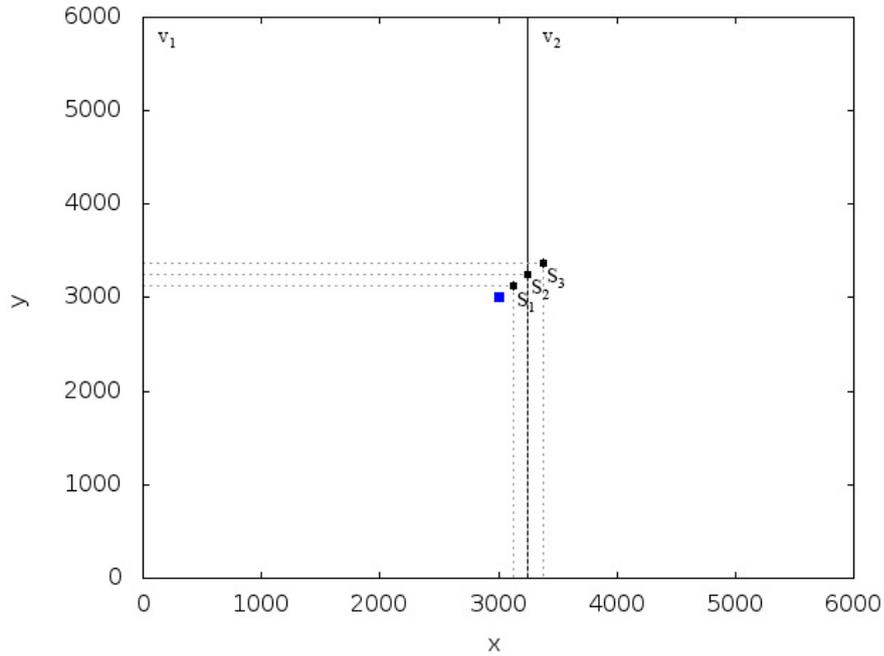


Figura 4.1: Campo de velocidades - Domínio bidimensional

Nos diversos resultados são apresentados sismogramas nos pontos S_1 , na subregião de menor velocidade, S_2 , na interface da velocidade, e S_3 na subregião de maior velocidade, com $x_1 = y_1 = 3.125m$, $x_2 = y_2 = 3.250m$ e $x_3 = y_3 = 3.375m$, respectivamente.

(i) A condição inicial utilizada é dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{12800\pi} e^{\left(\frac{-(x^2+y^2)}{12800}\right)} \quad (4.2)$$

e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \forall x, y$. A Figura 4.2 apresenta a solução de $f(x, y)$ em $y = 3.000m$.

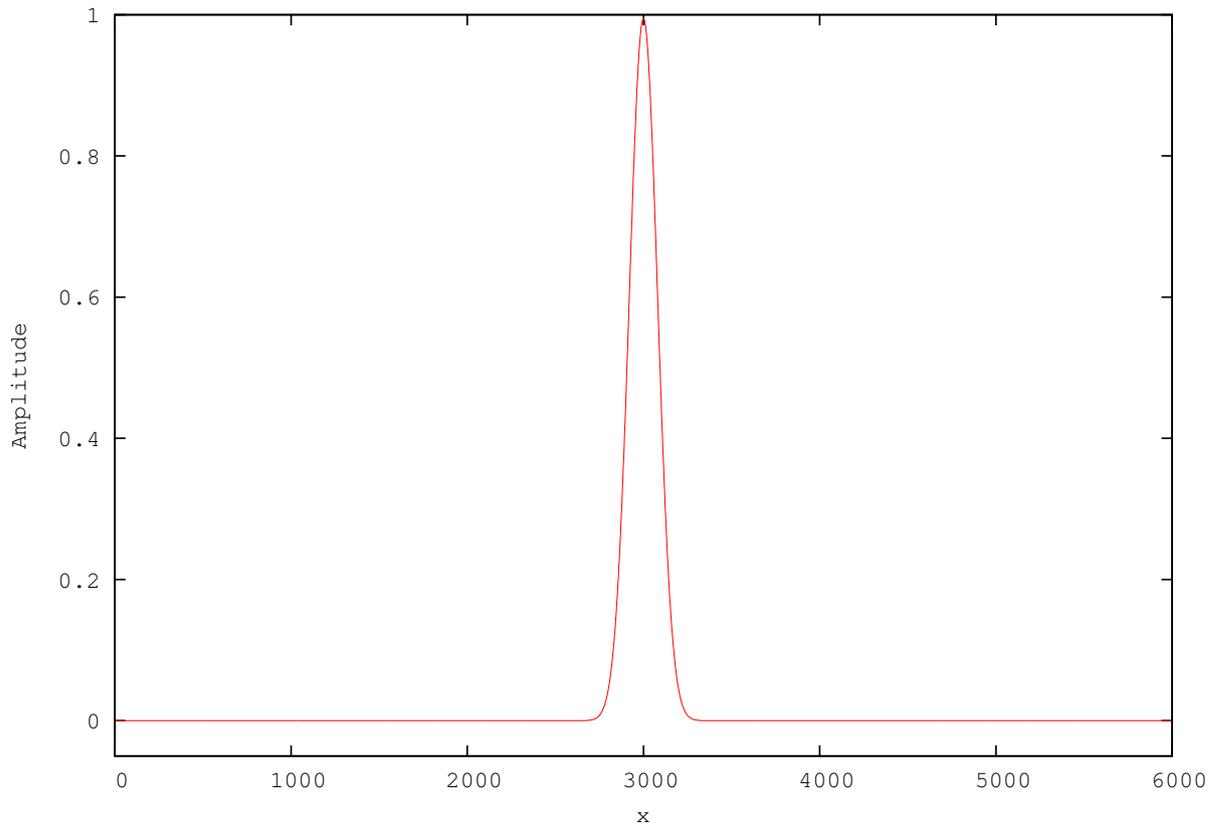


Figura 4.2: Condição inicial (Eq. 4.2)

(ii) Como condição de contorno utilizou-se a Condição de Dirichlet que especifica, *a priori*, a amplitude nas bordas do domínio considerado. Em nosso trabalho utilizou-se no contorno, Γ , o valor $u(\Gamma, t) = 0, t > 0$.

4.2 Discretizações

Neste trabalho, que tem por objetivo testar o comportamento dos esquemas adaptativos utiliza-se o critério apresentado nas Eq. 4.3 e 4.4, sugerido em Bulcão (2004).

$$\Delta t_{max} \leq \frac{\Delta h}{\beta v_{min}} \quad (4.3)$$

$$\Delta t_{min} \leq \frac{\Delta h}{\beta v_{max}} \quad (4.4)$$

onde:

Δh é o espaçamento dos pontos da malha. Neste trabalho a *malha* é regular, ou seja,

$$\Delta x = \Delta y = \Delta h$$

v_{min} e v_{max} são, respectivamente, a velocidade mínima e máxima de propagação do campo de velocidades simulado;

β é o parâmetro que corresponde ao número de passos no tempo necessário para a frente de onda percorrer uma distância equivalente ao espaçamento entre os pontos da malha, considerando a maior velocidade de propagação do meio;

Δt_{min} é o passo de tempo que garante a estabilidade do método nas simulações numéricas.

Δt_{max} é o passo de tempo principal utilizado nos algoritmos adaptativos. Garante a estabilidade do método nas simulações numéricas para a região de menor velocidade. Este valor será ajustado localmente, para regiões de maior velocidade, conforme cada algoritmo de adaptatividade temporal de forma a garantir a estabilidade do método nesses subdomínios.

A escolha do valor β , utilizado na expressão da Eq. 4.4, está relacionada ao limite de estabilidade do método e determina a discretização temporal, Δt , a ser utilizada. A escolha desse parâmetro determina o quanto está se trabalhando abaixo desse limite. Ao se adotar $\beta = 4$, conforme usualmente utilizado nas aplicações de Geofísica, como por exemplo em Bulcão (2004) para um operador de 2ª ordem temporal, significa que as simulações estão a um quarto do respectivo limite de estabilidade do método.

Com a utilização do algoritmo com passos de tempo adaptativos adota-se a Eq. 4.3 que determina o maior incremento de tempo que pode ser utilizado para a região de menor velocidade. Esse valor do Δt será ajustado, quando houver necessidade, segundo os critérios expostos no Capítulo 3.2 para cada subregião, conforme a relação $V = v_{subreg(i)}/v_{min}$.

Nos testes realizados utilizam-se várias discretizações espaciais desde $\Delta x = 40m$ refinando até $\Delta x = 2,5m$. Como o nosso objetivo é comparar o método adaptativo com o método convencional adotou-se $\Delta h = \Delta x = \Delta y = 40m$ para todas as simulações deste trabalho.

4.3 Resultados 2D

Conforme descrito no Capítulo 3, durante este trabalho foram testados os algoritmos adaptativos Falk et al. (1998) e Tessmer (2000). Inicialmente apresentam-se os resultados das simulações como são, usualmente, utilizados nas aplicações da Geofísica, ou seja, longe

do limite de estabilidade dos respectivos métodos conforme apresentado na Subseção 2.2.5. Trabalha-se com uma discretização temporal para simular a um quarto do respectivo limite de estabilidade.

Na Subseção 4.3.2 apresentam-se os resultados nos quais a subregião de maior velocidade requer duas divisões do passo de tempo e na Subseção 4.3.3 os resultados nos quais a subregião de maior velocidade requer quatro divisões do passo. Para todos as comparações realizadas neste trabalho utiliza-se o estabelecido a seguir.

4.3.1 Critério de comparação dos resultados

Para a comparação de resultados das simulações dos métodos adaptativos apresentam-se tanto resultados em uma seção ($y = 3.000m$), quanto sismogramas em três pontos do domínio: S_1 , S_2 e S_3 4.1. Esses resultados são comparados de duas formas:

- (i) método adaptativo com o método convencional, ou seja, com Δt constante.
- (ii) resultado do método adaptativo com um resultado adotado como referência. Para essa escolha foram realizados testes no limite de estabilidade para as aproximações de diferenças finitas 2-2, 2-4 e 2-6. Nestes testes as discretizações foram sendo refinadas, tanto a espacial quanto a temporal, até que seus resultados não apresentassem diferenças visuais perceptíveis. A discretização espacial utilizada para esse resultado de referência foi $\Delta x = \Delta y = 2,50$.

Foram obtidos dois resultados de referência: problema (a) para quando $v_1 = 750m/s$ e $v_2 = 1.500m/s$ e problema (b) quando $v_1 = 750m/s$ e $v_2 = 3.000m/s$

A Tabela 4.1 e a Fig. 4.3 apresentam respectivamente: as discretizações temporais do resultado de referência para o problema (a) e esse resultado em $y = 3.000m$, em $t = 1,50s$.

Esquema	N° Courant Limite	Δt
2 – 2	0,707	0,001178
2 – 4	0,610	0,001016
2 – 6	0,575	0,000958

Tabela 4.1: Tabela com a discretização temporal - Problema (a)

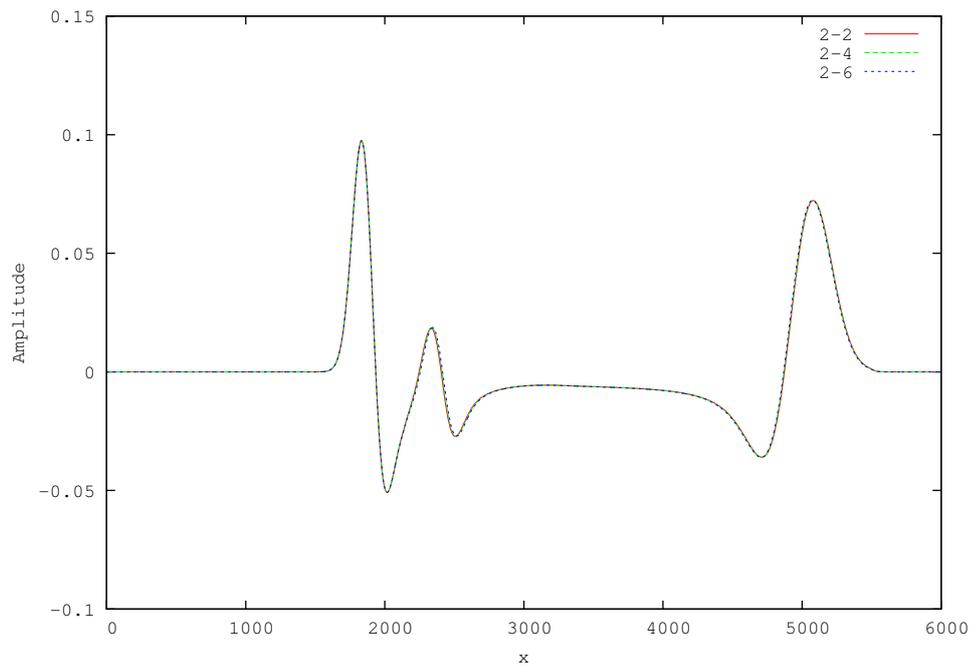


Figura 4.3: Convencional (2-2, 2-4 e 2-6) nos respectivos limite de estabilidade dos métodos - problema (a).

Analogamente, apresentam-se na Tabela 4.2 as discretizações temporais para o problema (b). Na Fig. 4.4 a solução em $y = 3.000m$ para $t = 0, 90s$.

Esquema	N° Courant Limite	Δt
2 - 2	0,707	0,000589
2 - 4	0,610	0,000508
2 - 6	0,575	0,000479

Tabela 4.2: Tabela com a discretização temporal - Problema (b)

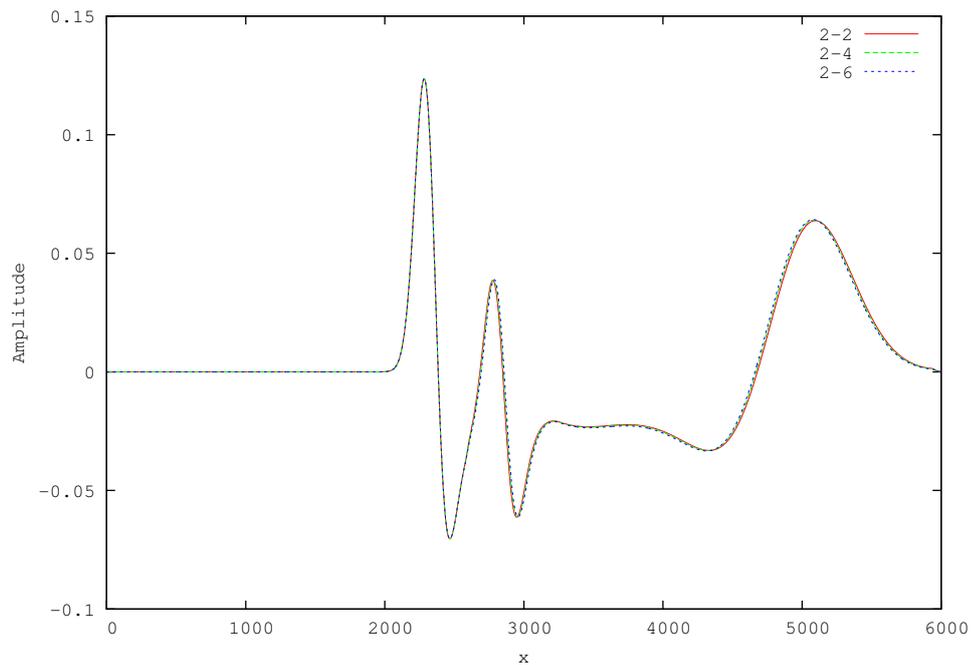


Figura 4.4: Convencional (2-2, 2-4 e 2-6) nos respectivos limite de estabilidade dos métodos - problema (b).

Portanto, adotam-se estes resultados convencionais como resultado de referência para as comparações deste trabalho.

4.3.2 Duas divisões do passo de tempo

Os algoritmos Falk et al. (1998) e Tessmer (2000) são equivalentes para duas divisões do passo de tempo e, por isso, apresenta-se, nesta subseção, apenas o resultado do primeiro.

Trabalha-se com o campo de velocidades apresentado na Fig. 4.1 com $v_1 = 750m/s$ e $v_2 = 1.500m/s$ conforme mostrado na Fig. 4.5.

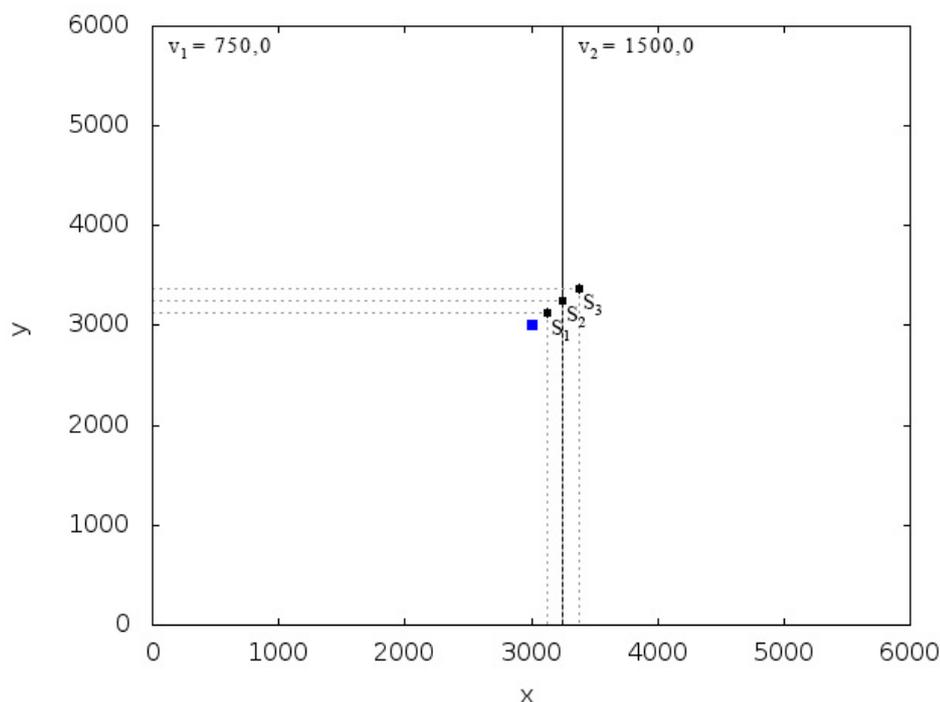


Figura 4.5: Campo de velocidades - Domínio bidimensional

Na Tabela 4.3 apresentam-se as discretizações utilizadas nas simulações do esquema convencional e do esquema de passos de tempo ajustados localmente (método adaptativo). A discretização temporal utilizada está a um quarto do limite de estabilidade de cada um dos esquemas (2-2, 2-4 e 2-6).

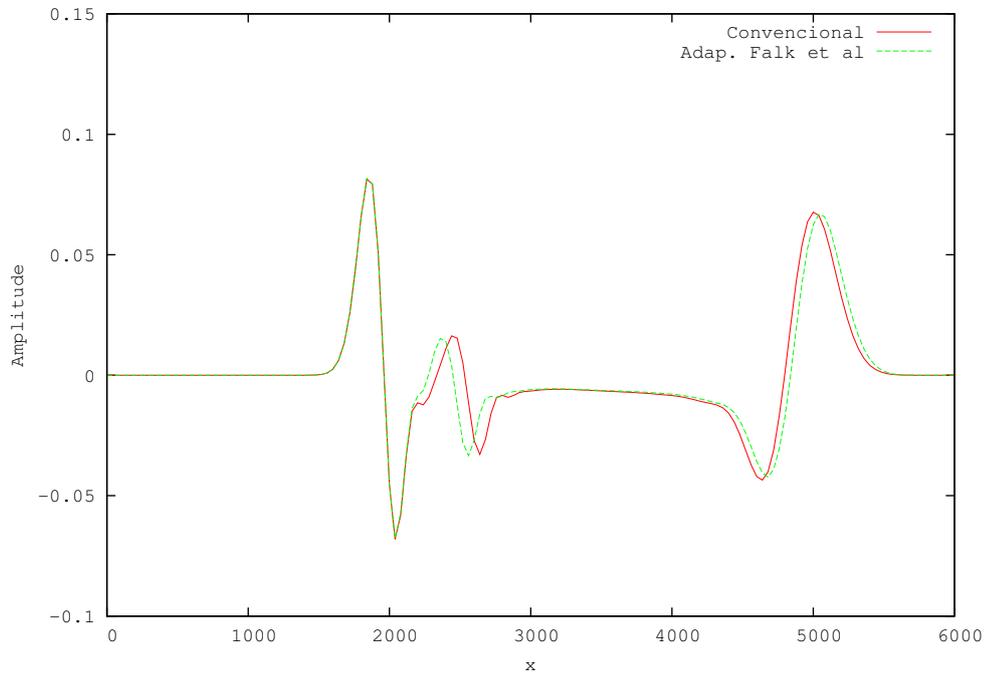
No esquema adaptativo $\Delta t = \Delta t_{max}$ é o incremento de tempo utilizado no subdomínio com menor velocidade (v_1) e com $\Delta t = \Delta t_{min}$, no subdomínio de maior velocidade (v_2). O método convencional utiliza, para todo o domínio, $\Delta t = \Delta t_{min}$.

Esquema	N° Courant Limite	N° Courant utilizado	Δt_{min}	Δt_{max}
2 – 2	0,707	0,177	0,004714	0,009427
2 – 4	0,610	0,155	0,004066	0,008133
2 – 6	0,575	0,145	0,003834	0,007667

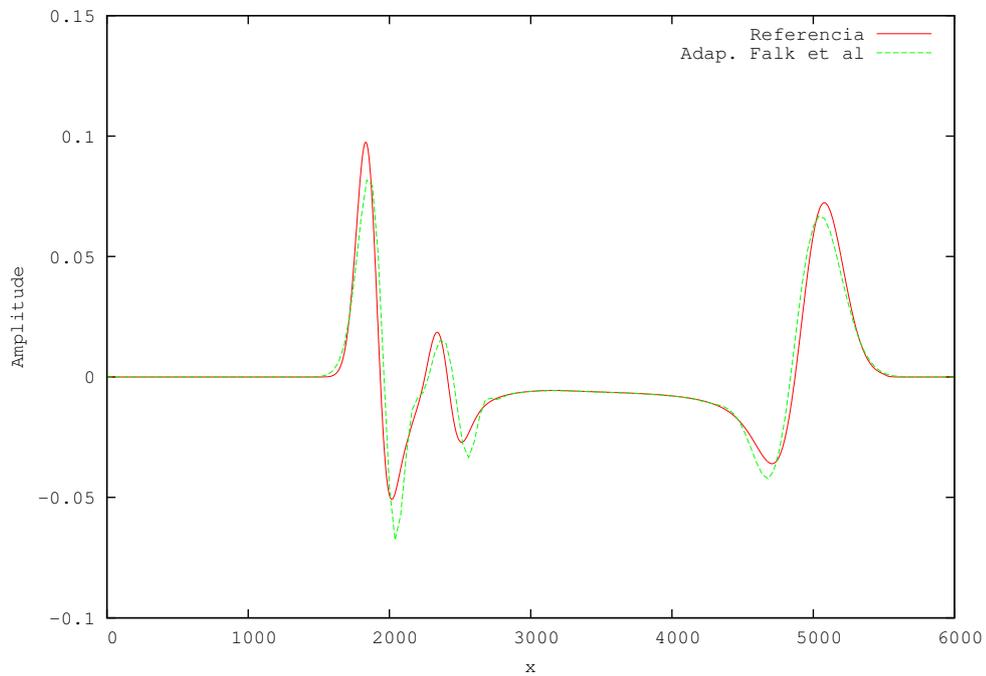
Tabela 4.3: Tabela - Passo de tempo - Problema (a)

A fim de analisar o esquema com duas divisões do passo de tempo, apresentam-se nas Figuras 4.6, 4.7 e 4.8, resultados em $y = 3000m$ (corte) no instante de tempo $t = 1,50s$ para aproximações 2-2, 2-4 e 2-6. Nas Figuras (a) tem-se as soluções com passos de tempo ajustados localmente comparada com o respectivo resultado convencional enquanto que,

nas Figuras (b), as soluções com passos de tempo ajustados localmente comparada com o resultado adotado como referência.

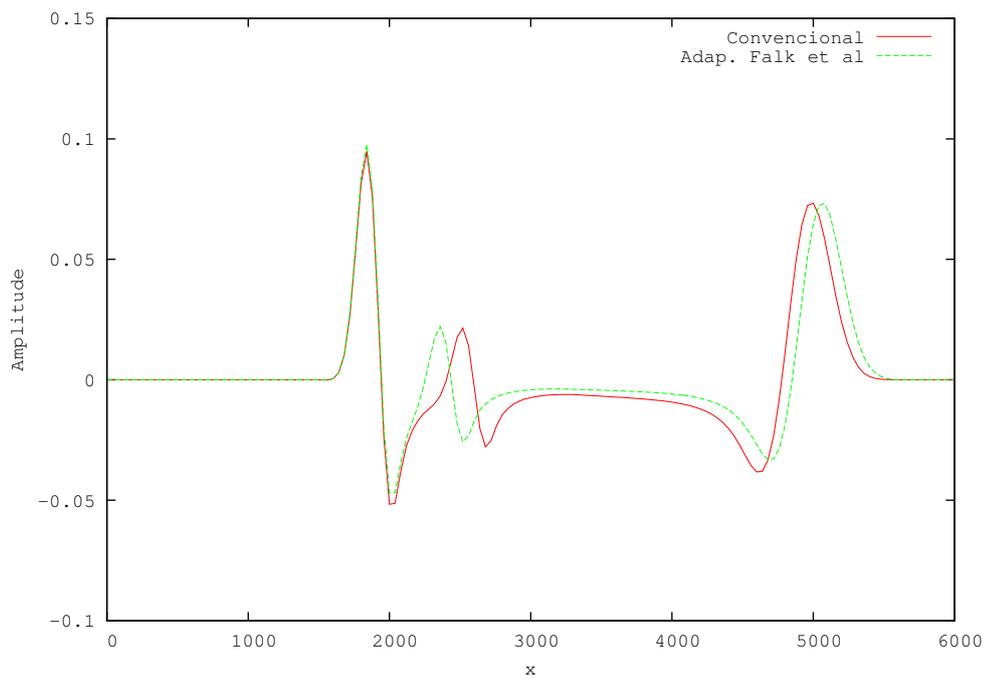


(a)

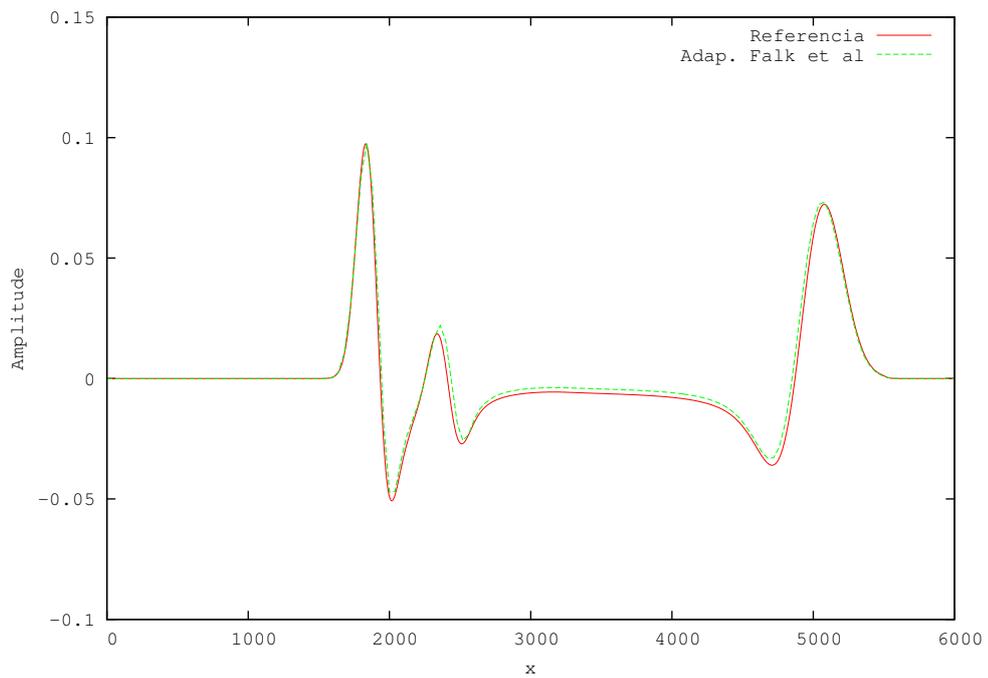


(b)

Figura 4.6: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,50s$ (aproximação 2-2). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

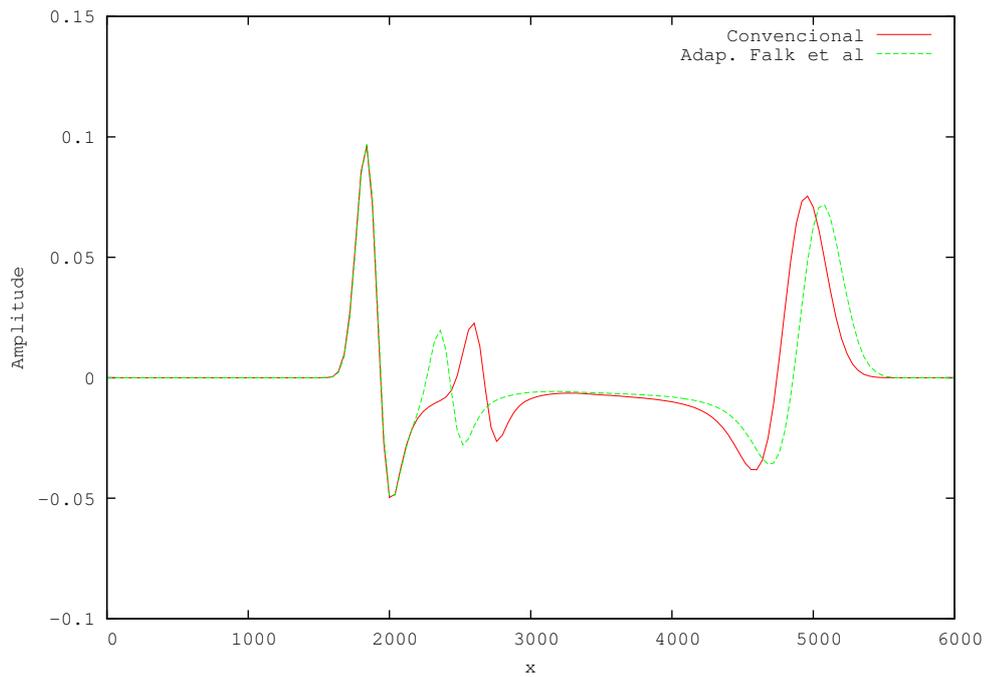


(a)

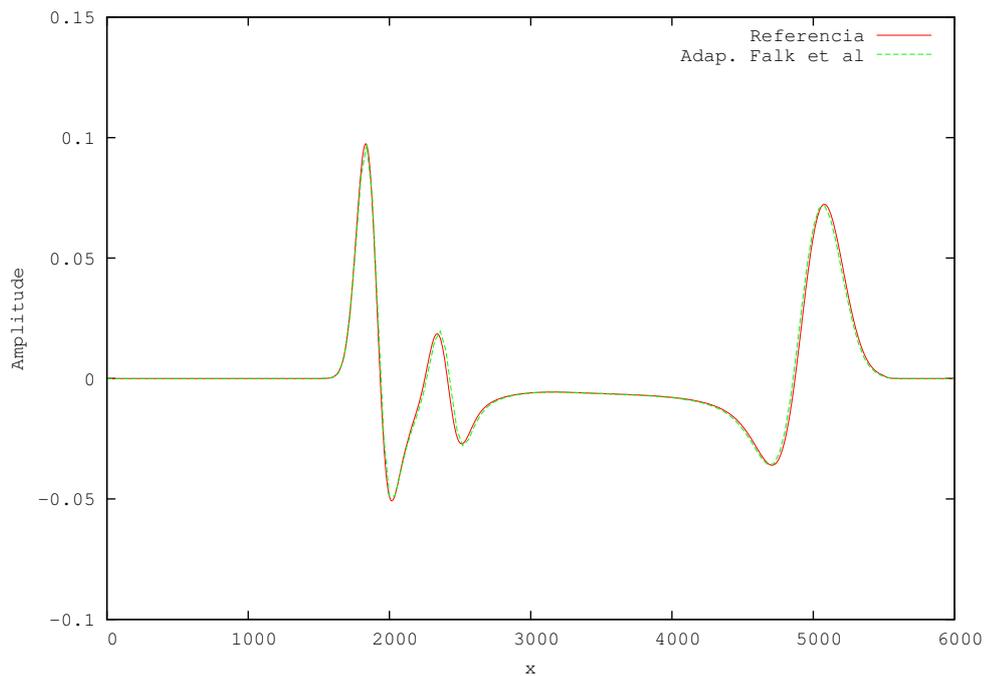


(b)

Figura 4.7: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,50s$ (aproximação 2-4). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.



(a)

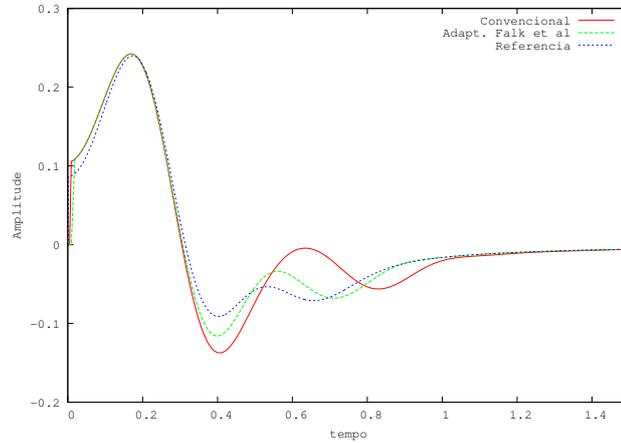


(b)

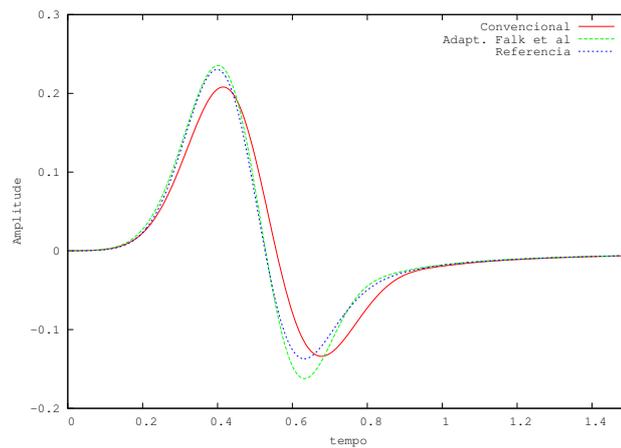
Figura 4.8: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,50s$ (aproximação 2-6). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

Nesses gráficos pode-se observar que, mesmo utilizando uma discretização espacial menos refinada, são pequenas as diferenças entre as soluções, ou seja, o resultado adaptativo reproduz de forma satisfatória o resultado convencional. Tal fato pode ser corroborado

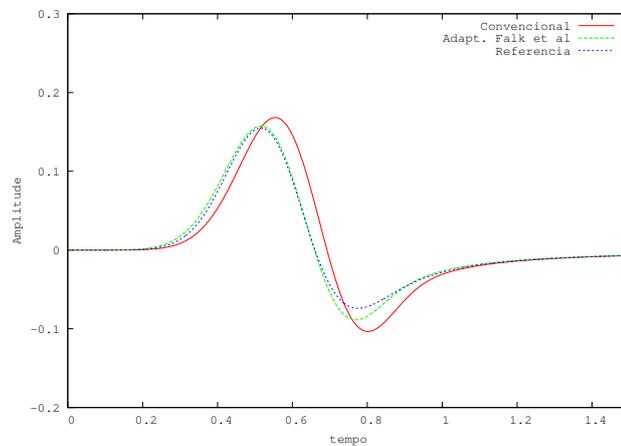
ao analisar os sismogramas das Figuras 5.11, 5.12 e 5.13 (a), (b) e (c). Em todos os resultados pode-se observar que o resultado do esquema com passos de tempos ajustados localmente está mais próximo do resultado adotado como referência do que o respectivo resultado do método convencional.



(a)

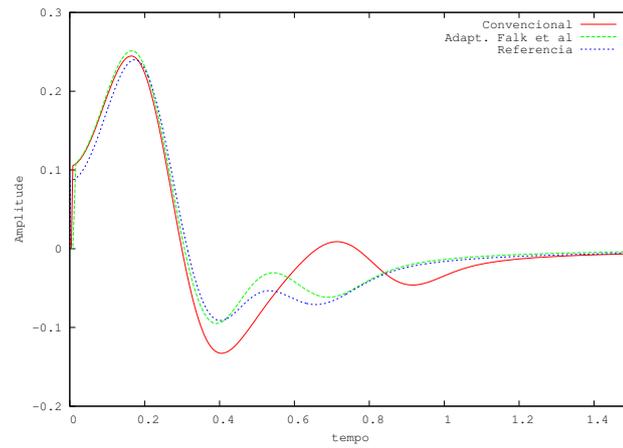


(b)

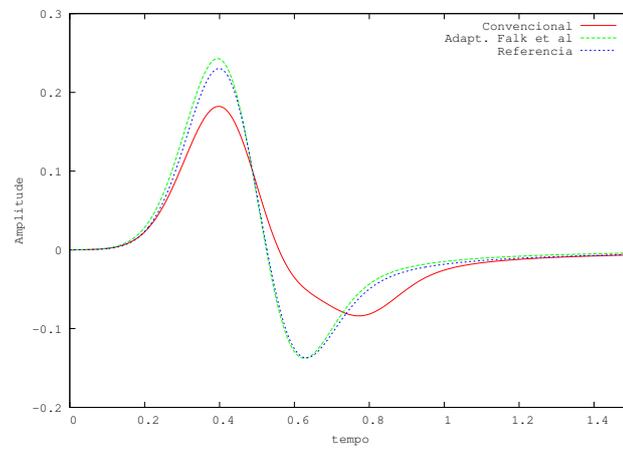


(c)

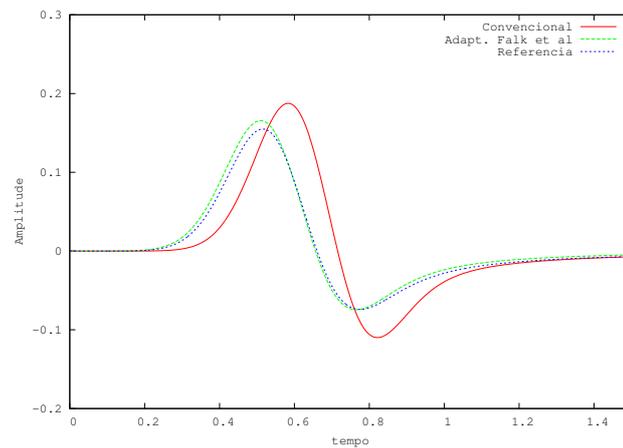
Figura 4.9: Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)

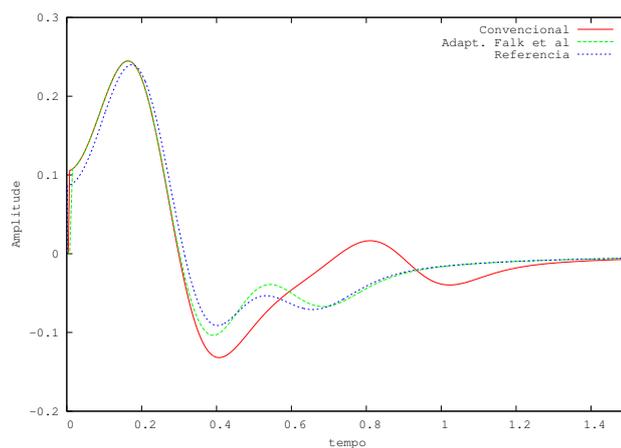


(b)

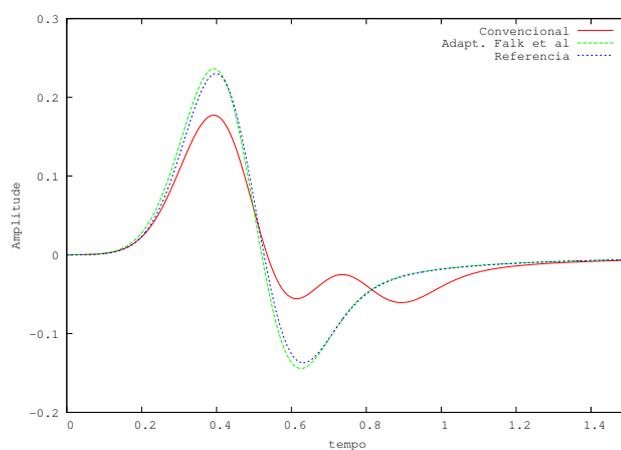


(c)

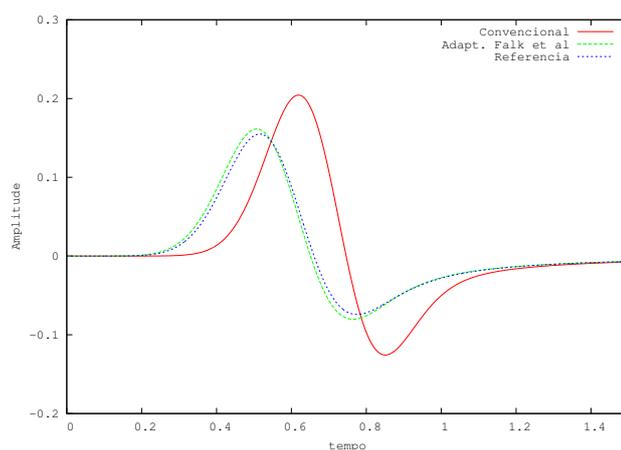
Figura 4.10: Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)



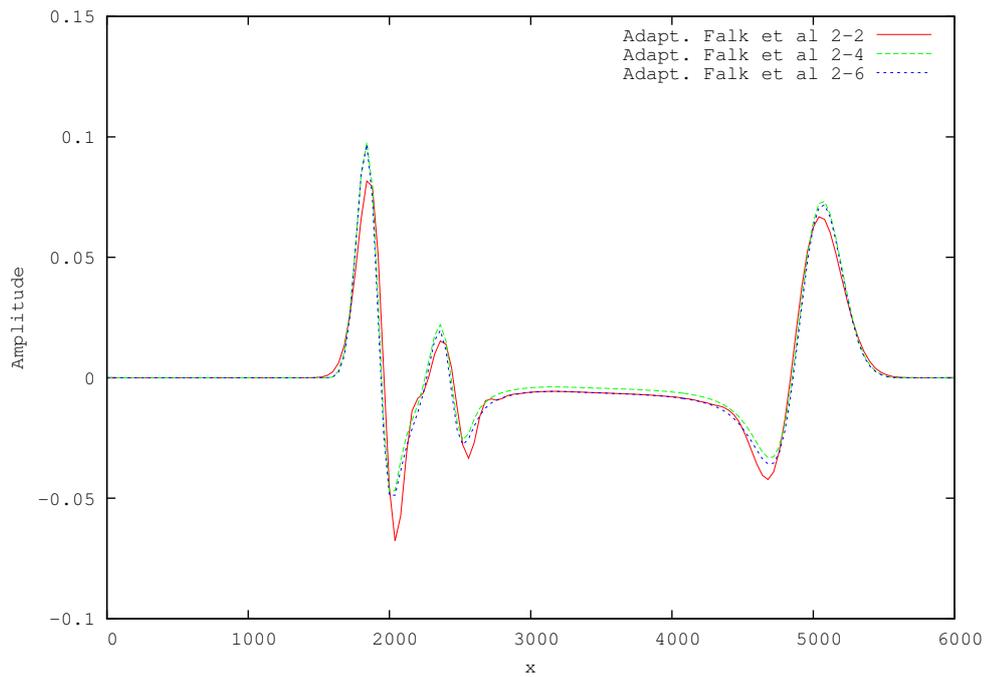
(b)



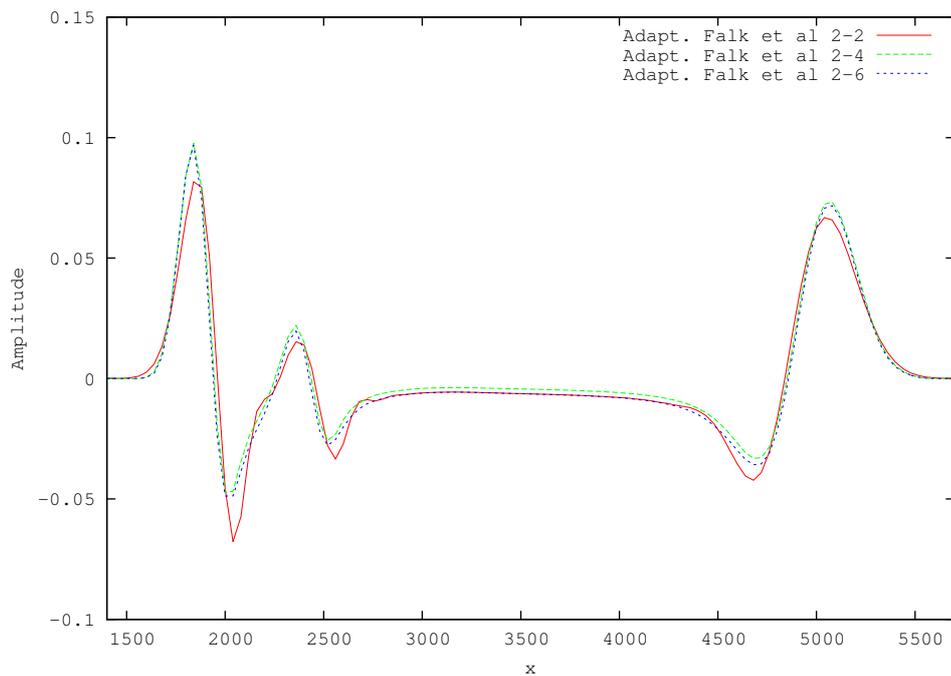
(c)

Figura 4.11: Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .

A título de comparação apresentam-se na Figura 4.12 os resultados do método adaptativo para as aproximações 2-2, 2-4 e 2-6 no instante de tempo ($t = 1, 50s$).



(a)



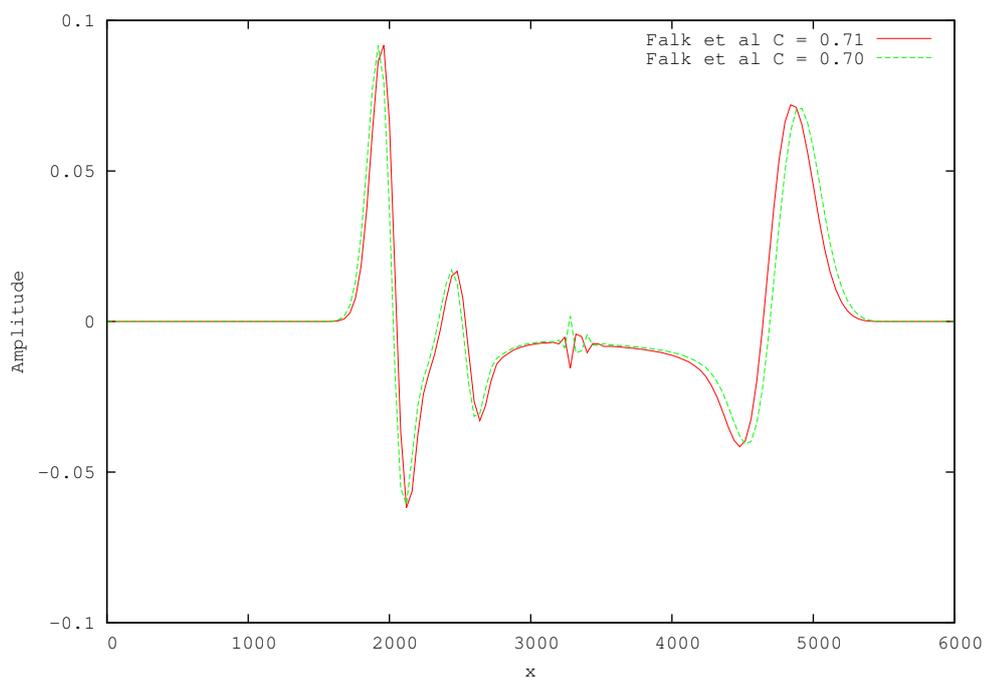
(b)

Figura 4.12: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,50s$ (a) Métodos Adaptativos 2-2, 2-4 e 2-6 em (b) Zoom em $[3.000m ; 6.000m]$.

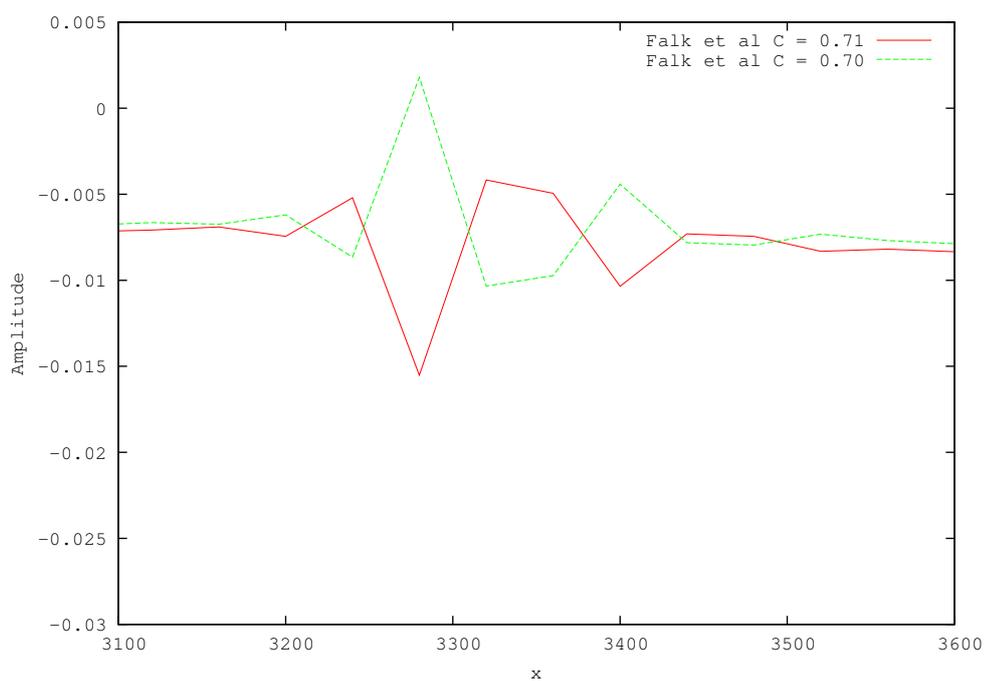
Após comparar os resultados das simulações utilizando valores que estão abaixo dos limites de estabilidade, conforme usualmente adotado em aplicações de Geofísica, apresentam-se nas Fig. 4.13 e 4.14 resultados do método adaptativo próximo ao limite

de estabilidade do esquema 2-2. Analisando os resultados obtidos dos métodos adaptativos observa-se que os mesmos, quando simulados no limite de estabilidade, apresentam o aparecimento de um "*ruído*" na solução na região próxima da interface da velocidade, que não aparece quando utilizamos o método convencional (Fig. 4.3). Este "*ruído*" aumenta de forma a invalidar os resultados ao longo do tempo, em simulações no limiar da estabilidade do método.

Para diferenciar os efeitos desse "*ruído*" com aqueles provocados por simulações acima do limite de estabilidade, apresentam-se nas Figuras 4.13 e 4.14, uma comparação com os resultados do método adaptativo Falk et al. (1998), simulado próximo ao limite de estabilidade para o esquema 2-2 ($C = 0,707$) com o mesmo método adaptativo, só que um pouco acima desse limite ($C = 0,710$).

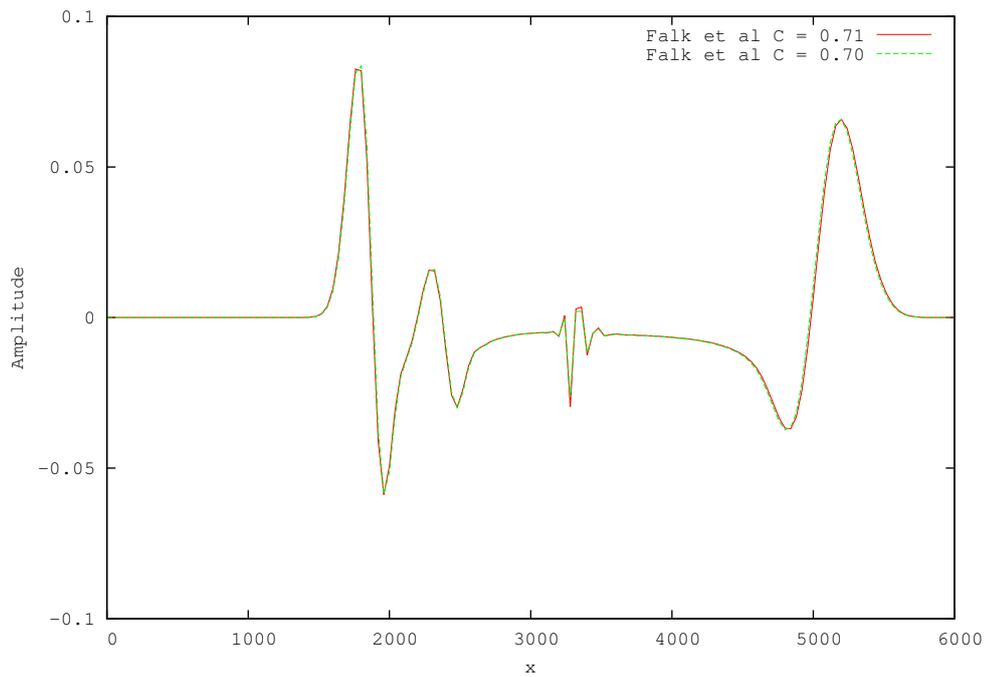


(a)

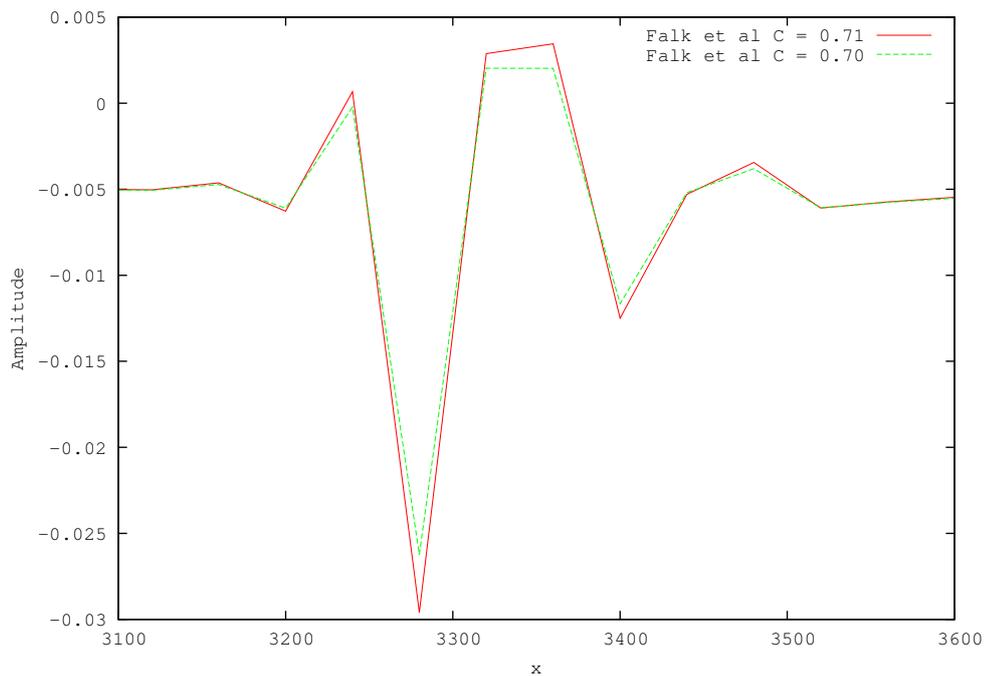


(b)

Figura 4.13: (a) Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,40s$ para uma aproximação 2-2. (b) Zoom: $x \in [3.100m ; 3.600m]$.



(a)



(b)

Figura 4.14: (a) Seção da onda em $y = 3000m$ e $t = 1,60s$ para uma aproximação 2-2. (b) Zoom: $x \in [3.100m ; 3.600m]$.

As Figuras 4.13 e 4.14 apresentam em (a) os resultados do método adaptativo, no limite de estabilidade e acima deste limite, nos quais aparecem os efeitos: "ruídos" e a instabilidade. Nas mesmas Figuras em (b) apresentam-se um zoom em $x \in [3.100m ;$

3.600m], região próxima à interface da velocidade, onde aparecem os efeitos que estão sendo analisados. Esses efeitos, "ruídos" e instabilidade, são diferentes. Pode-se observar que os efeitos desse "ruído" crescem de forma mais lenta que os da instabilidade.

Apresentam-se, na subseção a seguir, resultados onde o campo de velocidades do domínio requer que o passo de tempo necessite de quatro divisões.

4.3.3 Quatro divisões do passo de tempo

Nesta subseção, apresentam-se os resultados utilizando o método adaptativo, para um meio no qual é necessária a utilização de quatro divisões do passo de tempo para a região de maior velocidade, para garantir a estabilidade. Trabalha-se com o mesmo campo de velocidades descrito anteriormente que, nos testes desta subseção, tem somente a alteração no valor da maior velocidade, ou seja, $v_2 = 3.000m/s$.

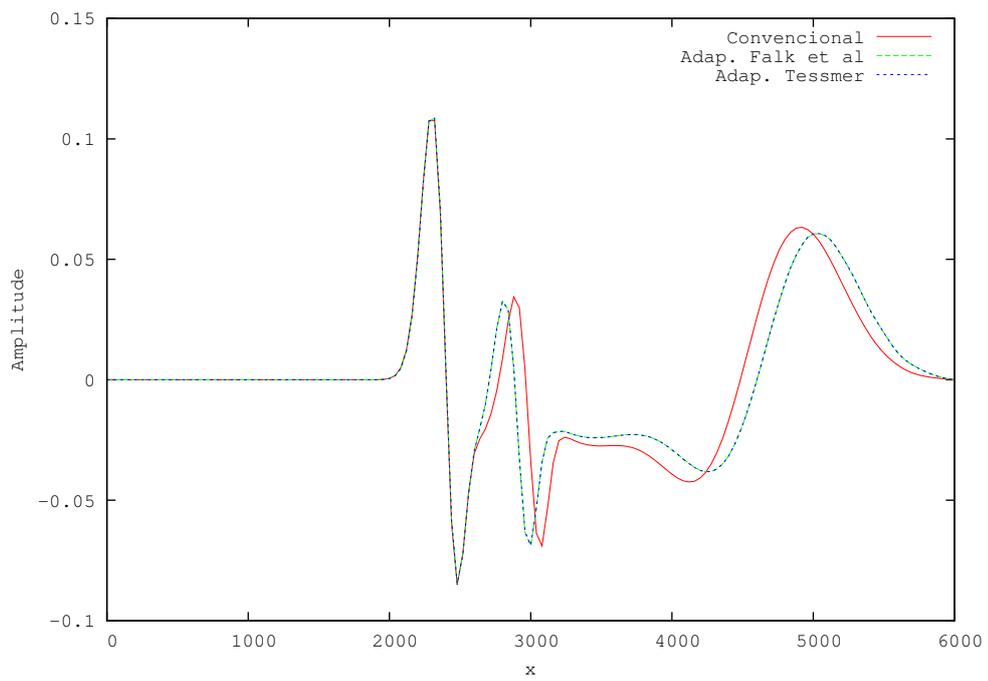
Segue-se o critério adotado anteriormente, para apresentação dos resultados. Nestes testes, apresentam-se também, as comparações entre os resultados dos dois algoritmos adaptativos, Falk et al. (1998) e Tessmer (2000), que neste caso, são diferentes.

Na Tabela 4.4 apresentam-se as discretizações utilizadas nas simulações. O método convencional requer a utilização dos valores de Δt_{min} para a garantia da estabilidade enquanto que nos esquemas adaptativos as simulações trabalham com $\Delta t = \Delta t_{max}$ para o meio com a menor velocidade (v_1) e com $\Delta t = \Delta t_{min}$ para a região com a maior velocidade (v_2). O número de Courant utilizado conduz a uma discretização temporal a um quarto do limite de estabilidade de cada um dos esquemas 2-2, 2-4 e 2-6.

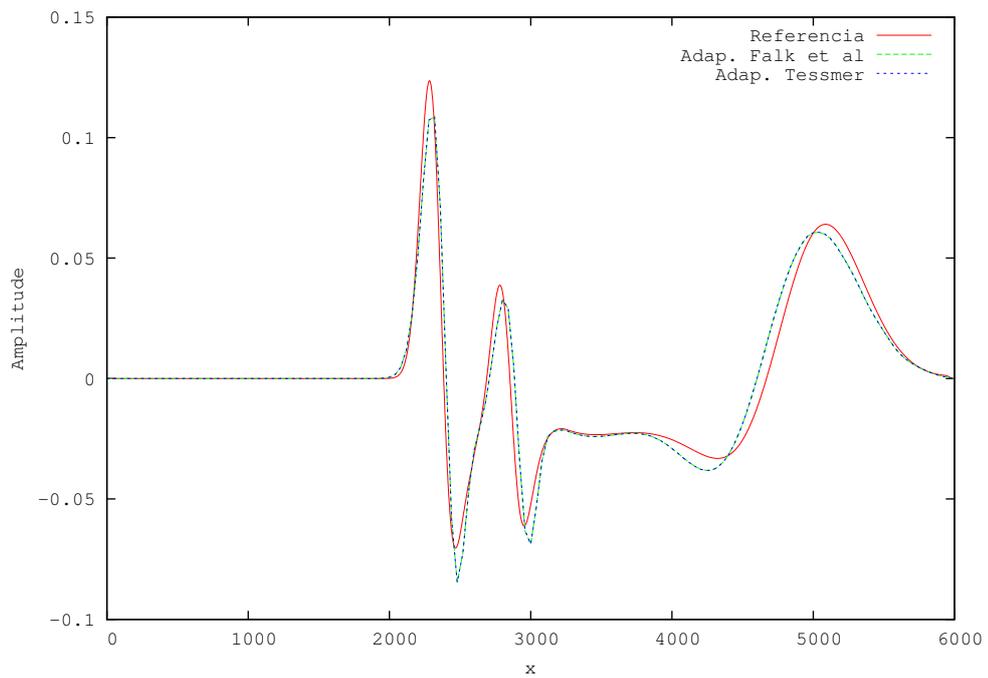
Esquema	N^o Courant Limite	N^o Courant utilizado	Δt_{min}	Δt_{max}
2 – 2	0,707	0,177	0,002357	0,009427
2 – 4	0,610	0,155	0,002033	0,008133
2 – 6	0,575	0,145	0,001917	0,007667

Tabela 4.4: Tabela - Passo de tempo - Problema (b)

Nas Figuras 4.15, 4.16 e 4.17, encontram-se os resultados em $y = 3.000m$ (corte) no instante de tempo $t = 0,90s$ para, respectivamente, uma aproximação 2-2, 2-4 e 2-6. Nas Figuras (a) tem-se as soluções com passos de tempo ajustados localmente comparada com o respectivo resultado convencional enquanto que, nas Figuras (b), as soluções com passos de tempo ajustados localmente comparada com o resultado adotado como referência.

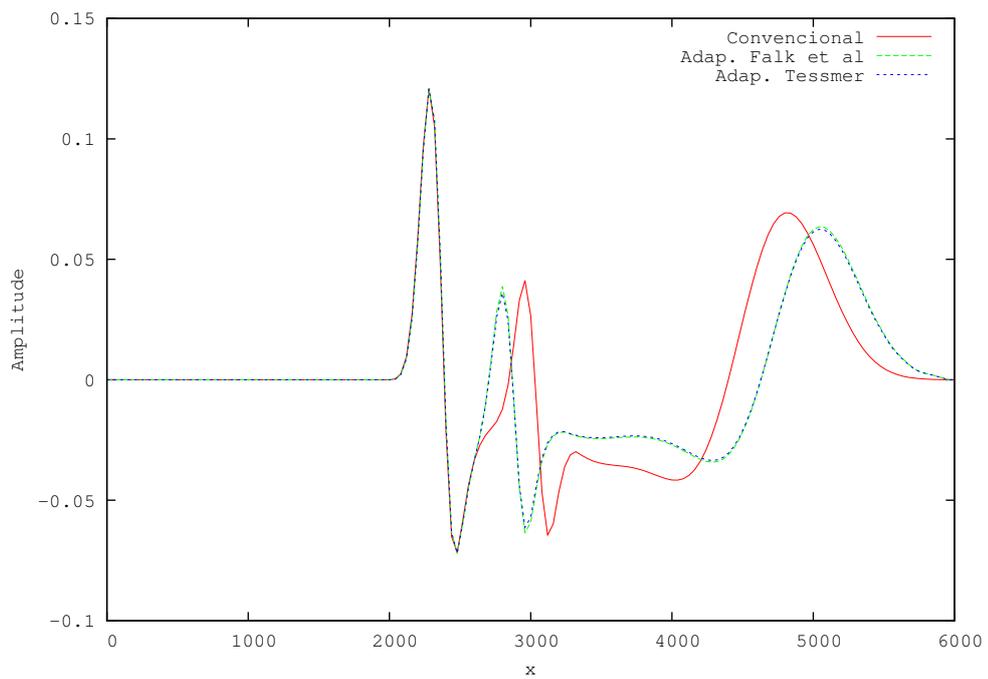


(a)

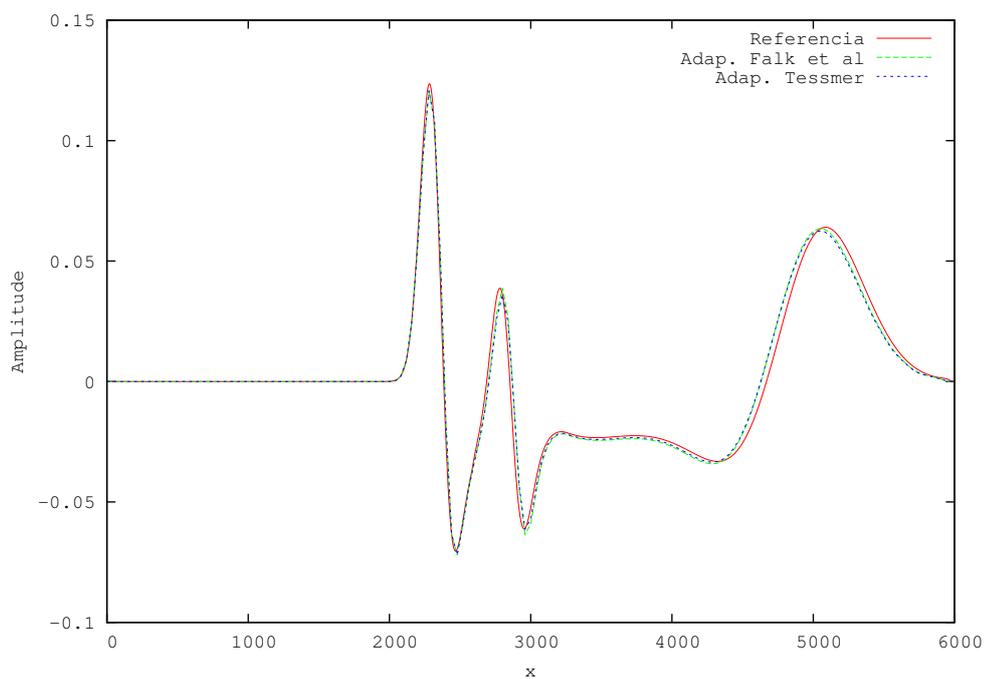


(b)

Figura 4.15: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

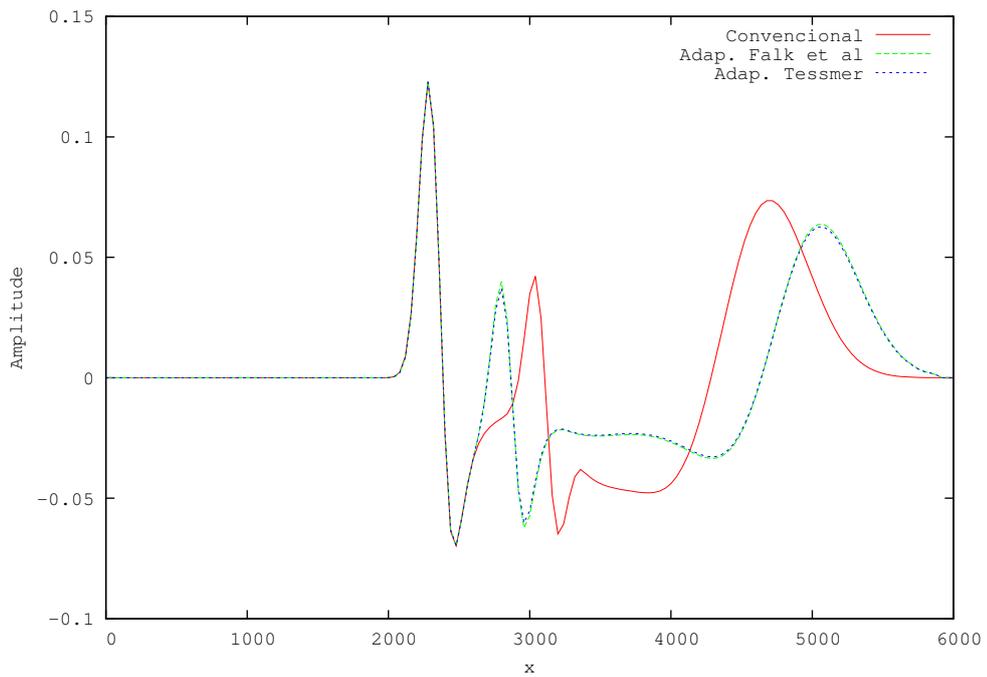


(a)

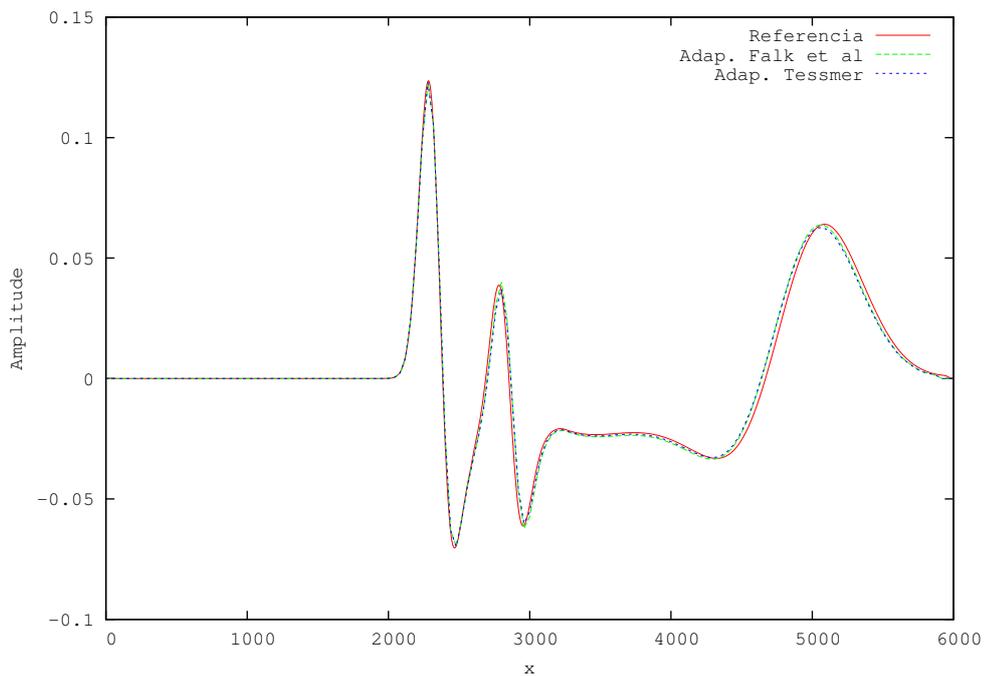


(b)

Figura 4.16: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-4). (a) Adaptativo x Conventional (b) Adaptativo x Referência.



(a)

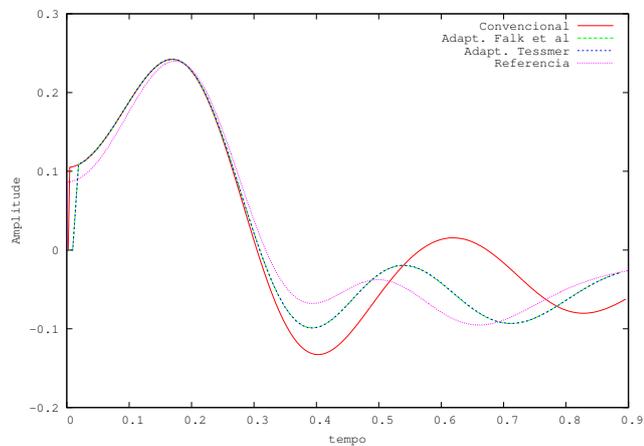


(b)

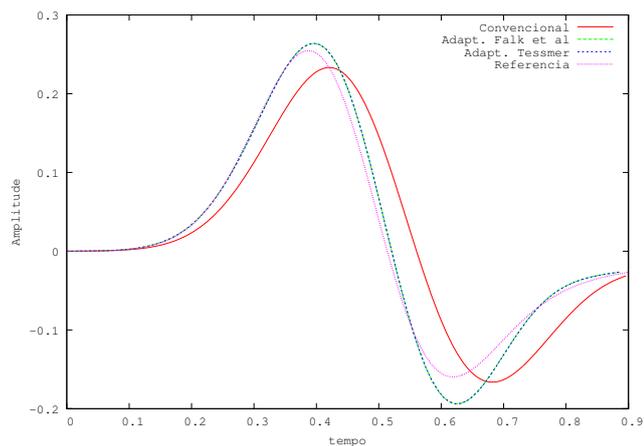
Figura 4.17: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-6). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

Nesses gráficos, Fig. 4.15 a 4.17, pode-se observar que o resultado do método adaptativo apresenta uma aproximação satisfatória com as comparações, convencional e referência. Esse resultado pode ser confirmado ao analisar os sismogramas apresentados nas

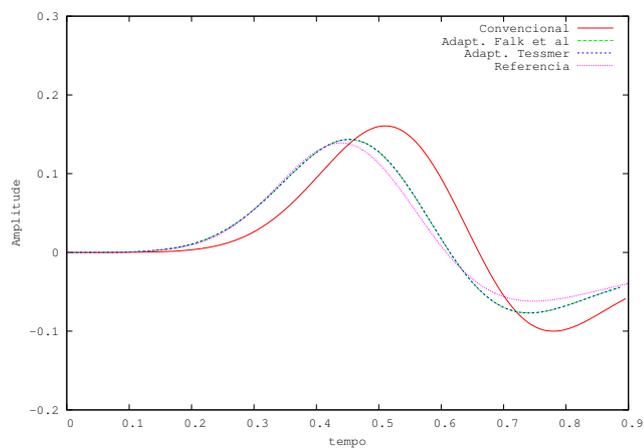
Figuras 4.18, 4.19 e 4.20. Nesses sismogramas, conforme subseção anterior, os resultados dos métodos adaptativos são mais próximos do resultado adotado como referência do que os dos métodos convencionais.



(a)

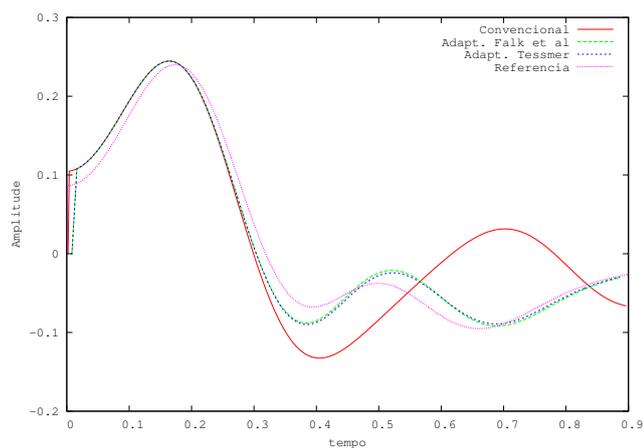


(b)

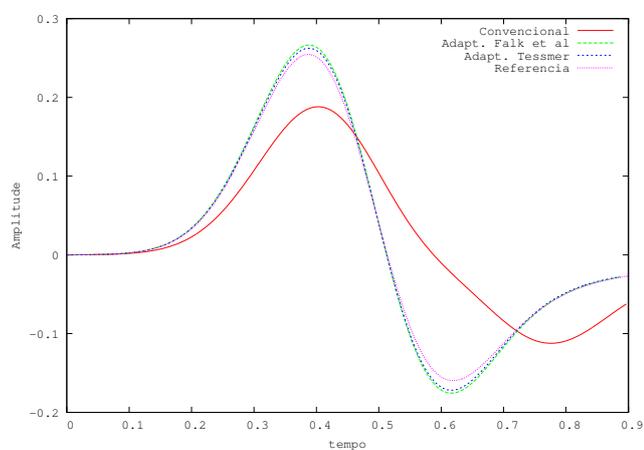


(c)

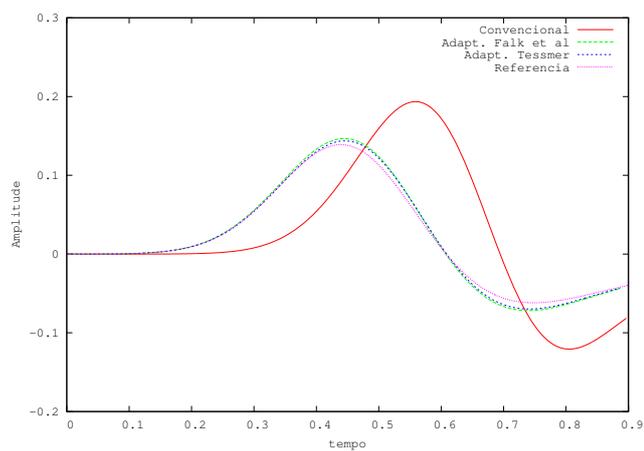
Figura 4.18: Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)

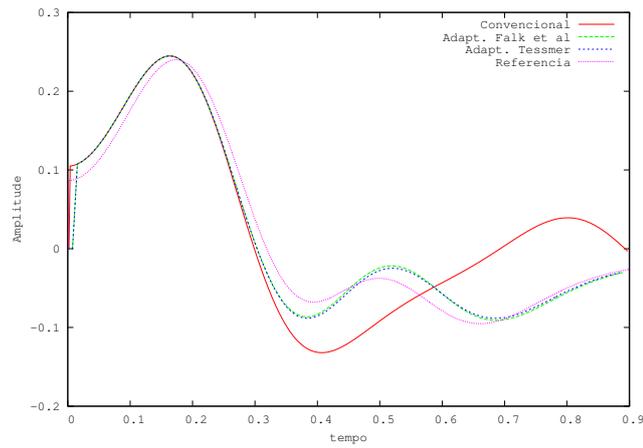


(b)

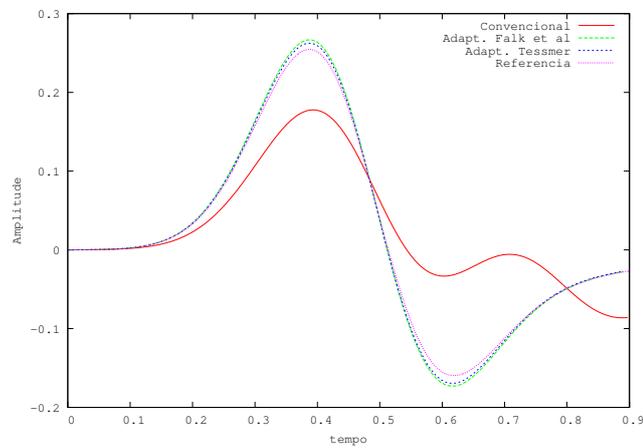


(c)

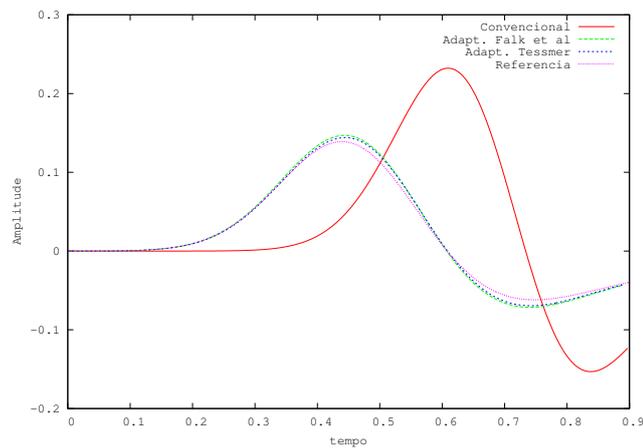
Figura 4.19: Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)



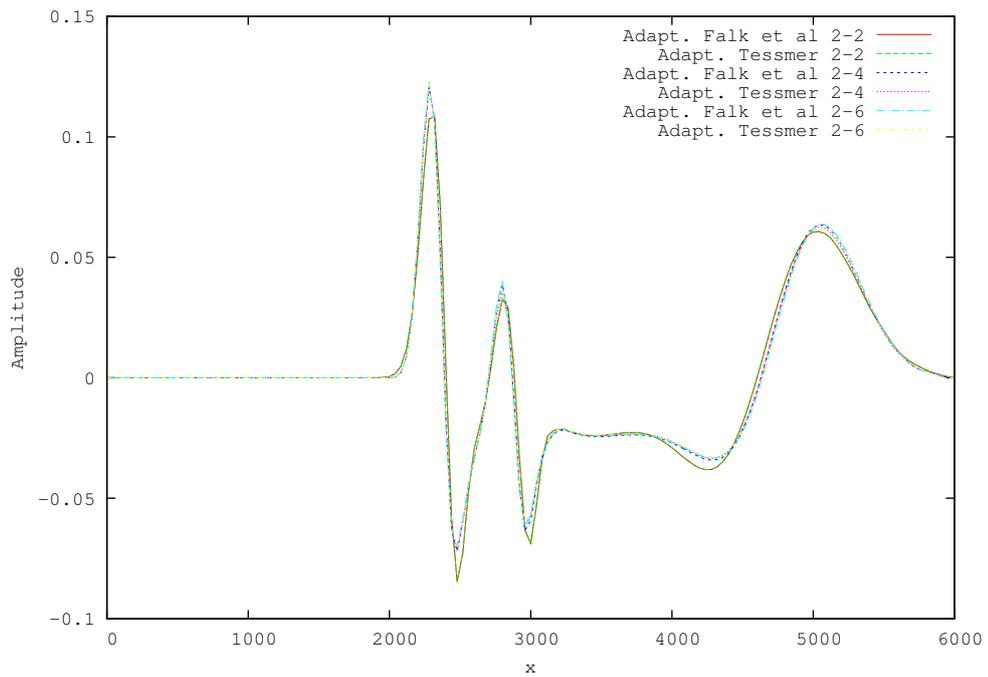
(b)



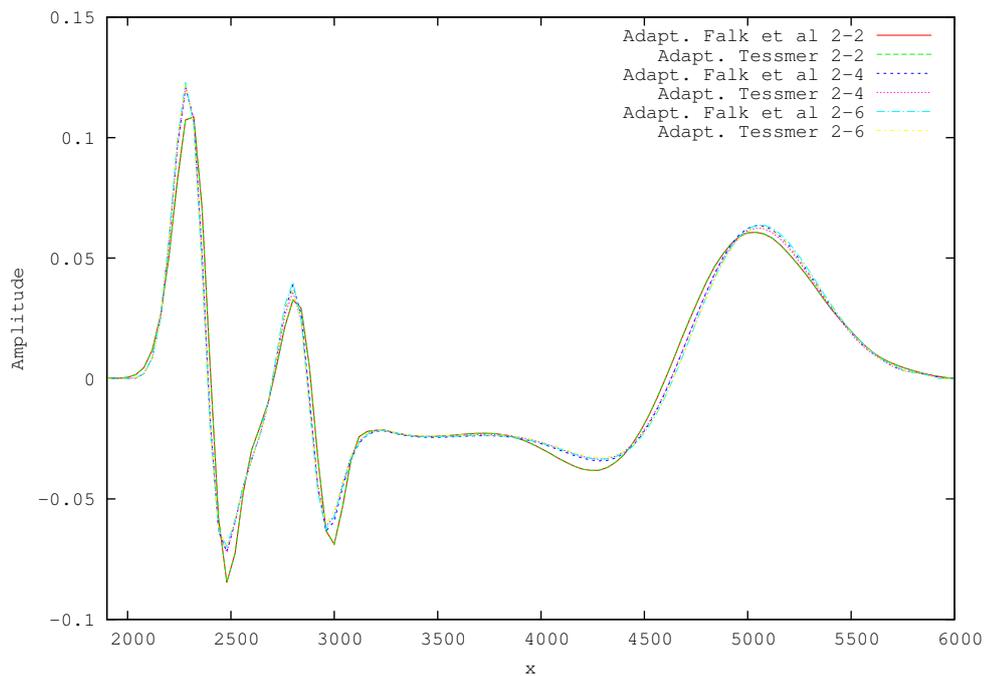
(c)

Figura 4.20: Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .

Apresenta-se na Figura 4.21 uma comparação entre os resultados do método adaptativo para as aproximações 2-2, 2-4 e 2-6 em $t = 0,90s$.



(a)



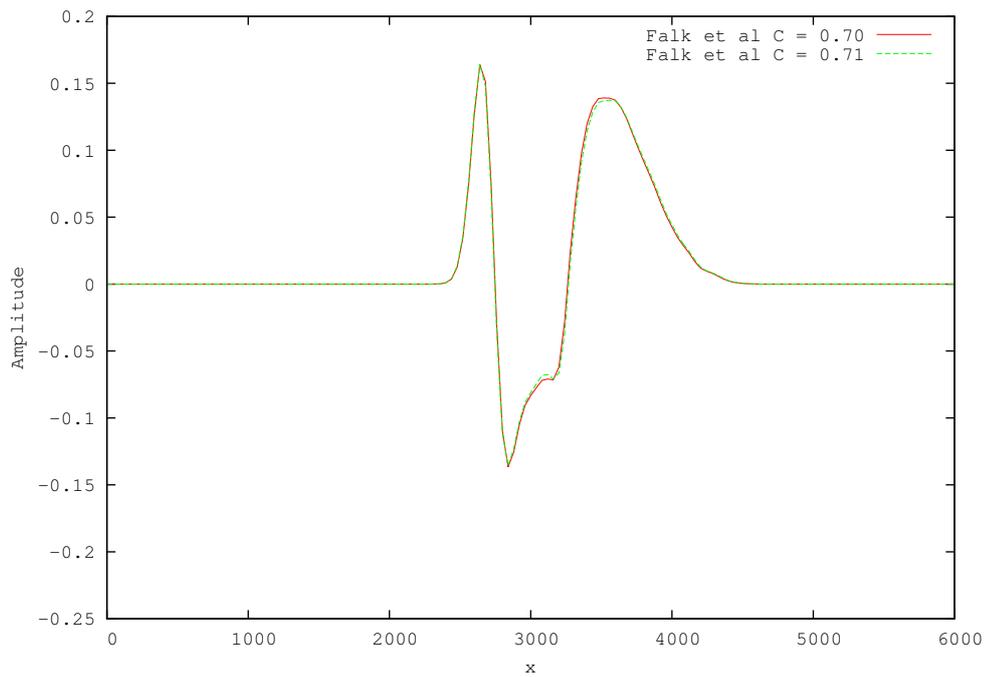
(b)

Figura 4.21: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (a) Comparação com adaptativos 2-2, 2-4 e 2-6 (b) Zoom: $x \in [1.800m ; 6.000m]$.

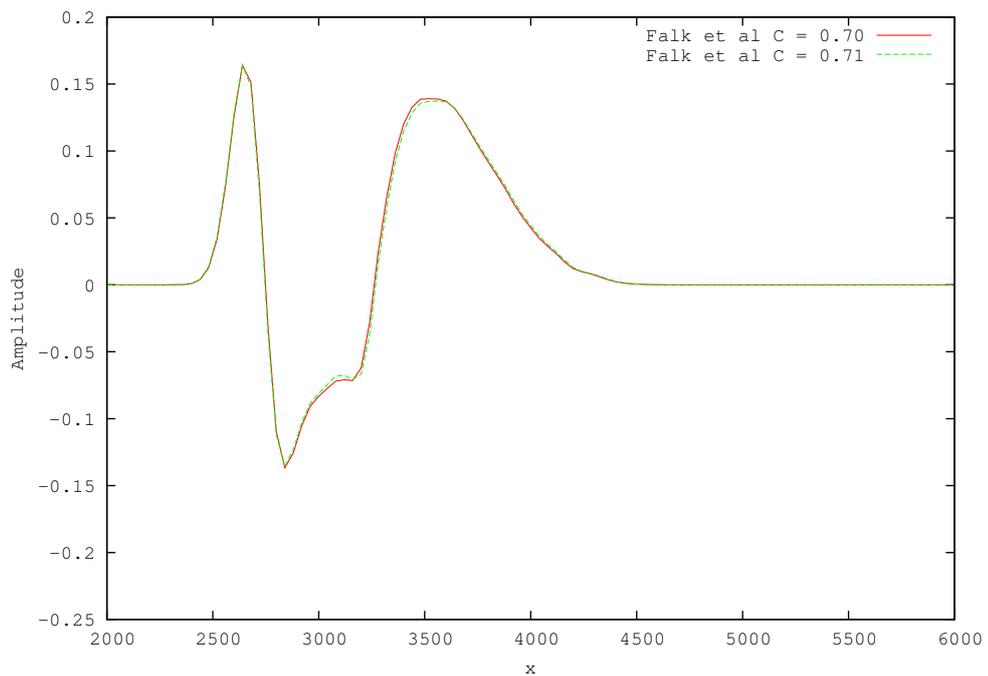
Os testes anteriores mostram que os "ruídos" no sinal da onda em simulações no limiar da estabilidade do método são efeitos diferentes dos provocados pela simulação em condição de instabilidade. Esses efeitos apareceram nos testes para esse campo de

velocidades de propagação do meio. Novamente, buscando diferenciar os efeitos desses "ruídos" com os provocados por simulações acima do limite de estabilidade, foram repetidos os testes com o método adaptativo no limite de estabilidade e acima do mesmo. Neste caso comparam-se os dois algoritmos adaptativos.

Apresenta-se, nas Figuras 4.22 a 4.25, a seguinte comparação: resultados do esquema adaptativo Falk et al. (1998) no limite de estabilidade do esquema 2-2 ($C = 0,707$) e, com esse mesmo esquema adaptativo, um pouco acima desse limite ($C = 0,710$). Essas comparações estão nos instantes de tempos $t = 0,45s$, $t = 0,70s$, $t = 0,85s$ e $t = 1,00s$.

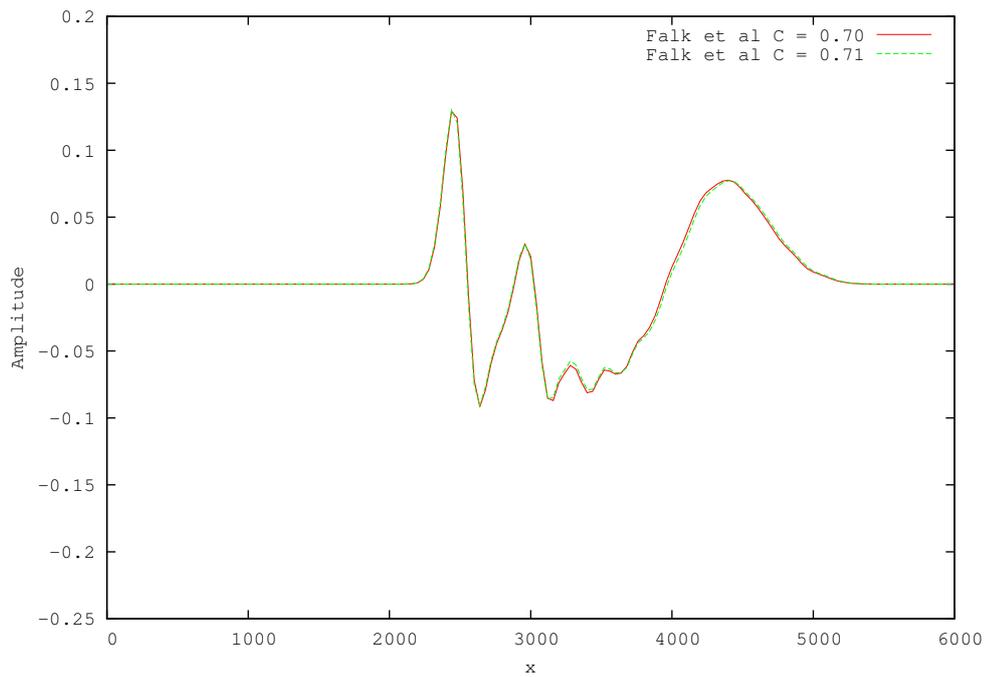


(a)

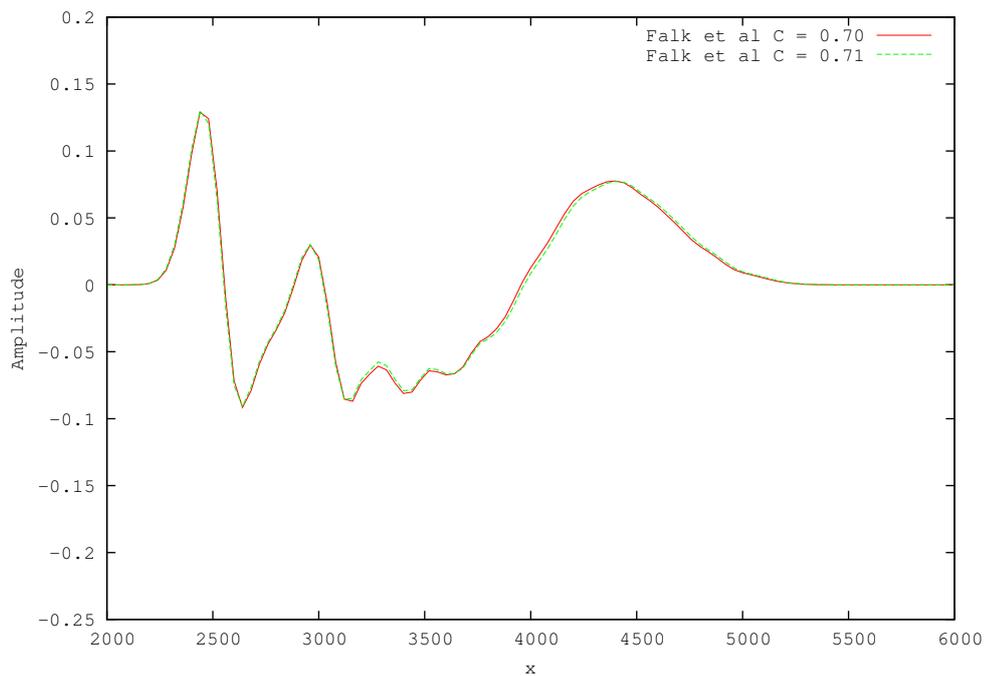


(b)

Figura 4.22: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,45s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.

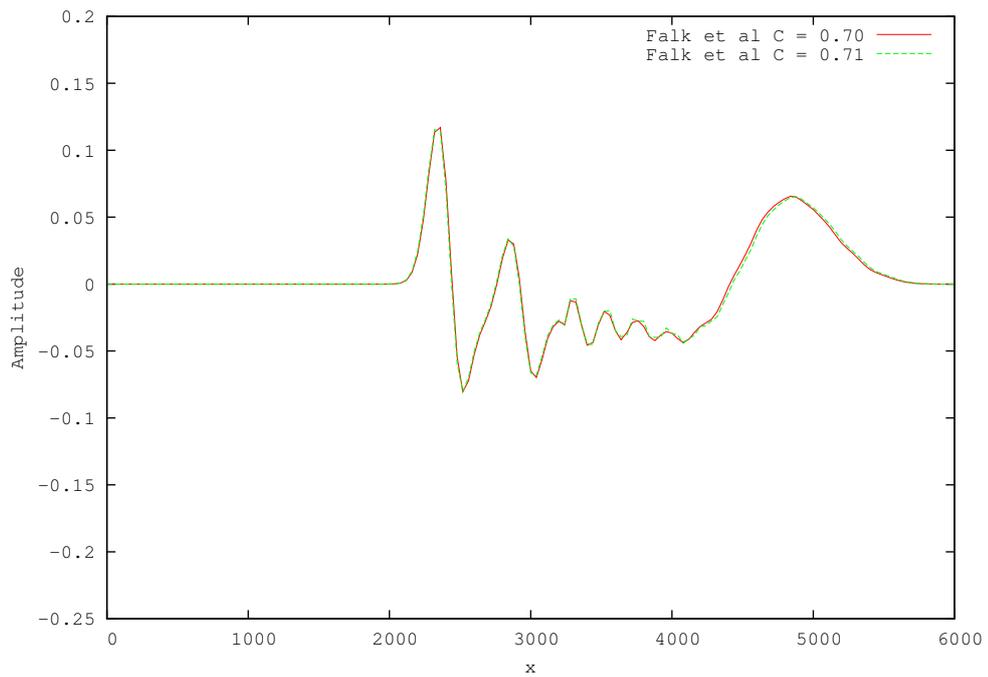


(a)

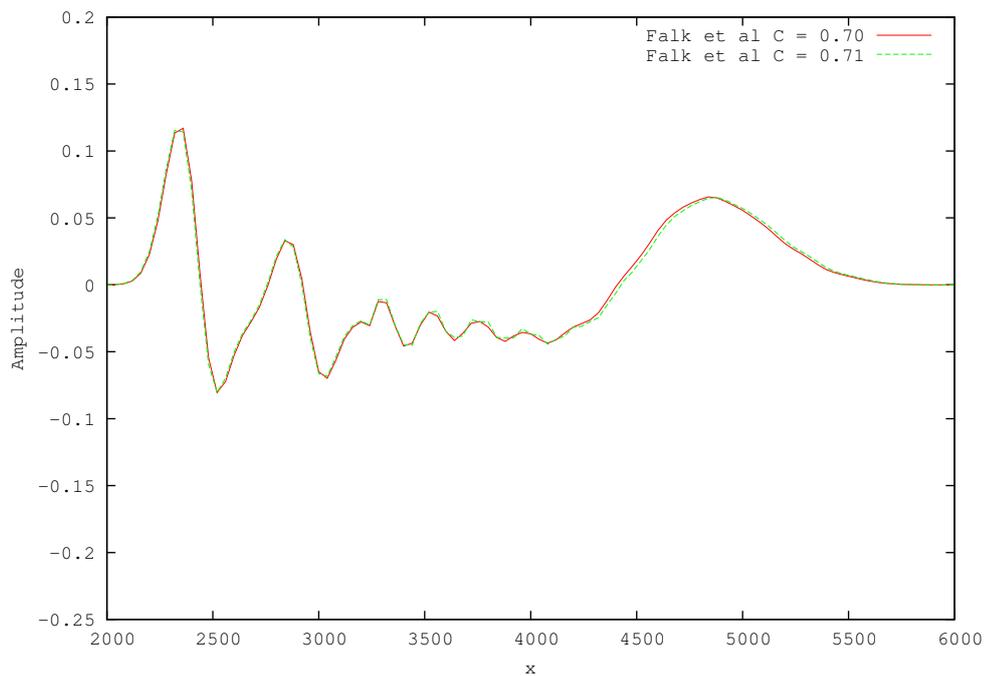


(b)

Figura 4.23: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,70s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.

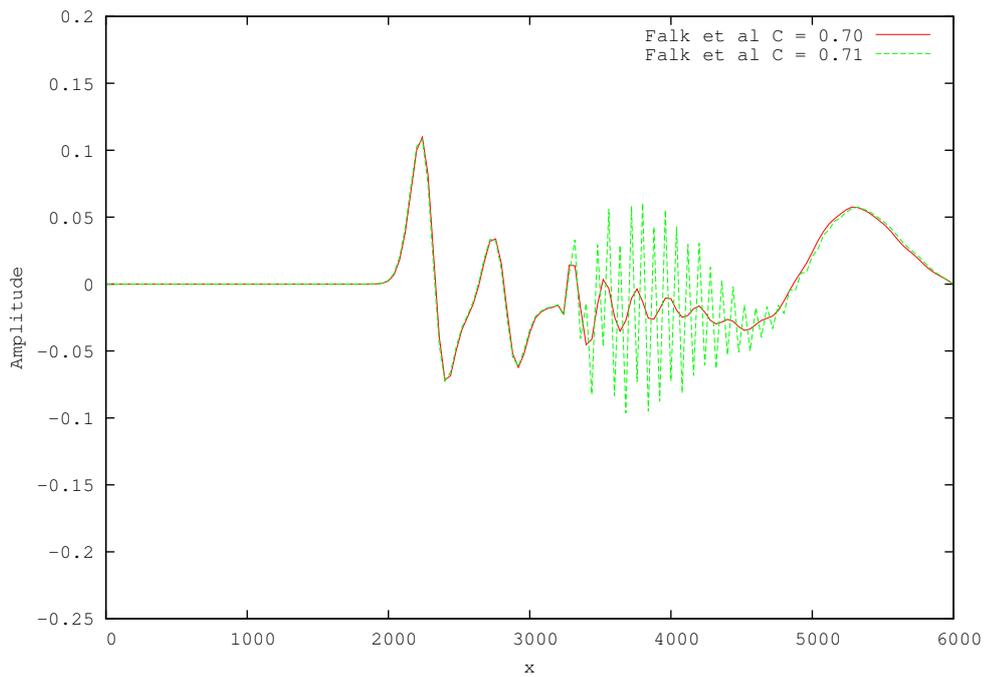


(a)

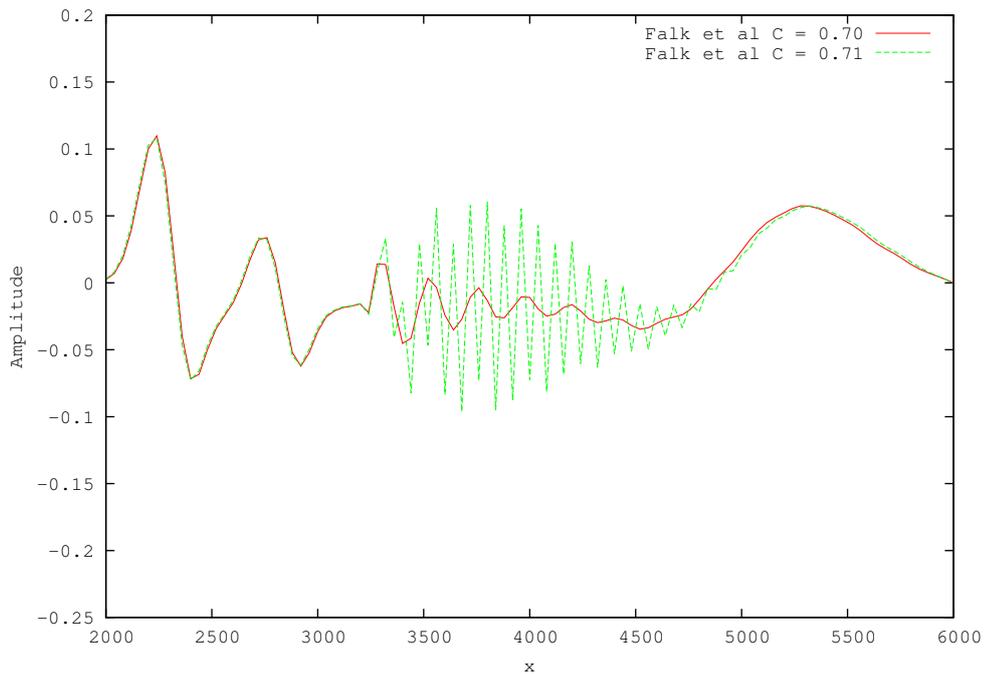


(b)

Figura 4.24: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,85s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.



(a)



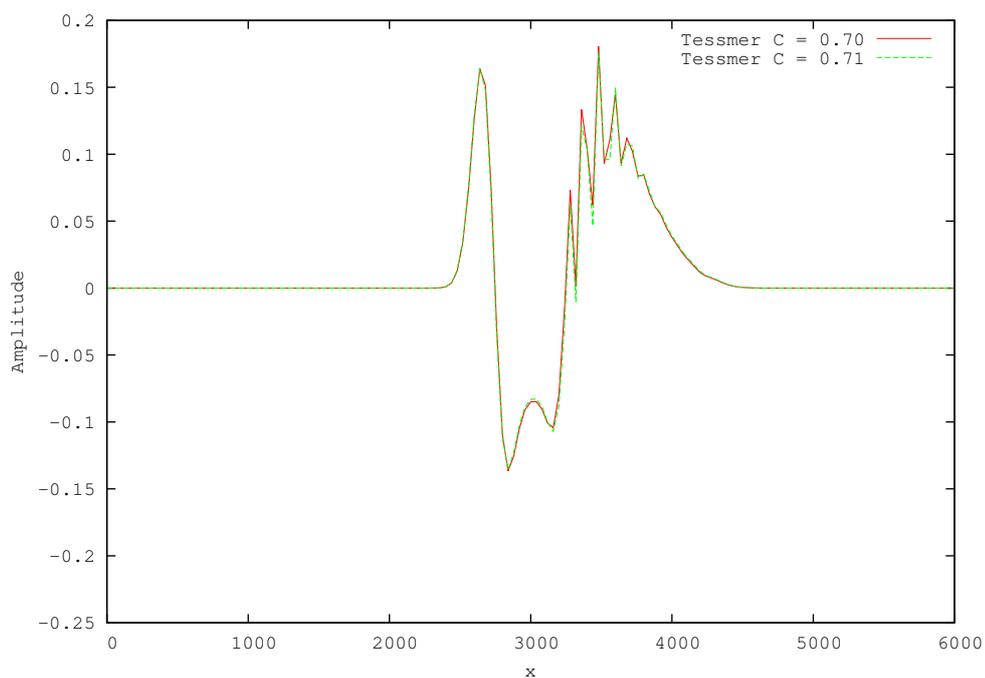
(b)

Figura 4.25: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,00s$ (aproximação 2-2). (a) No Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.

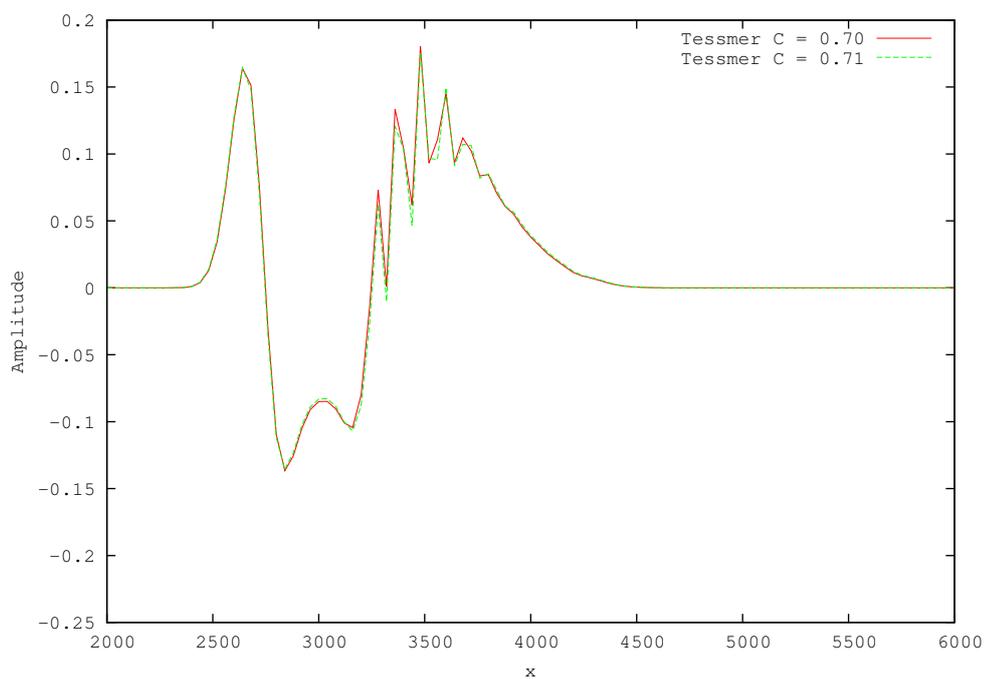
Novamente observa-se que o algoritmo adaptativo apresentado por Falk et al. (1998), quando simulado no limite de estabilidade do método, apresenta o aparecimento de um "ruído" na solução na região próxima da interface da velocidade. Este "ruído" repete o

comportamento dos testes anteriores e aumenta ao longo do tempo de simulação. Apesar desse aumento ser mais lento do que os provocados pela simulação acima do limite de estabilidade, como ele aumenta ao longo do tempo, pode invalidar os resultados desejados.

Nas Figuras 4.26 a 4.29 apresentam-se comparações com os resultados do esquema adaptativo Tessmer (2000) em diferentes instantes de tempo, seguindo a mesma lógica da comparação anterior.

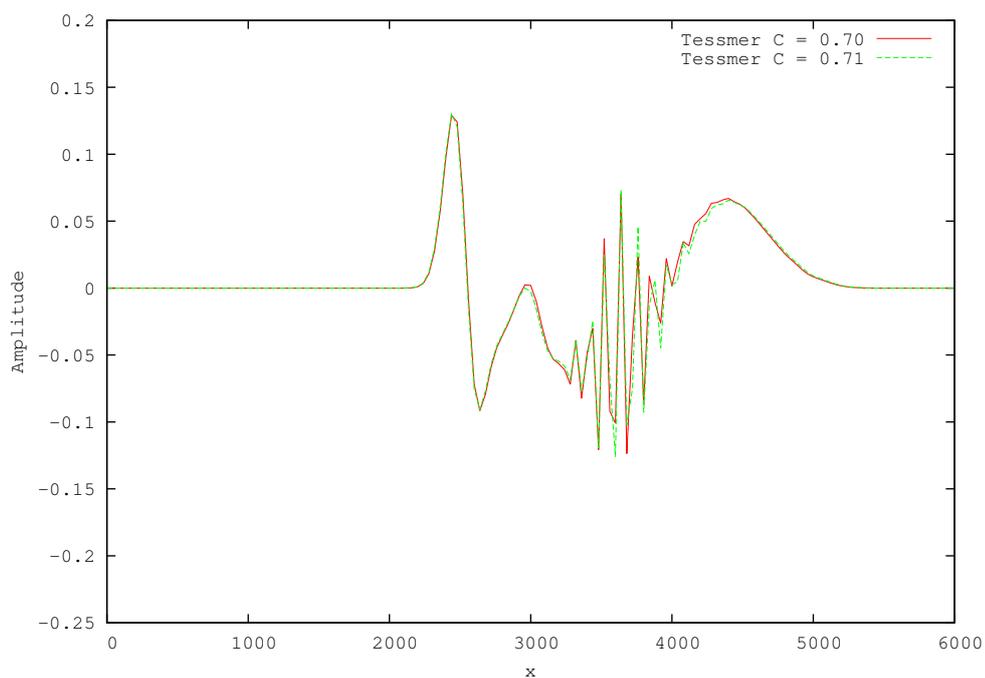


(a)

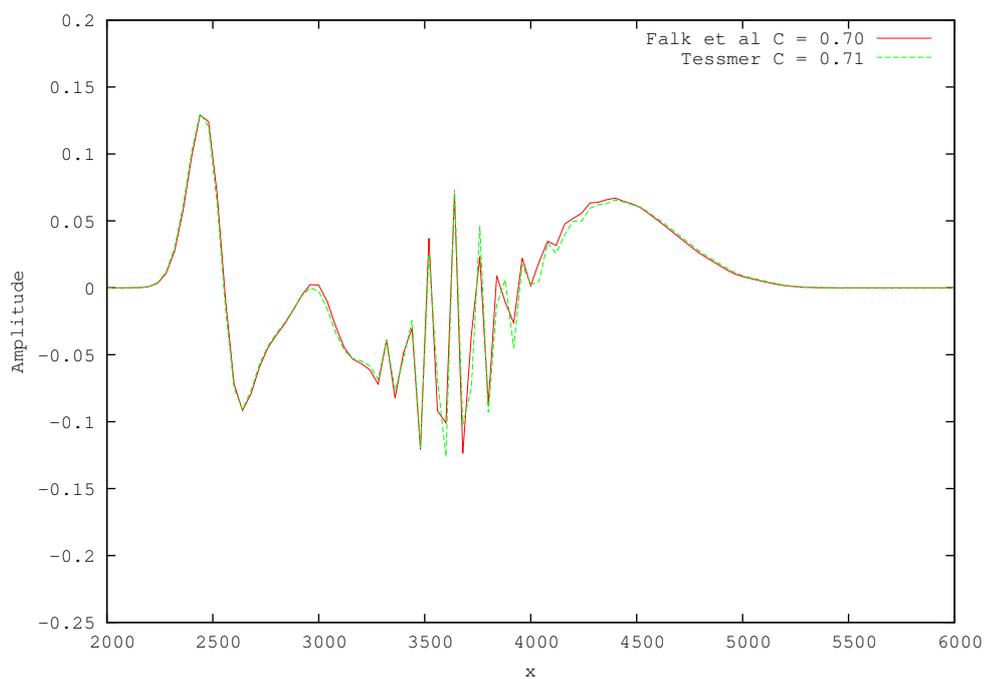


(b)

Figura 4.26: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,45s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.

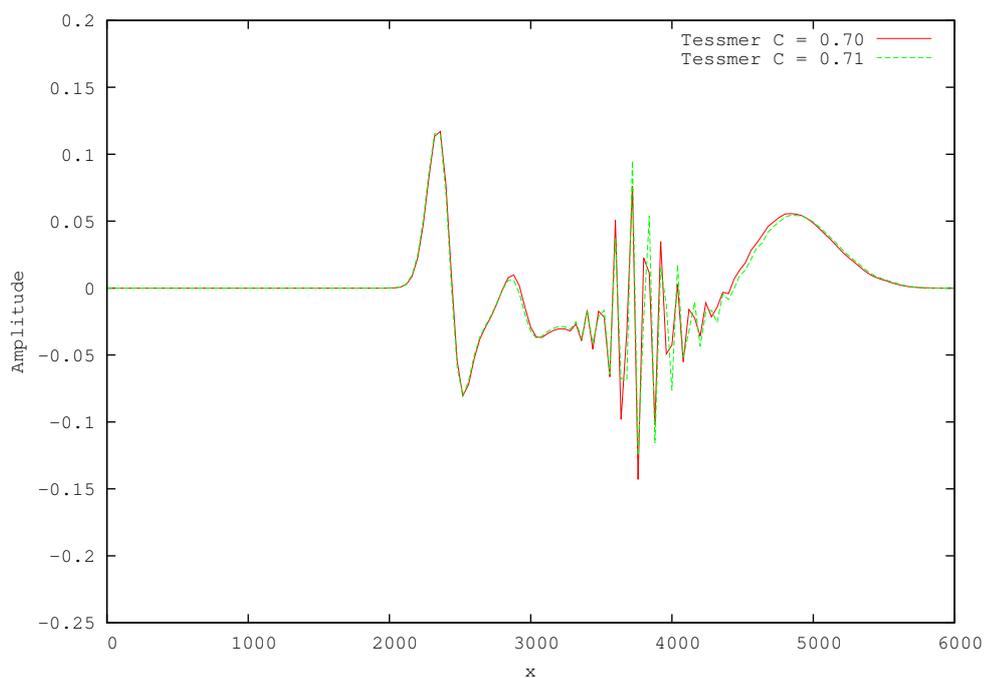


(a)

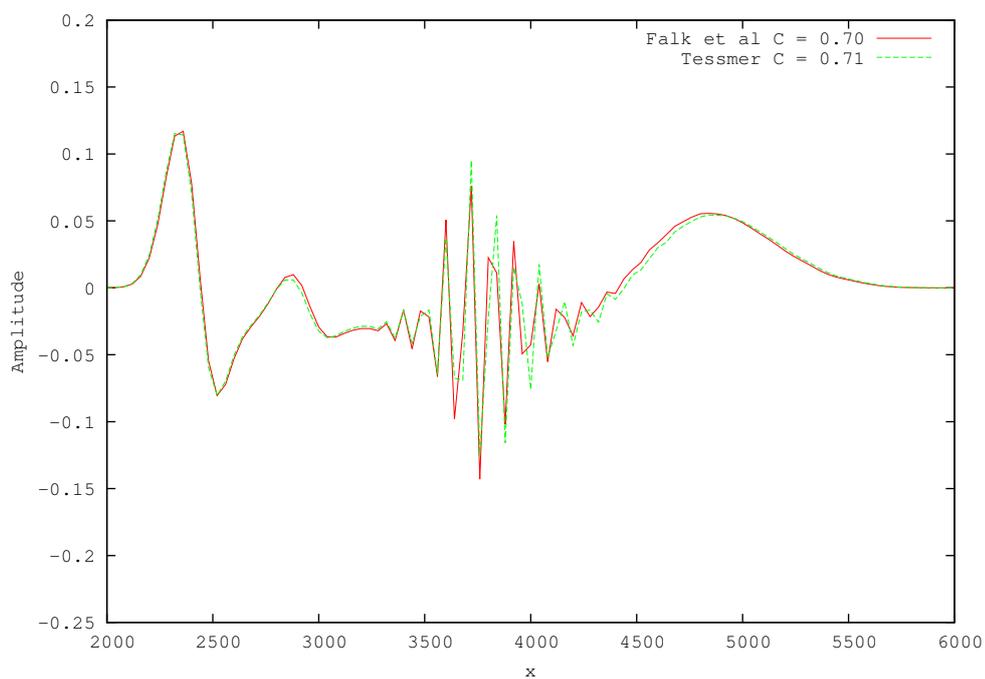


(b)

Figura 4.27: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,70s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.

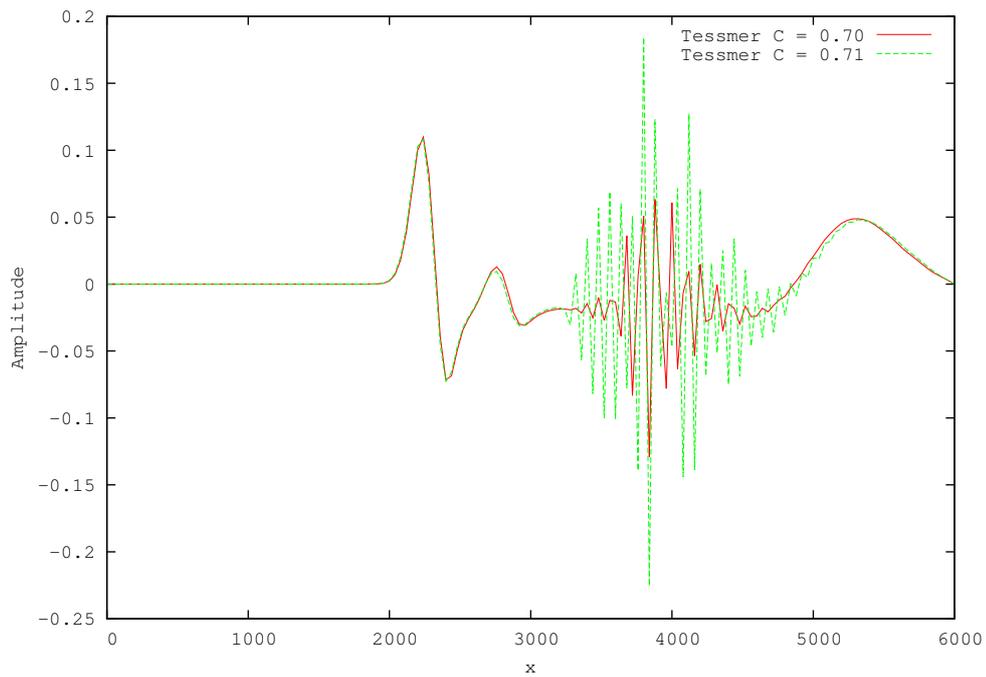


(a)

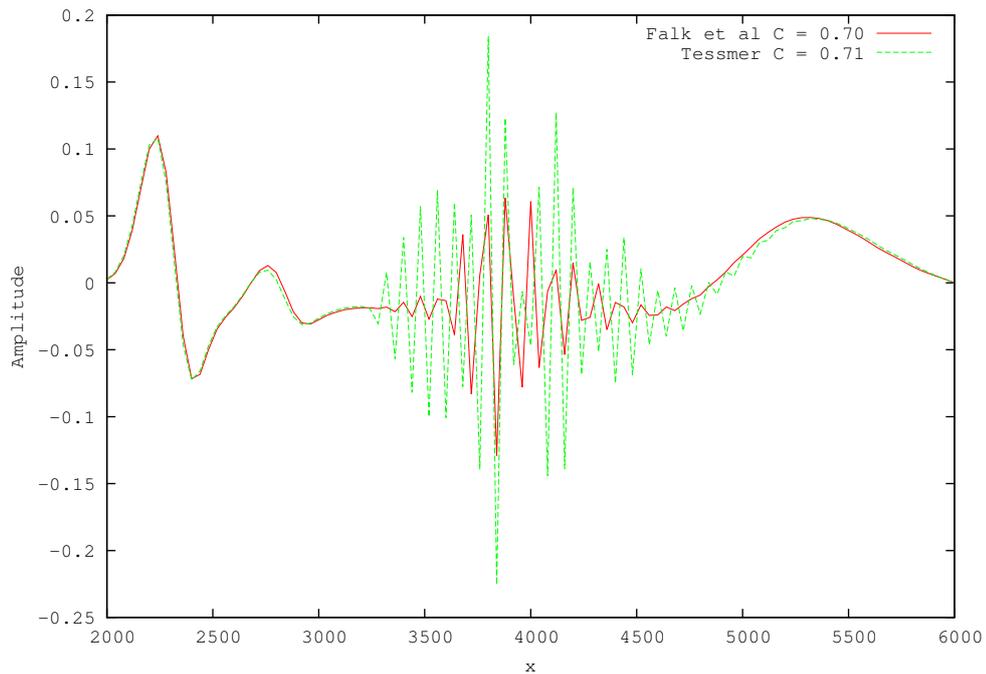


(b)

Figura 4.28: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,85s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.



(a)



(b)

Figura 4.29: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,00s$ (aproximação 2-2). (a) Próximo ao Limite x Acima do Limite (b) Zoom: $x \in [2.000m ; 6.000m]$.

Também aqui esses efeitos, "ruídos" e instabilidade, são diferentes. Pode-se observar que os efeitos desse "ruído" crescem de forma mais lenta que os da instabilidade.

Observa-se que o algoritmo adaptativo apresentado por Tessmer (2000), quando simulado no limite de estabilidade do método, também apresenta o aparecimento de um "ruído" na solução na região próxima da interface da velocidade. Este "ruído" repete o comportamento dos testes anteriores, ou seja, aumenta ao longo do tempo de simulação. Dessa forma pode invalidar os resultados das simulações para $t > \bar{t}$, onde $\bar{t} > 0$ é um instante de tempo. A diferença é que, para cada um dos respectivos algoritmos adaptativos, esse "ruído" aparece em instantes de tempos diferentes e com intensidade diferente. Os "ruidos" demoram um pouco mais para aparecer no algoritmo apresentado por Tessmer (2000) porém aumentam de forma mais rápida.

4.4 Conclusões preliminares

Esses resultados mostram que o esquema adaptativo, quando utilizadas discretizações bem abaixo do limite de estabilidade, apresentam elevada acurácia para os operadores de 2^a, 4^a e 6^a ordem espacial.

O esquema com quatro divisões do passo de tempo apresenta uma diferença maior em relação à solução com o esquema convencional, do que a comparação feita na Seção 4.3.2. Tal fato pode ser descrito pela maior propagação de erros que acontece quando se adapta o passo de tempo de Δt para $\Delta t/4$ com aquele que adapta o passo de tempo de Δt para $\Delta t/2$ para os dois algoritmos adaptativos. No esquema com quatro divisões do passo de tempo, os pontos da região de transição no instante de tempo intermediário, $t + \Delta t/2$, são calculados com passo de tempo igual a $\Delta t_{int} = \Delta t/2$, acarretando um erro maior do que os demais pontos dos instantes de tempos intermediários calculados com $\Delta t/4$.

4.4.1 Armazenamento - Estrutura de Dados

Quando se utilizam esses esquemas adaptativos uma questão que deve ser levada em consideração é a necessidade de armazenar mais informações referentes a cada passo de tempo. Em um esquema convencional de 2^a ordem no tempo, conforme apresentado neste trabalho, requer a utilização de três instâncias de tempo, ou seja, para calcular o valor de u no instante de tempo t_{i+1} será necessário ter o valor de u nos instantes de tempo t e t_{i-1} (tempos inteiros).

Em contrapartida, para esquemas de passos de tempo ajustados localmente, para cada subregião a ser utilizada esta técnica, será necessária a utilização de estruturas para guardar as informações de u referente aos instantes de tempos intermediários. Ou seja,

para se calcular valor de u no instante de tempo t_{i+1} , num esquema adaptativo, além dos instantes de tempo inteiros será necessário armazenar valores em instantes de tempos intermediários em determinadas subregiões. A quantidade de valores em instantes de tempos intermediários e suas respectivas dimensões dependerá de alguns fatores para cada subregião: a dimensão, a velocidade de propagação do meio, e o esquema de adaptatividade utilizado.

Capítulo 5

Algoritmo Adaptativo: Região de Transição Triangular (RTT)

O algoritmo original apresentado por Falk et al. (1998) apresenta limitações na escolha da divisão do passo de tempo:

- (i) a adaptação tem que ser proporcional a 2^i , sendo i um inteiro e
- (ii) para fazer a adaptatividade surgir, próximo à interface de mudança da velocidade, "*ruídos*" na solução aproximada quando a discretização temporal (Δt) está próxima do limite da estabilidade do método.

A proposta apresentada por Tessmer (2000) resolve a questão da escolha da divisão do passo de tempo, por permitir a livre escolha da discretização temporal, respeitado o limite de estabilidade. Porém, é um esquema mais sensível ao aparecimento desses "*ruídos*". Esse efeito indesejável pode inviabilizar o resultado ao longo do tempo de simulação.

Neste trabalho propõe-se um algoritmo adaptativo que permite adotar qualquer divisão do passo de tempo e atenua os efeitos indesejáveis na interface de mudança da velocidade. Neste esquema, os valores de u nos pontos da região de transição, utilizados para calcular os valores de u nos pontos da subregião de maior velocidade, são calculados com a mesma discretização que precisa ser utilizada nela. A esse esquema deu-se o nome de Região de Transição Triangular (RTT), devido ao formato adquirido pela região de transição. Descreve-se, a seguir, como é feita a construção dessa região do novo algoritmo proposto nesse capítulo.

Apresenta-se na Fig. 5.1, para exemplificar, um domínio 1D onde $v_2 > v_1$. A estabilidade de cada região poderia ser garantida com a utilização de $\Delta t_{max} = \Delta t$ e $\Delta t_{min} = \Delta t/4$.

Nesta figura o tempo avança para baixo e, os quadrados pretos e brancos representam os pontos do domínio espacial discretizados. Os quadrados pretos são pontos situados na região com menor velocidade e que podem ser calculados com incremento de tempo Δt . Os quadrados brancos são pontos da malha na região de maior velocidade e que devem ser calculados com $\Delta t/4$. Pode-se notar, na Fig. 5.1, que há uma distinção entre o número de pontos da malha espacial que são calculados a cada passo de tempo. Instantes de tempo que calculam os valores de u em todo o domínio são chamados de tempos inteiros e, entre eles, chamados de tempos intermediários, calculam o valor de u apenas para os pontos da região de maior velocidade.

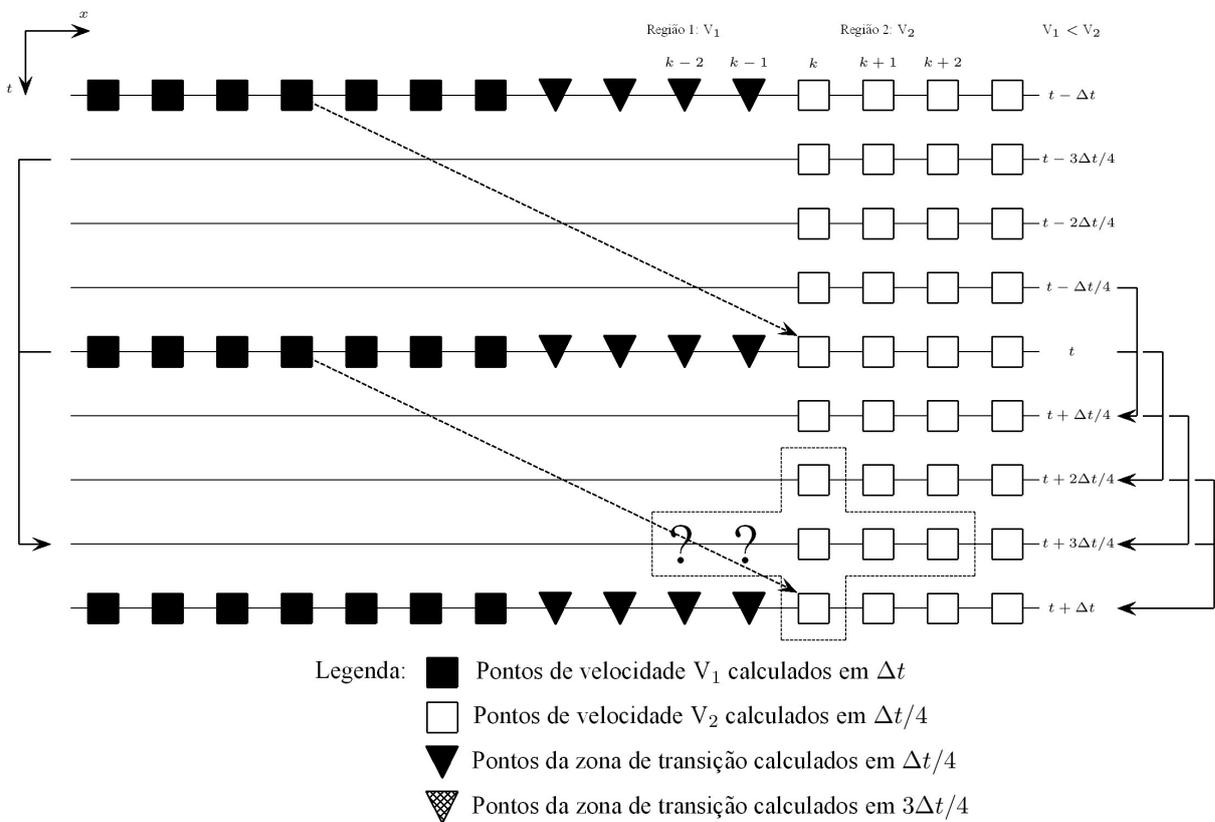


Figura 5.1: Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + \Delta t$.

Usa-se como base sempre o primeiro ponto, ou seja, o ponto mais à esquerda, do instante de tempo no qual se está calculando os valores de u .

Pode-se observar na Fig. 5.1 que para calcular o valor de u no ponto k do instante de tempo $t + \Delta t$, $u_k^{t+\Delta t}$, com um passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$, precisa-se de pontos extras na região de menor velocidade no instante de tempo intermediário $t + 3\Delta t/4$. Portanto, calculam-se os valores de u para esses pontos, com a discretização temporal que deve

ser utilizada na região de maior velocidade, ou seja, $\Delta t_{int} = \Delta t_{min} = \Delta t/4$ conforme apresentado na Fig. 5.2.

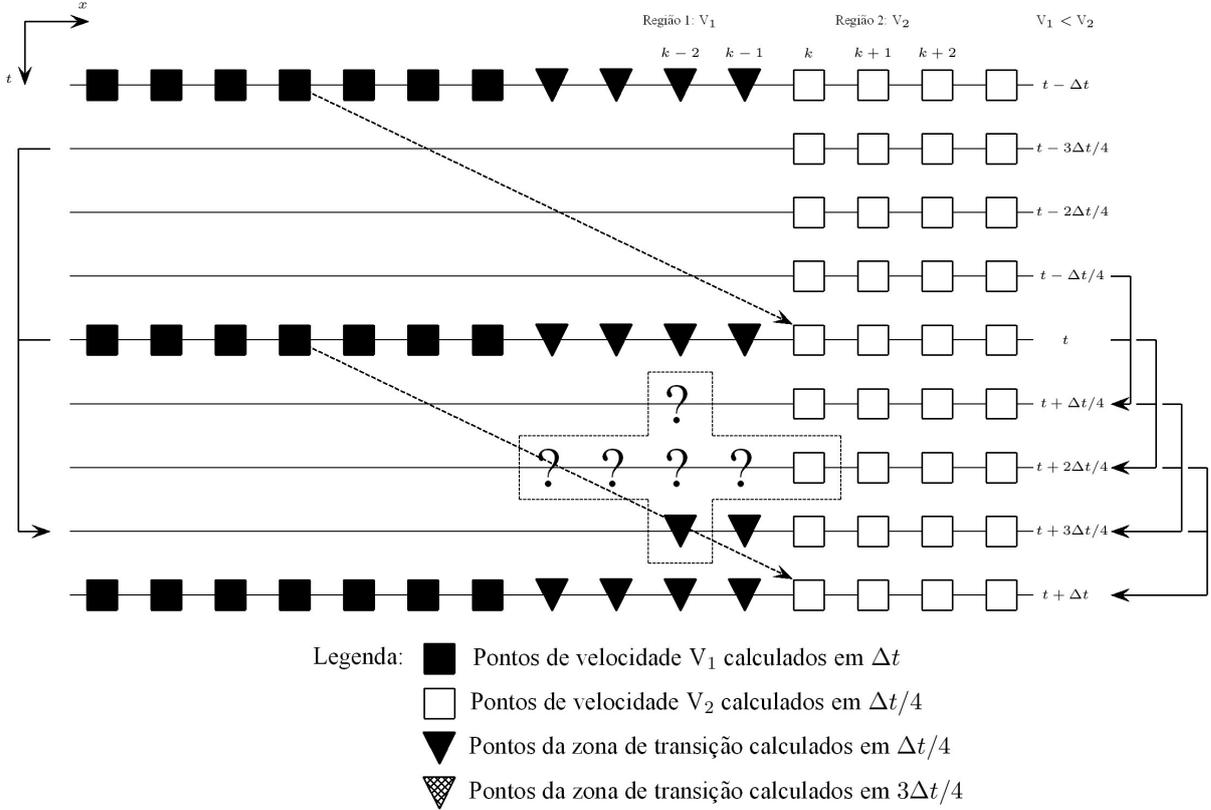


Figura 5.2: Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 3\Delta t/4$.

Novamente, observa-se na mesma Fig. 5.2, que para calcular o valor de u no ponto $k-2$ do instante de tempo $t + 3\Delta t/4$, $u_{k-2}^{t+3\Delta t/4}$, utilizando $\Delta t_{min} = \Delta t/4$, precisam-se de novos pontos extras na região de menor velocidade nos instantes de tempos $t + 2\Delta t/4$ e $t + \Delta t/4$. Portanto, calculam-se os valores de u nesses pontos, utilizando a discretização temporal que deve ser utilizada na região de maior velocidade, ou seja, $\Delta t_{int} = \Delta t_{min} = \Delta t/4$. Este procedimento pode ser observado na Fig. 5.3.

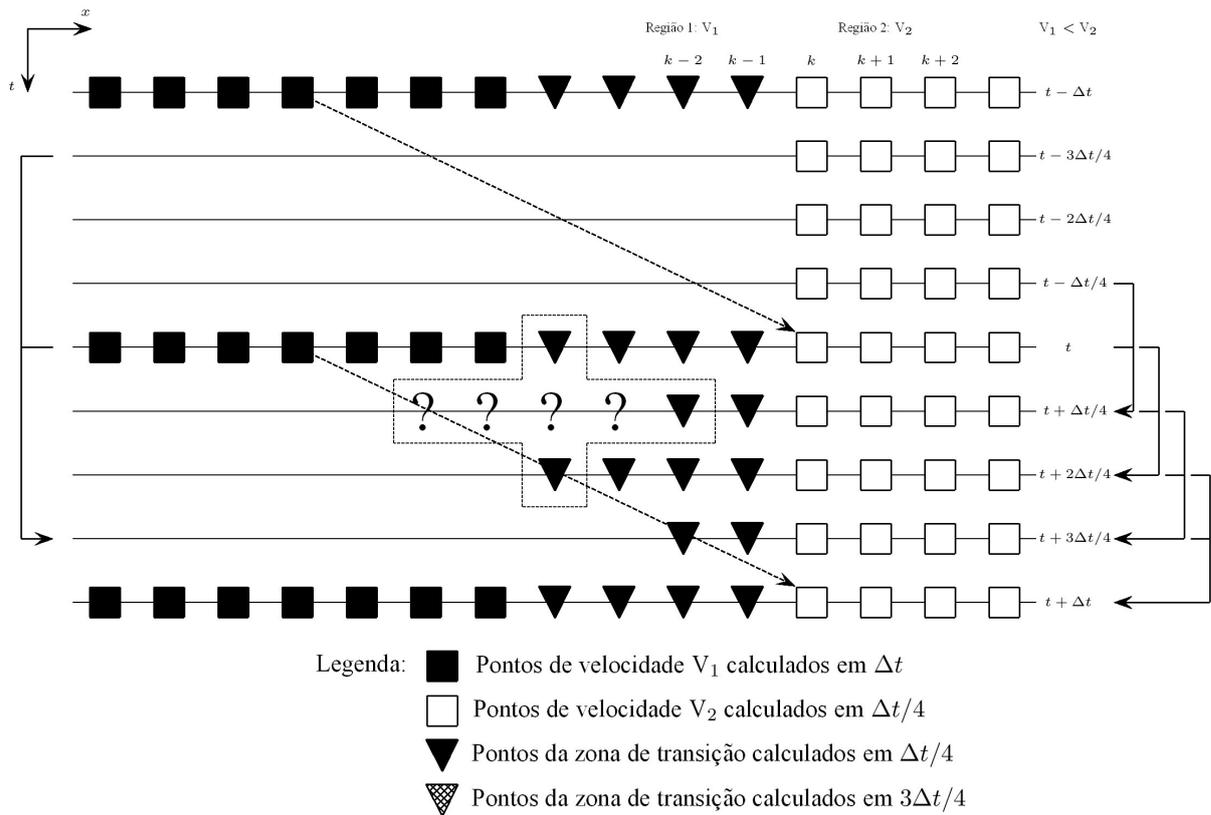


Figura 5.3: Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 2\Delta t/4$.

Para calcular o valor de u no ponto $k - 4$ do instante de tempo $t + 2\Delta t/4$, $u_{k-4}^{t+2\Delta t/4}$, Fig. 5.3, com um passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$, precisam-se de novos pontos extras na região de menor velocidade no instante de tempo $t + \Delta t/4$. Portanto, calculam-se os valores de u nesses pontos, com a discretização temporal que deve ser utilizada na região de maior velocidade, ou seja, $\Delta t_{int} = \Delta t_{min} = \Delta t/4$ conforme apresenta-se na Fig. 5.4.

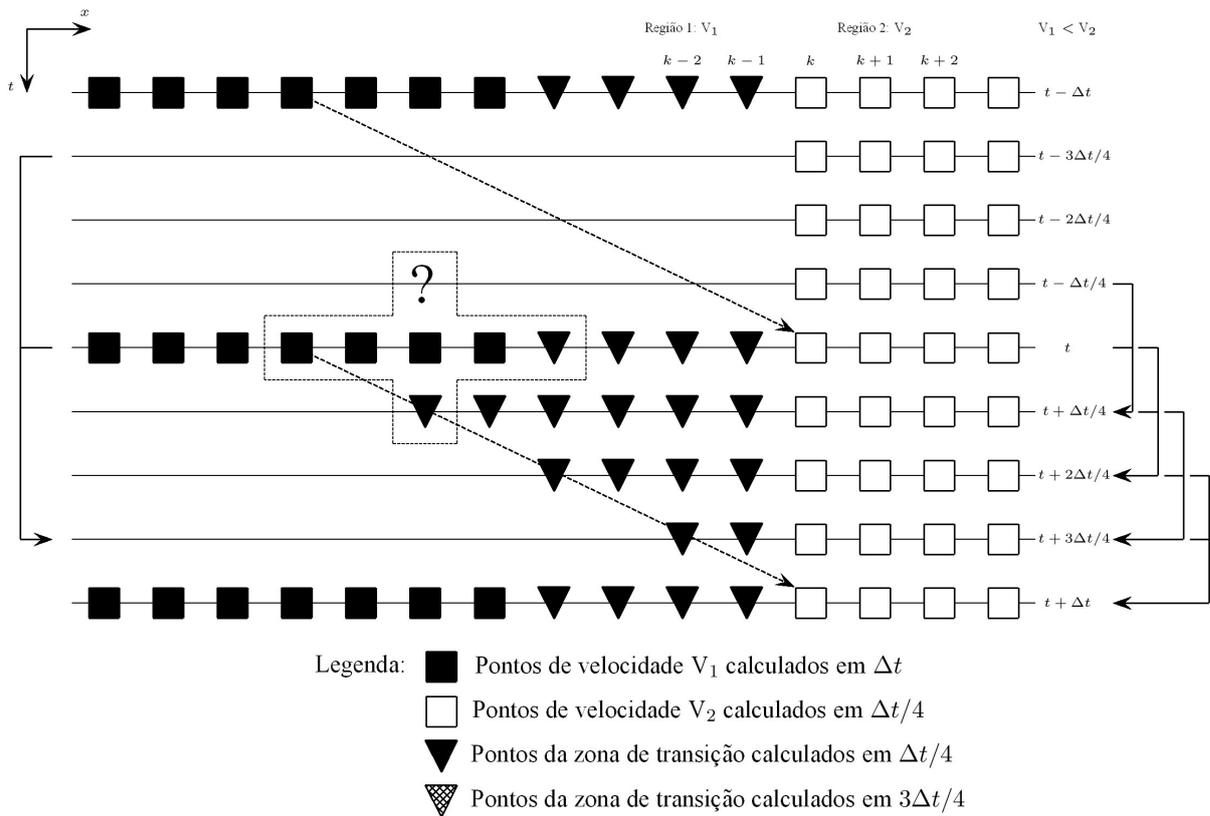


Figura 5.4: Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + \Delta t/4$.

Para se calcular o valor de u no ponto $k - 6$ do instante de tempo intermediário, $t + \Delta t/4$, aparece um ponto extra no qual o valor de u precisa ser calculado de uma forma diferente dos demais pontos da região de transição. Pode-se observar na Fig. 5.4 que, para calcular o valor de u no ponto $k - 6$ do instante de tempo $t + \Delta t/4$, $u_{k-6}^{t+\Delta t/4}$, com um passo de tempo $\Delta t_{min} = \Delta t/4$, utilizam-se os pontos já calculados no tempo t , porém, precisa-se de um ponto extra na região de menor velocidade no instante de tempo $t - \Delta t/4$, ou seja, para reiniciar um avanço de tempo é necessário ter pontos extras em $t - \Delta t/4$ complementando a região de transição.

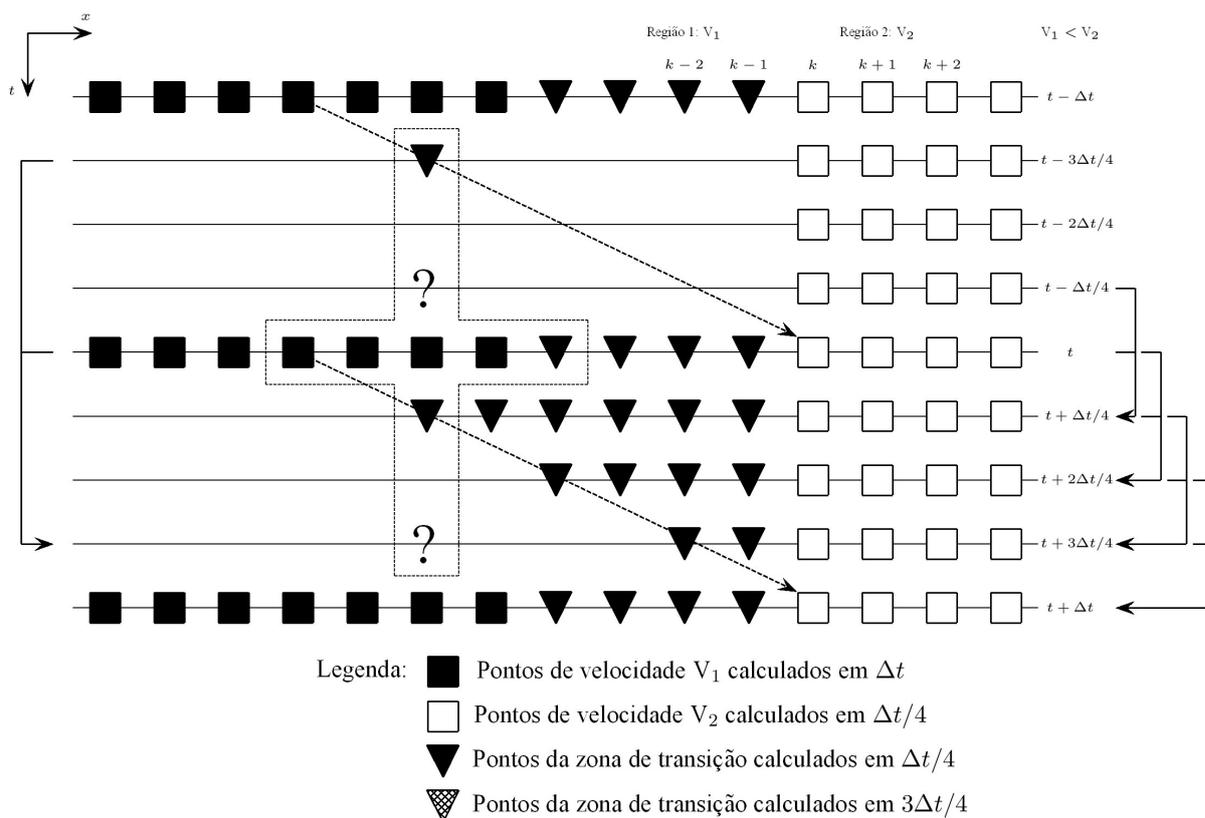


Figura 5.5: Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 3\Delta t/4$.

Para se resolver essa questão calculam-se os valores de u nos pontos correspondentes às posições $k - 6$ a $k - 3$ no instante de tempo $t + 3\Delta t/4$. Para esse cálculo utilizam-se os valores de u no instante de tempo t e $t - 3\Delta t/4$, conforme indicado na Fig. 5.5, onde utiliza-se $\Delta t_{int1} = 3\Delta t/4$. Portanto, o ponto principal desse algoritmo está no cálculo dos valores de u na região de transição no último instante de tempo intermediário, ou seja, neste caso em $t + 3\Delta t/4$. O cálculo do valor de u nesses pontos (Fig. 5.6) é o que permite reiniciar o avanço do tempo e ter os valores de u para os demais pontos da Região de Transição Triangular (RTT) calculados com a mesma discretização temporal, ou seja, $\Delta t_{min} = \Delta t/4$.

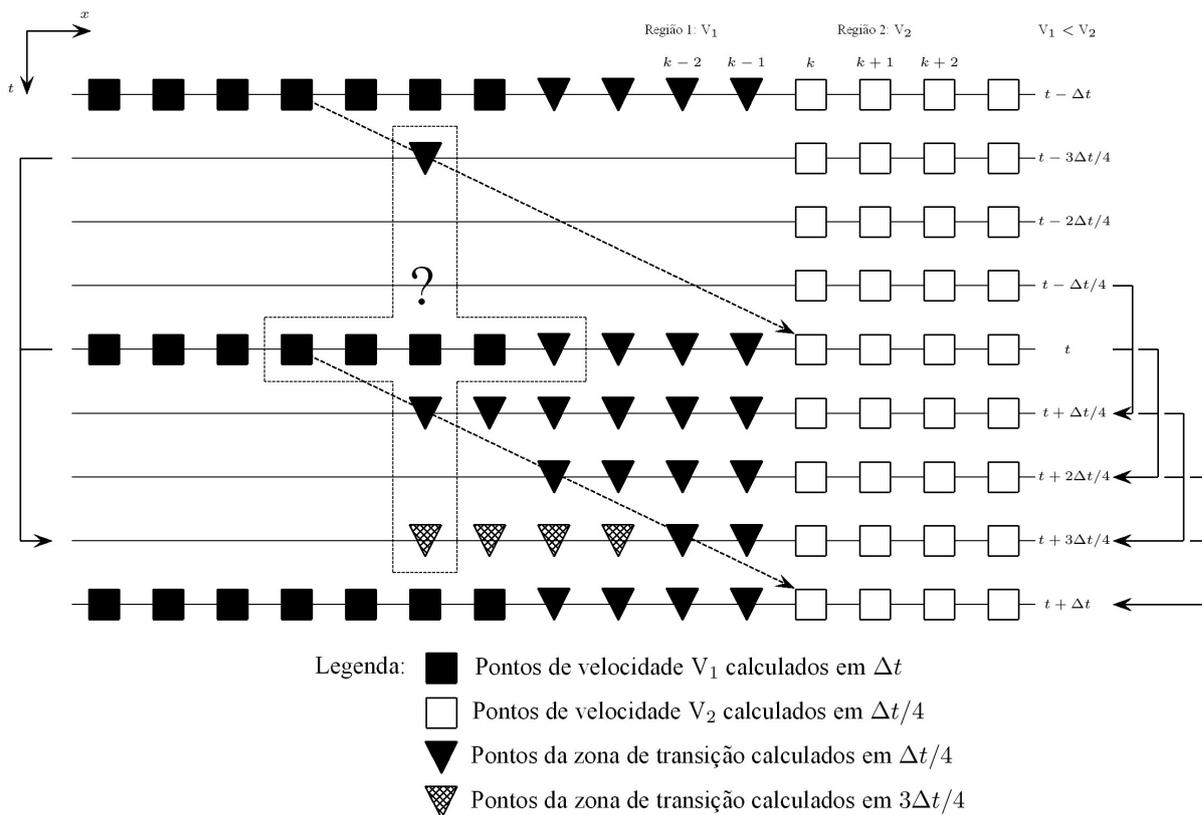


Figura 5.6: Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo - $t + 3\Delta t/4$.

Pode-se observar na Fig. 5.7 toda a região de transição triangular (RTT).

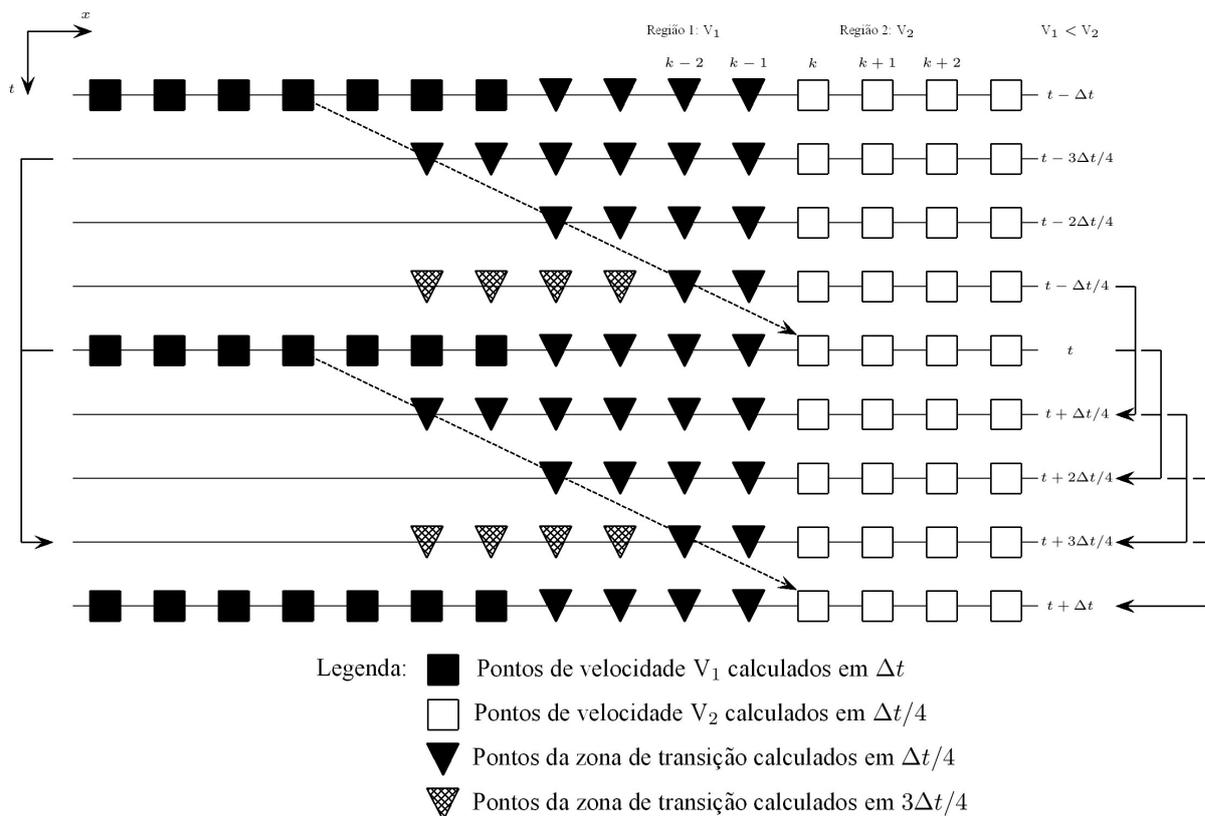


Figura 5.7: Esquema Triangular - 1D - aproximação 2-4 - 4 divisões do passo de tempo.

Apresenta-se, na sequência os resultados das simulações utilizando o algoritmo proposto nesse capítulo. Esta proposta, embora aumente o número de pontos na região de transição, resolve o problema referente ao aparecimento dos "ruídos" no sinal da onda próximos da interface de mudança da velocidade para simulações no limiar da estabilidade dos esquemas 2-2, 2-4 e 2-6.

5.1 Resultados 2D

Seguindo a mesma metodologia apresentada no capítulo anterior, comparam-se os resultados do algoritmo da Região de Transição Triangular (RTT) de forma análoga ao apresentado na Seção 4.3. A diferença é que, neste capítulo, as simulações estão no respectivo limite de estabilidade referentes a cada um dos esquemas testados (2-2, 2-4 e 2-6).

Adota-se o mesmo critério de comparação descrito na Subseção 4.3.1. Na primeira, compara-se o resultado do método adaptativo RTT com o método convencional, ou seja, aquele com o passo de tempo constante para todo o domínio. Na segunda, compara-se o

resultado do método adaptativo com o resultado adotado como referência, em que utiliza-se o resultado do método convencional em seu limite de estabilidade com discretizações, espacial e temporal, refinadas. Na Subseção 5.1.1 apresentam-se os resultados nos quais a subregião de maior velocidade de propagação do meio requer duas divisões do passo de tempo e na Subseção 5.1.2 apresentam-se os resultados nos quais a mesma requer quatro divisões do passo de tempo.

5.1.1 Duas divisões do passo de tempo

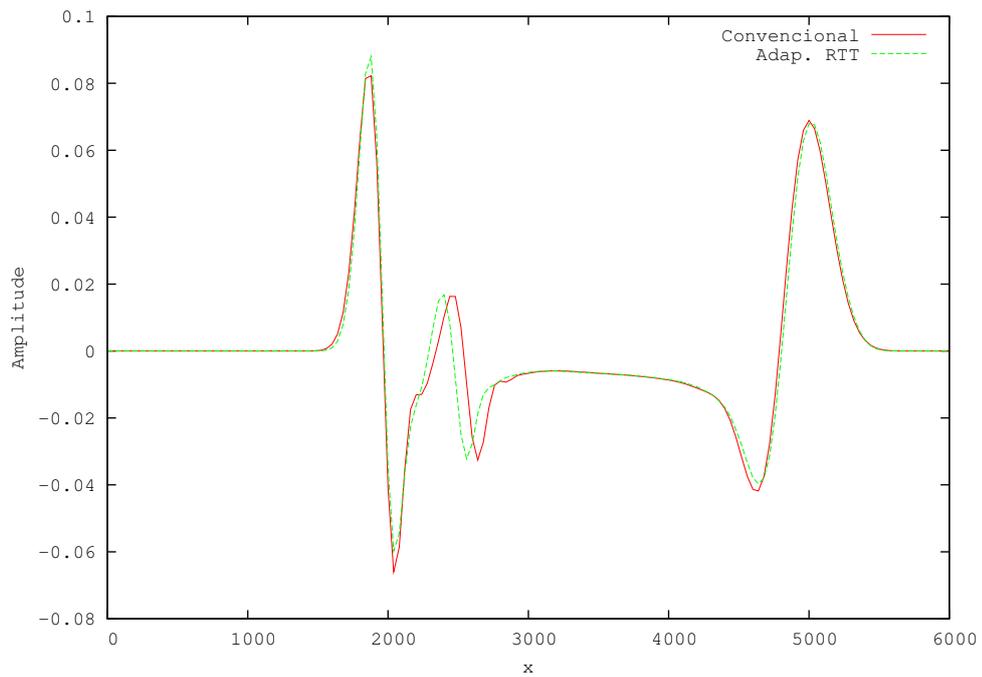
Conforme mencionado anteriormente, apresentam-se neste trabalho resultados das simulações da nova proposta de algoritmo, que chamamos de Região de Transição Triangular, com a qual pode-se utilizar números de Courant próximos ao limite de estabilidade do método, diferentemente dos algoritmos Falk et al. (1998) e Tessmer (2000). O domínio e campo de velocidades são os apresentados na Subseção 4.3.2.

Na Tabela 5.1 apresentam-se as discretizações utilizadas nas simulações do esquema convencional e do esquema de passos de tempo ajustados localmente (método adaptativo). O número de Courant utilizado é do limite de estabilidade de cada um dos esquemas 2-2, 2-4 e 2-6.

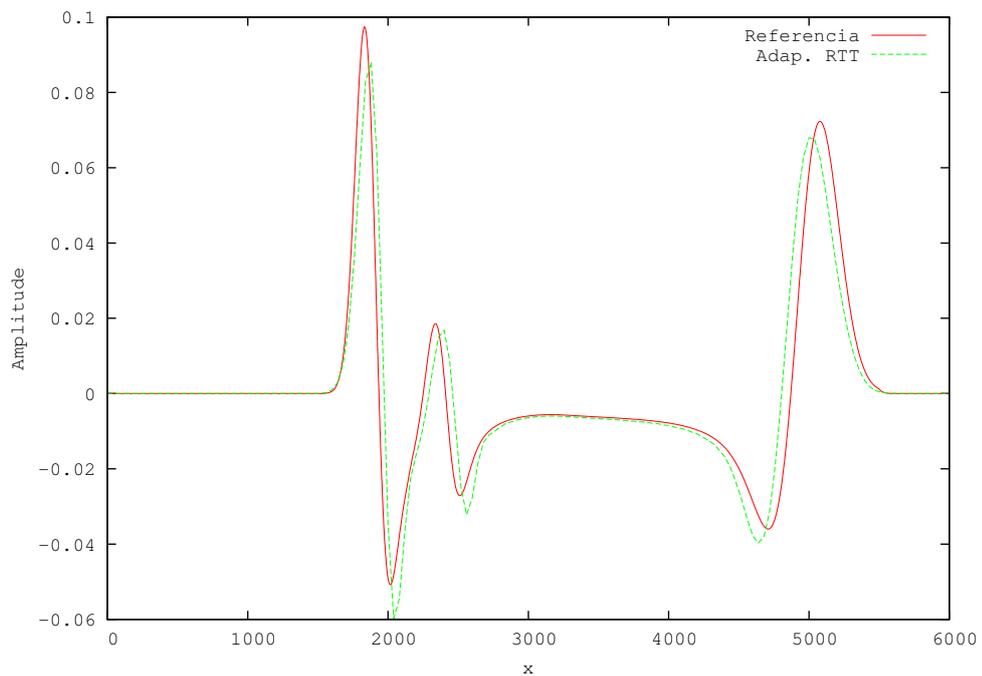
Esquema	N° Courant Limite	Δt_{min}	Δt_{max}
2 – 2	0,707	0,018853	0,037707
2 – 4	0,610	0,016627	0,032533
2 – 6	0,575	0,015333	0,030667

Tabela 5.1: Tabela com a discretização temporal - Domínio com $v_1 = 750m/s$ e $v_2 = 1.500m/s$

Conforme testes anteriores no esquema adaptativo a simulação trabalha com $\Delta t = \Delta t_{max}$ para o meio com a menor velocidade (v_1) e com $\Delta t = \Delta t_{min}$ para a região com a maior velocidade (v_2) e o convencional com $\Delta t = \Delta t_{min}$.

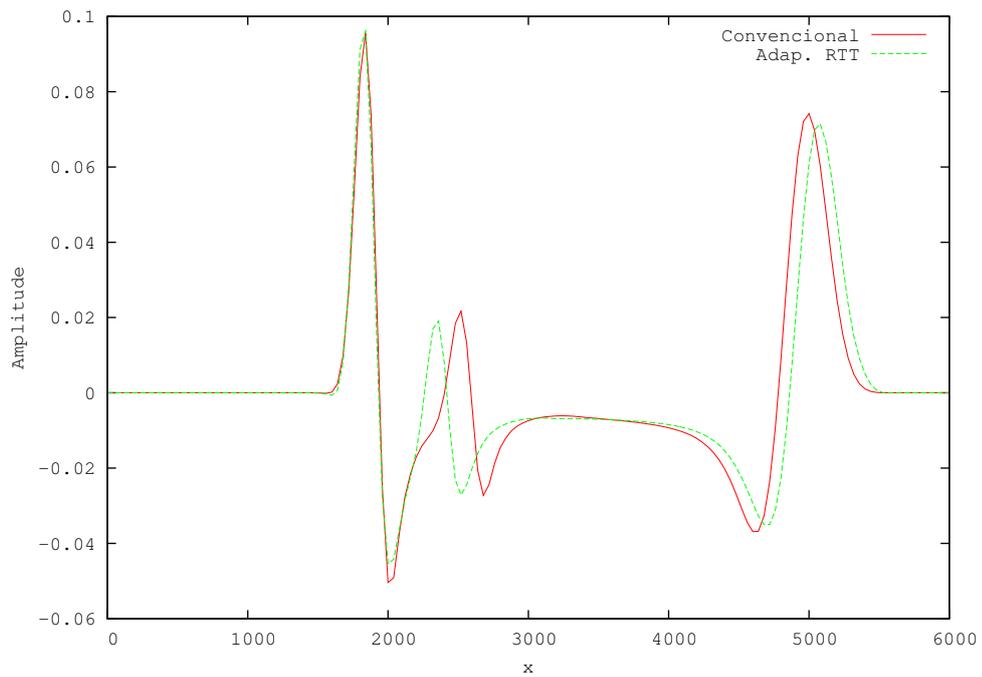


(a)

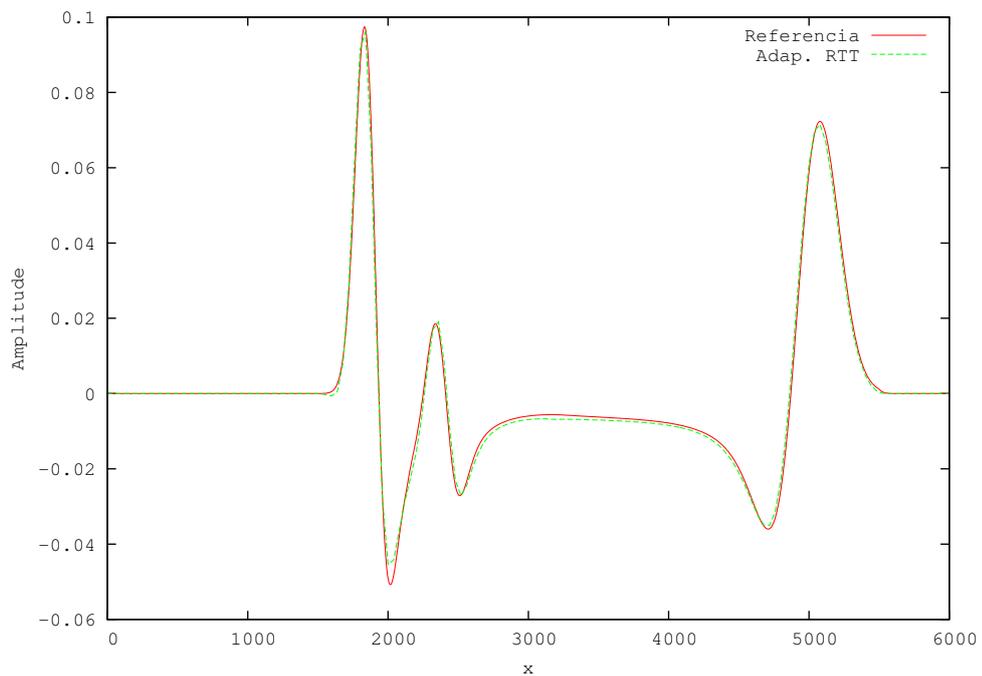


(b)

Figura 5.8: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

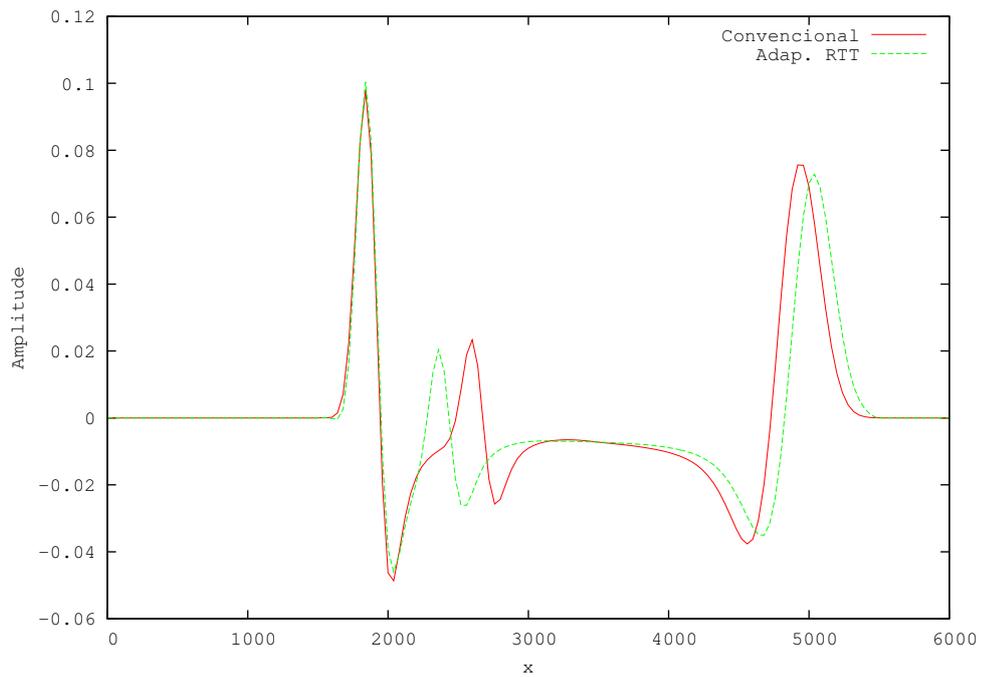


(a)

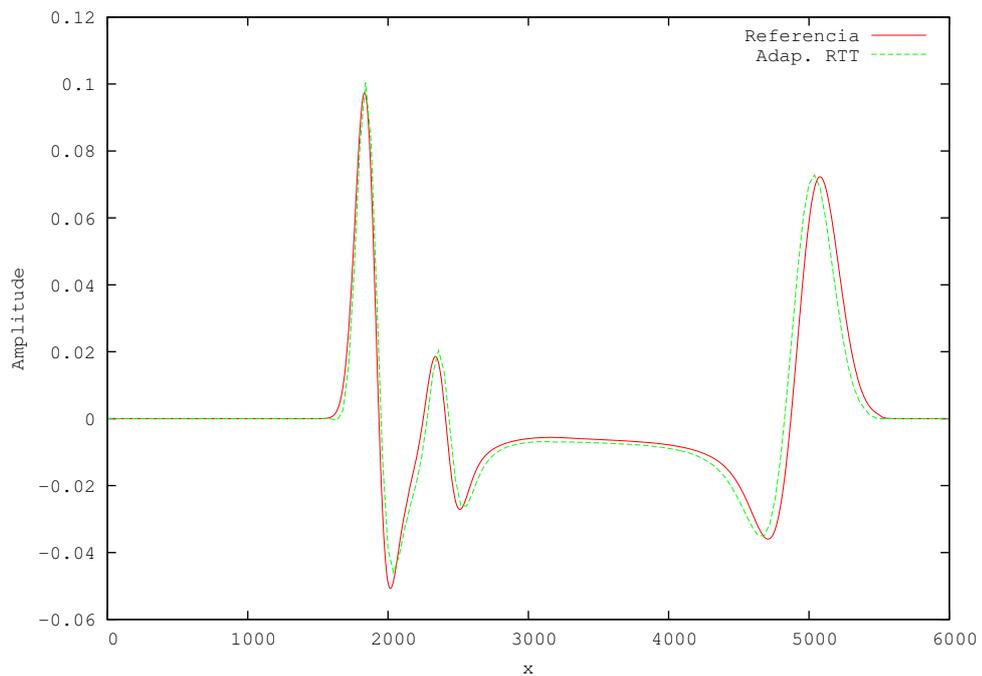


(b)

Figura 5.9: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-4). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.



(a)



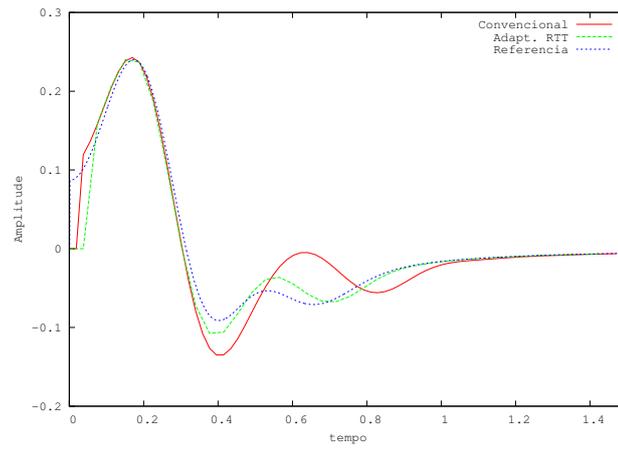
(b)

Figura 5.10: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-6). (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

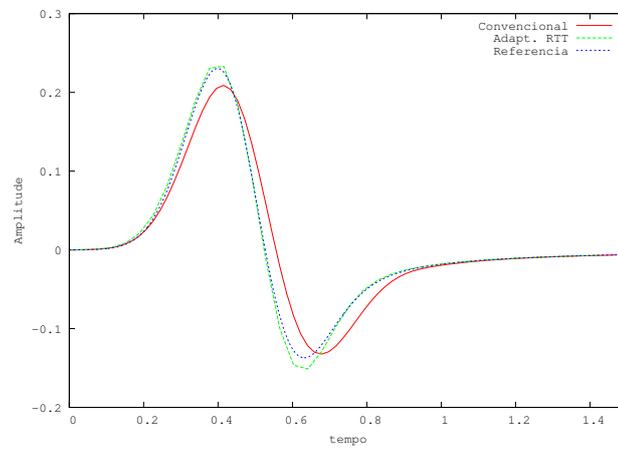
Pode-se observar nas Fig. 5.8 a 5.10 que o resultados das simulações com o novo algoritmo adaptativo (RTT) apresentam o mesmo comportamento, tanto quando comparados com o resultado do método convencional, com passo de tempo constante ($\Delta t = \Delta t_{mim}$

apresentado na Tabela 5.1), quanto comparados com o resultado de referência.

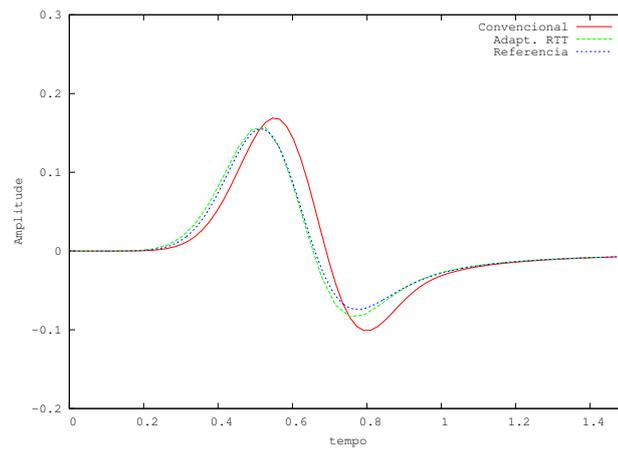
Mesmo simulado em seus respectivos limites de estabilidade, para as aproximações 2-2, 2-4 e 2-6, não aparecem os "ruídos" no sinal da onda garantindo, com isso, maior qualidade do resultado. Pode-se observar também que os resultados do RTT se aproximam mais dos resultados adotados como referência do que aqueles obtidos com Δt constante e $\Delta t = \Delta t_{min}$.



(a)

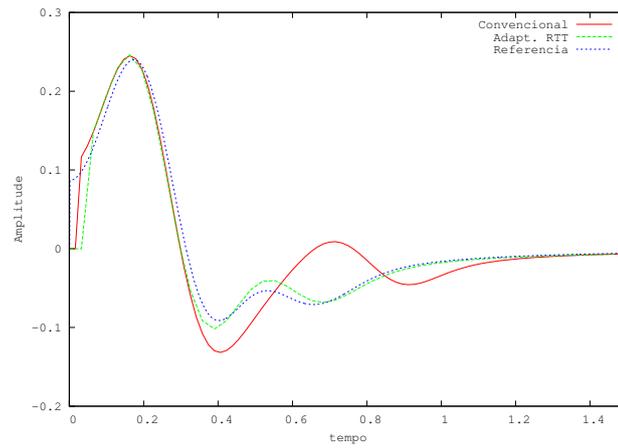


(b)

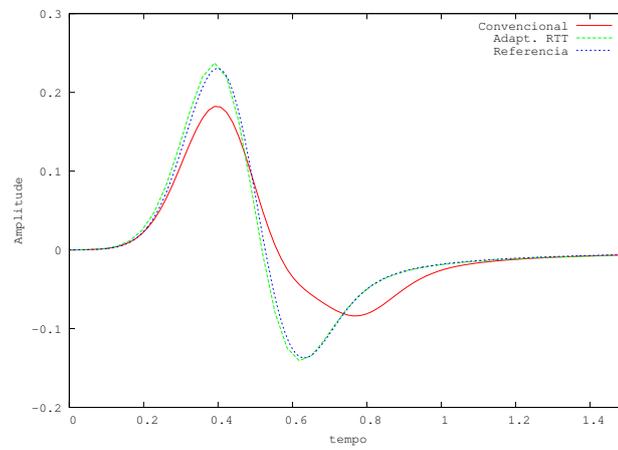


(c)

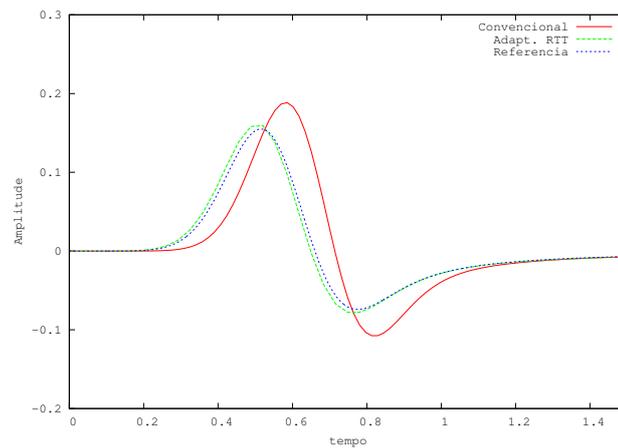
Figura 5.11: Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)

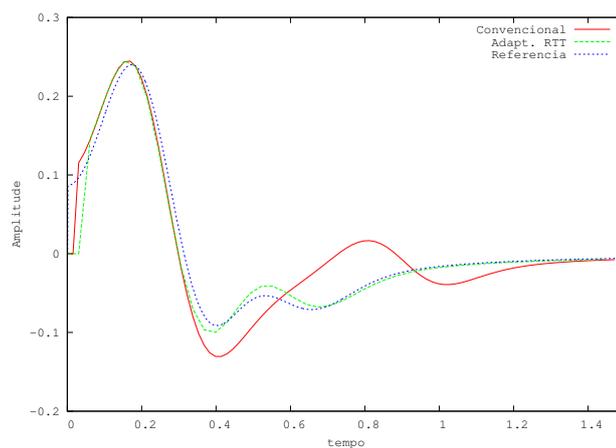


(b)

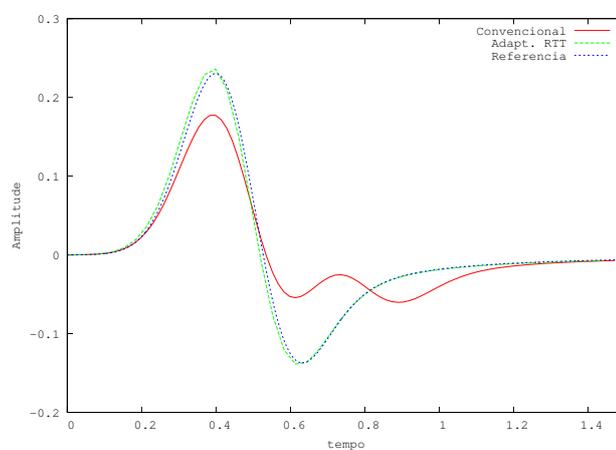


(c)

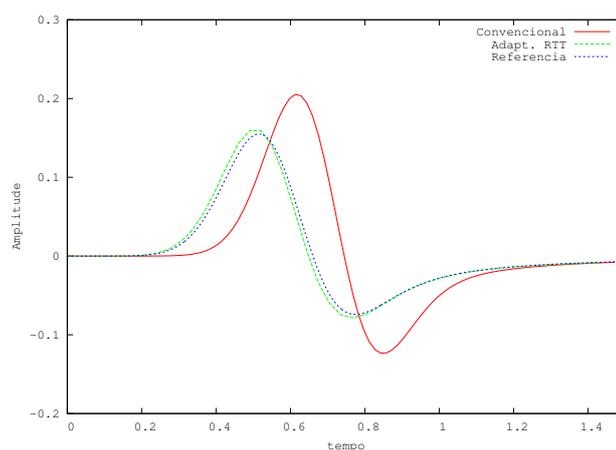
Figura 5.12: Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)



(b)

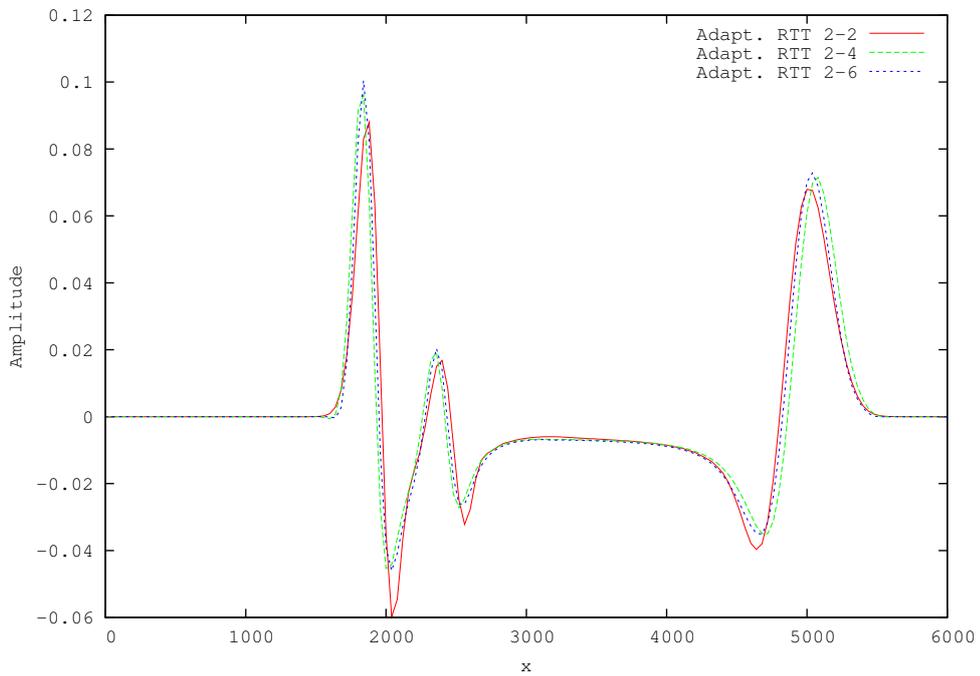


(c)

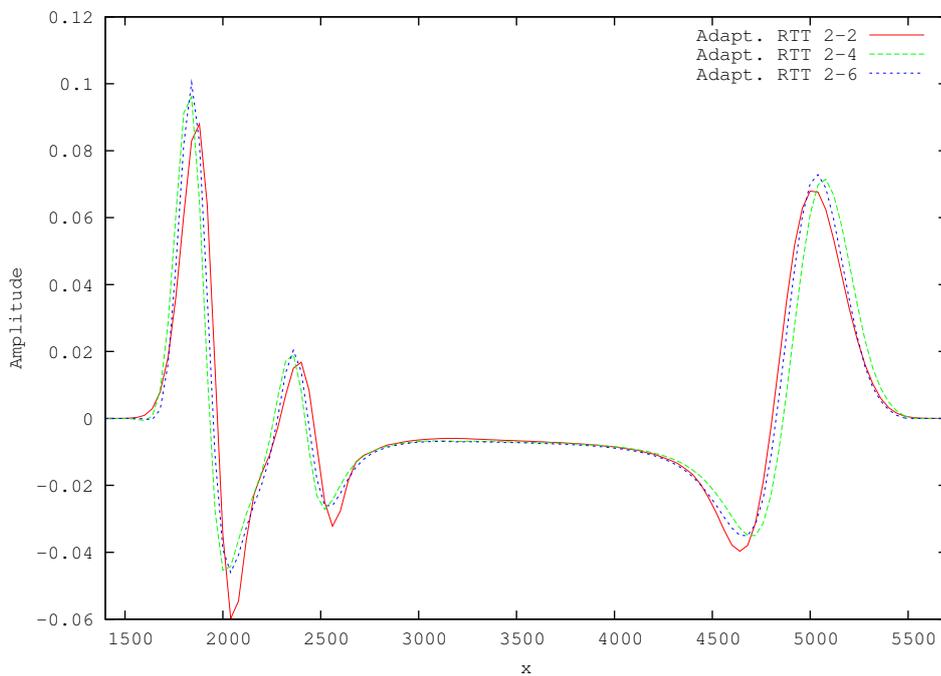
Figura 5.13: Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .

Tais resultados podem ser confirmados ao serem analisados os respectivos sismogramas apresentados nas Fig. 5.11 a 5.13. Pode-se observar que o sismograma referente à simulação do método adaptativo RTT tem melhor aproximação com o resultado adotado

como referência do que a simulação do método convencional correspondente.



(a)



(b)

Figura 5.14: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6) (a) Método Adaptativos em (b) Zoom em $[3.000m ; 6.000m]$.

Finalizando apresentam-se na Fig. 5.14 (a) seções nos resultados das simulações

dos métodos adaptativos RTT para as aproximações utilizadas neste trabalho. Em (b) apresenta-se um destaque para a região que evidencia as diferenças entre os esquemas 2-2, 2-4 e 2-6.

5.1.2 Quatro divisões do passo de tempo

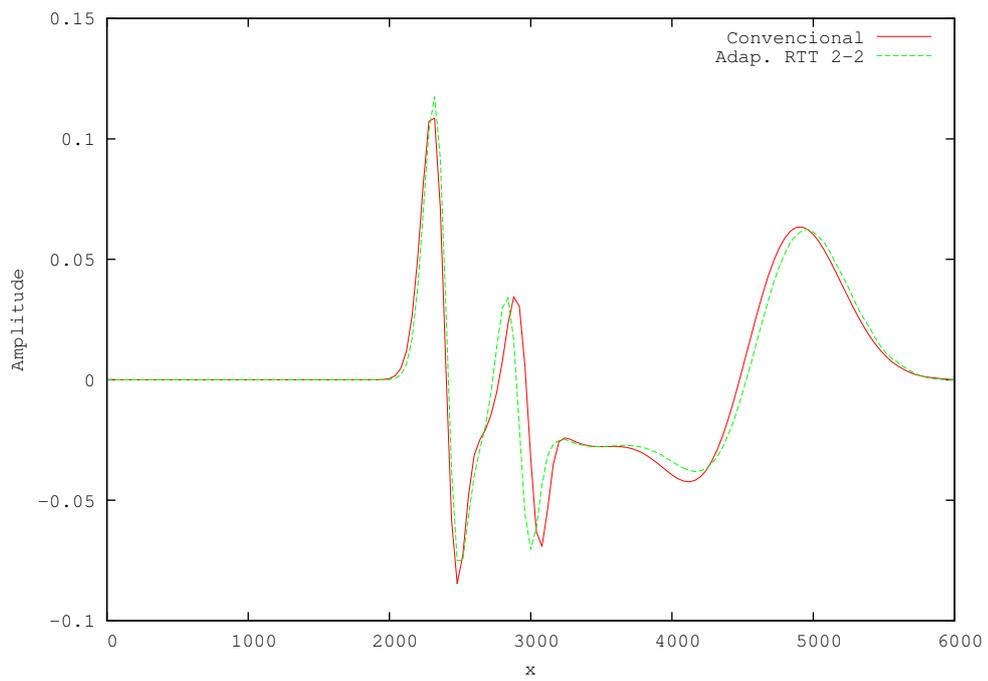
Nesta seção segue-se a mesma abordagem de comparação de resultados apresentada ao longo desse trabalho. Análogo ao apresentado na Subseção 4.3.3 neste teste a subregião com a maior velocidade requer quatro divisões do passo de tempo. Utiliza-se, portanto, o mesmo domínio e campo de velocidades.

Na Tabela 5.2 apresentam-se as discretizações utilizadas nos testes dessa subseção para as simulações do esquema convencional e do esquema de passos de tempo ajustados localmente (método adaptativo).

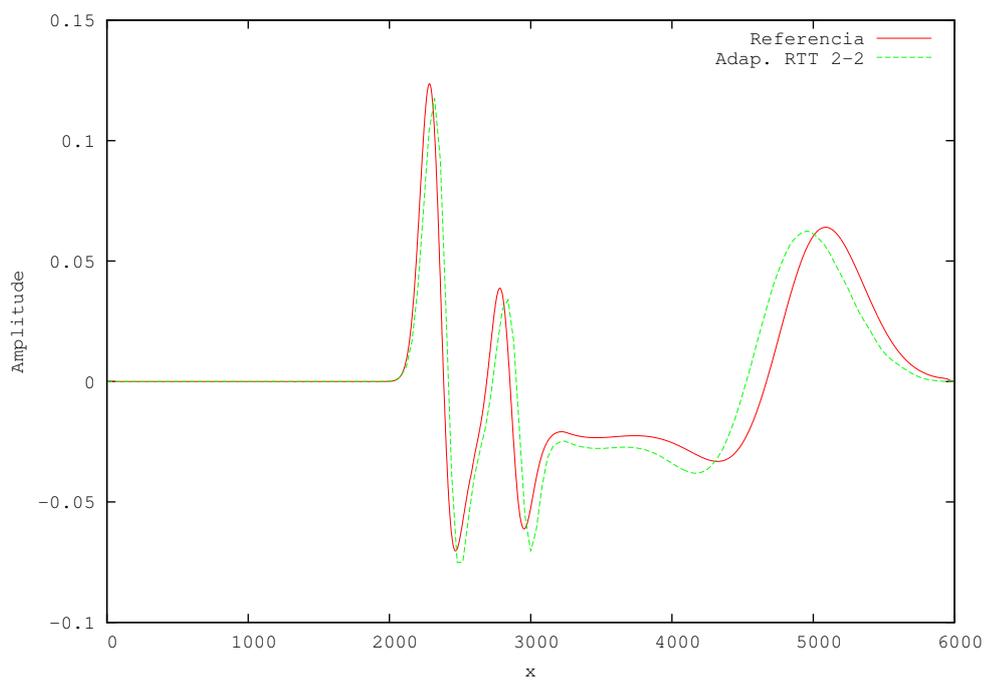
Esquema	N° Courant Limite	Δt_{min}	Δt_{max}
2 – 2	0,707	0,009427	0,037707
2 – 4	0,610	0,008133	0,032533
2 – 6	0,575	0,007667	0,030667

Tabela 5.2: Tabela com a discretização temporal - Domínio com $v_1 = 750m/s$ e $v_2 = 3000m/s$

Conforme testes anteriores no esquema adaptativo, a simulação trabalha com $\Delta t = \Delta t_{max}$ para o meio com a menor velocidade (v_1) e com $\Delta t = \Delta t_{min}$ para a região com a maior velocidade (v_2).

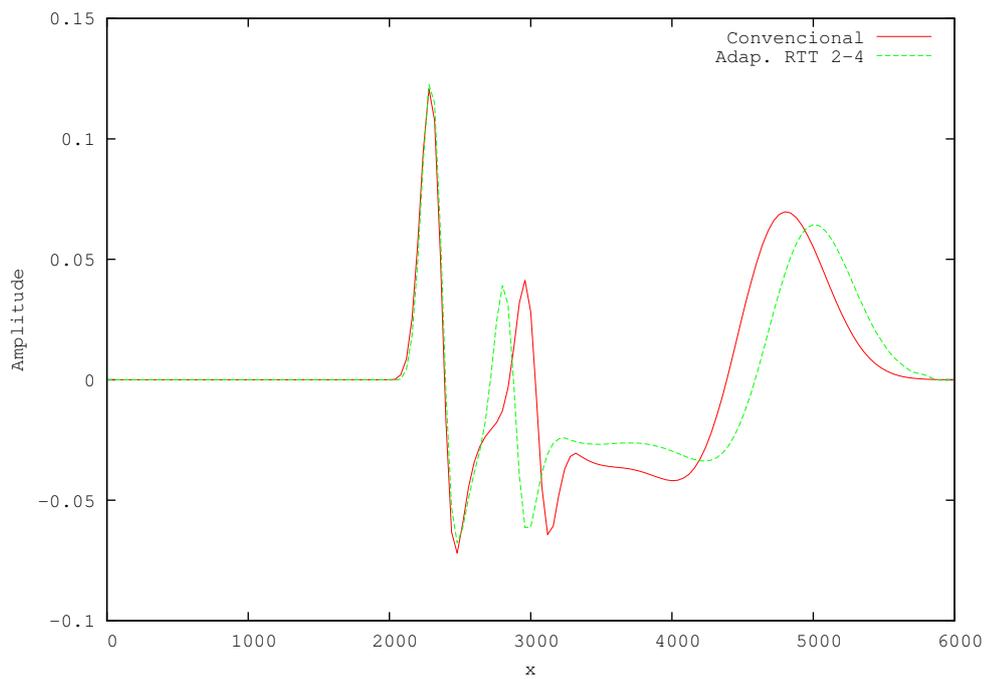


(a)

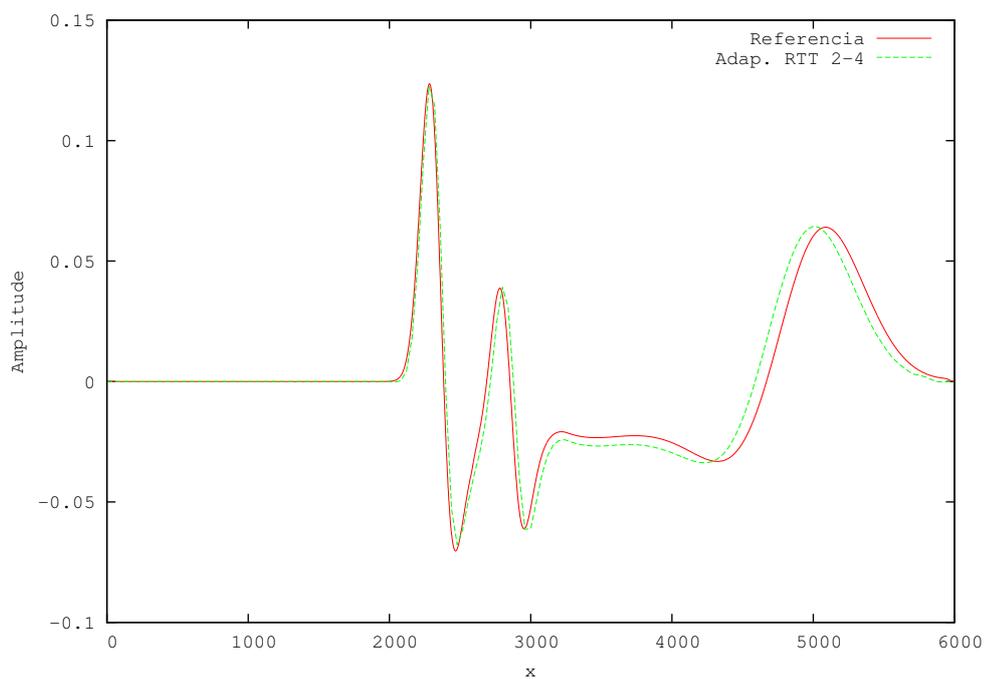


(b)

Figura 5.15: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2) (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

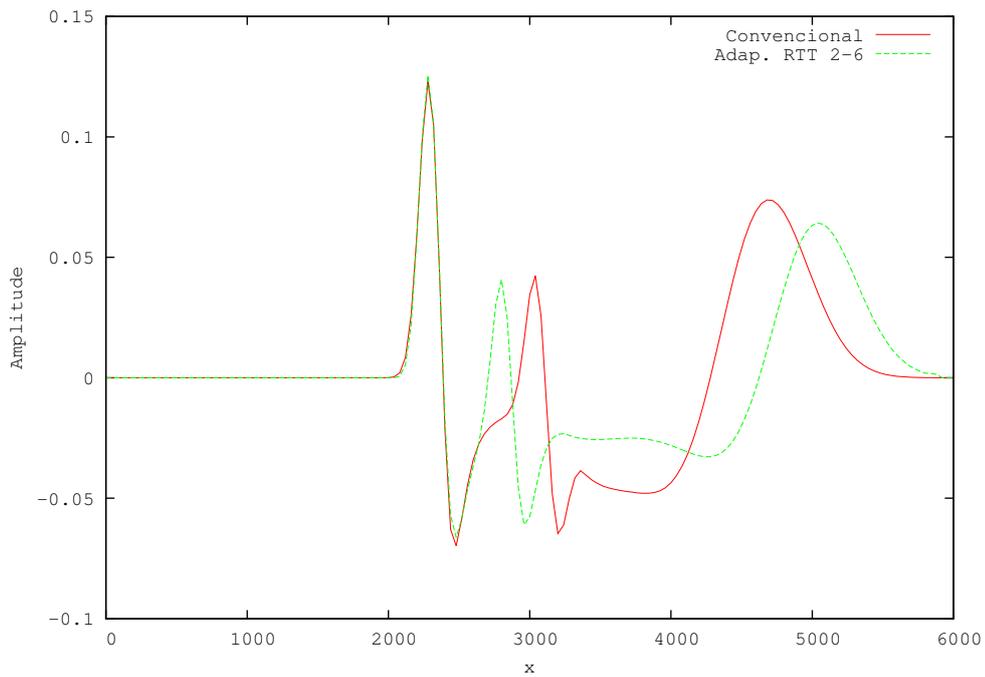


(a)

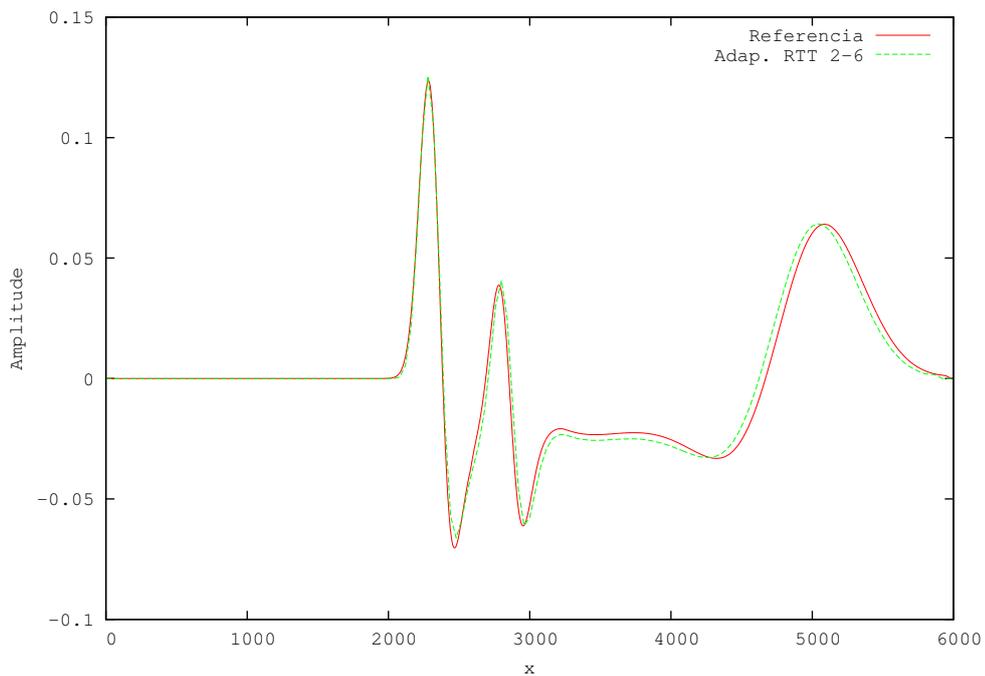


(b)

Figura 5.16: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-4) (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.



(a)

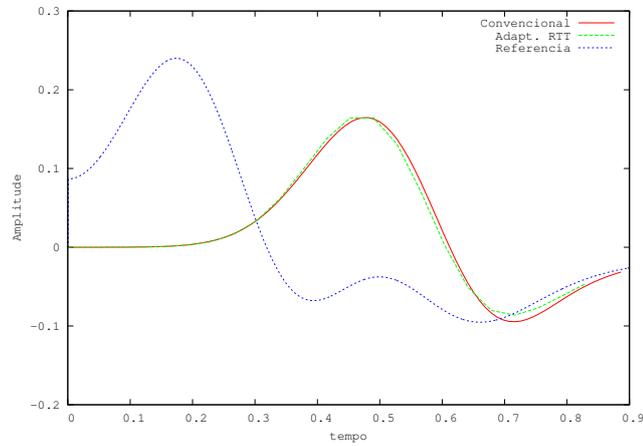


(b)

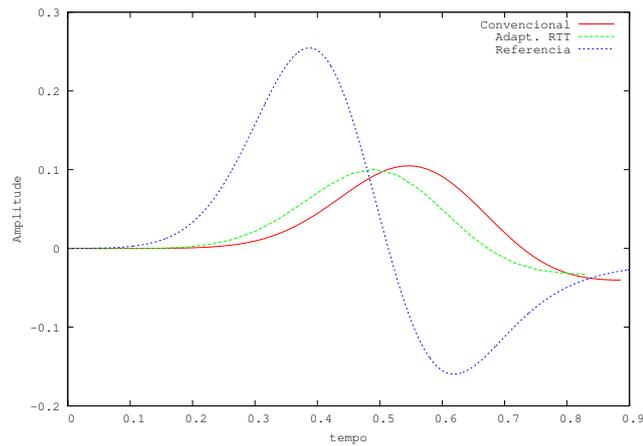
Figura 5.17: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-6) (a) Adaptativo x Convencional (b) Adaptativo x Referência.

As Fig. 5.15 a 5.17 apresentam as comparações dos resultados em $y = 3.000m$ para as respectivas aproximações, comparadas em (a) com o resultado correspondente do método convencional e em (b) com o resultado da simulação adotada como referência. Os resultados do método adaptativo novamente se aproximam mais do resultado adotado como

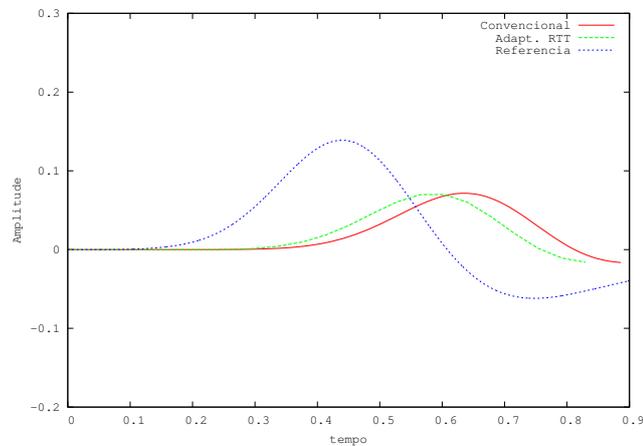
referência. Chegamos à mesma conclusão ao analisarmos os respectivos sismogramas apresentados nas Fig. 5.18 a 5.20 onde o resultado do método adaptativo é novamente mais próximo do resultado adotado como referência, do que o obtido na forma convencional.



(a)

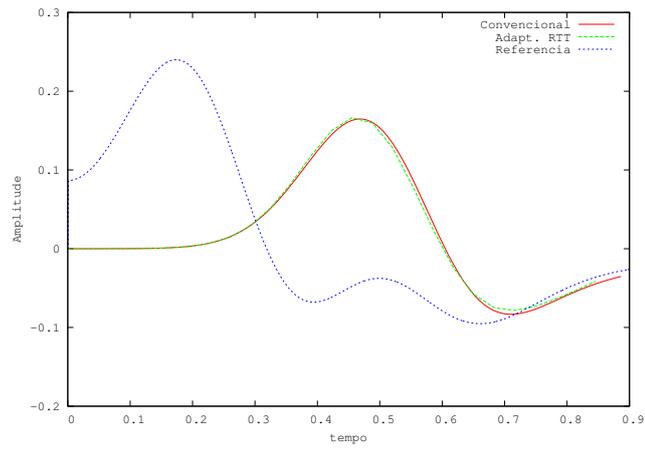


(b)

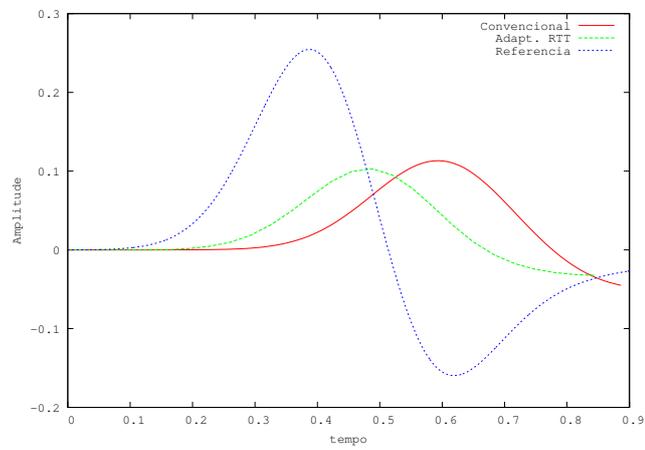


(c)

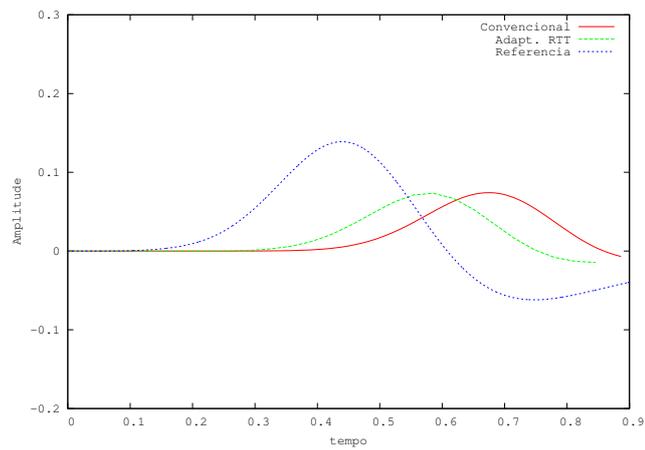
Figura 5.18: Sismogramas (aproximação 2-2) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)

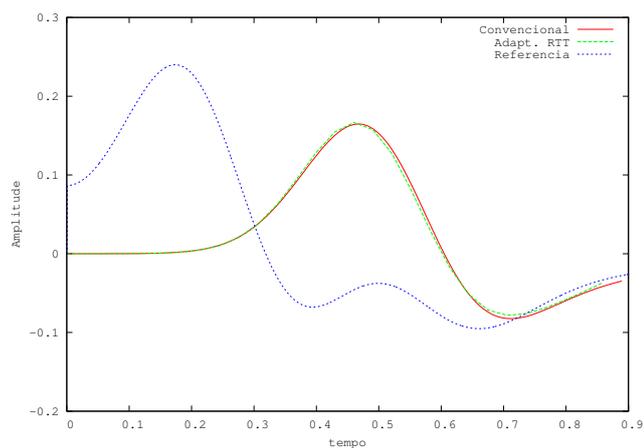


(b)

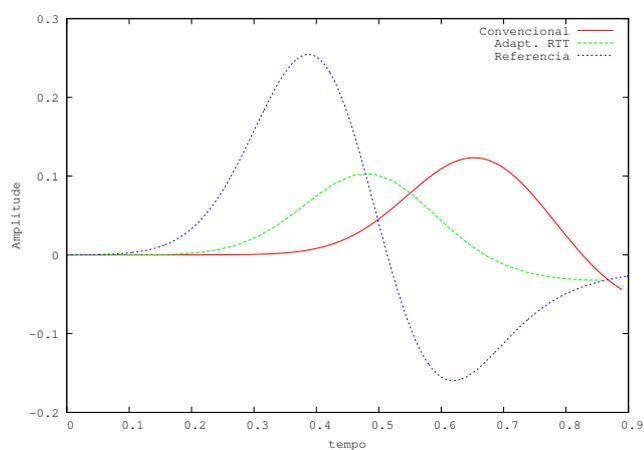


(c)

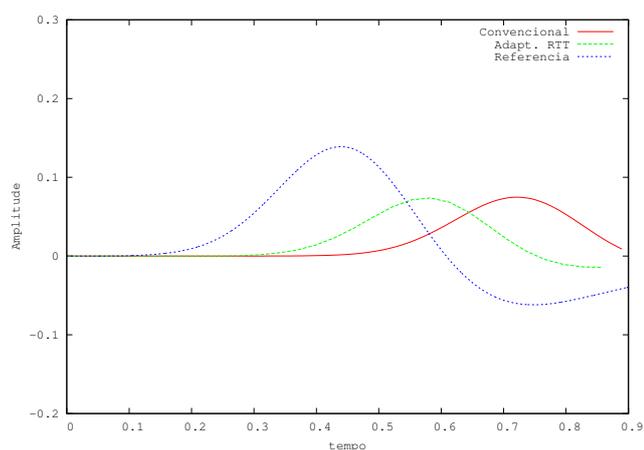
Figura 5.19: Sismogramas (aproximação 2-4) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .



(a)



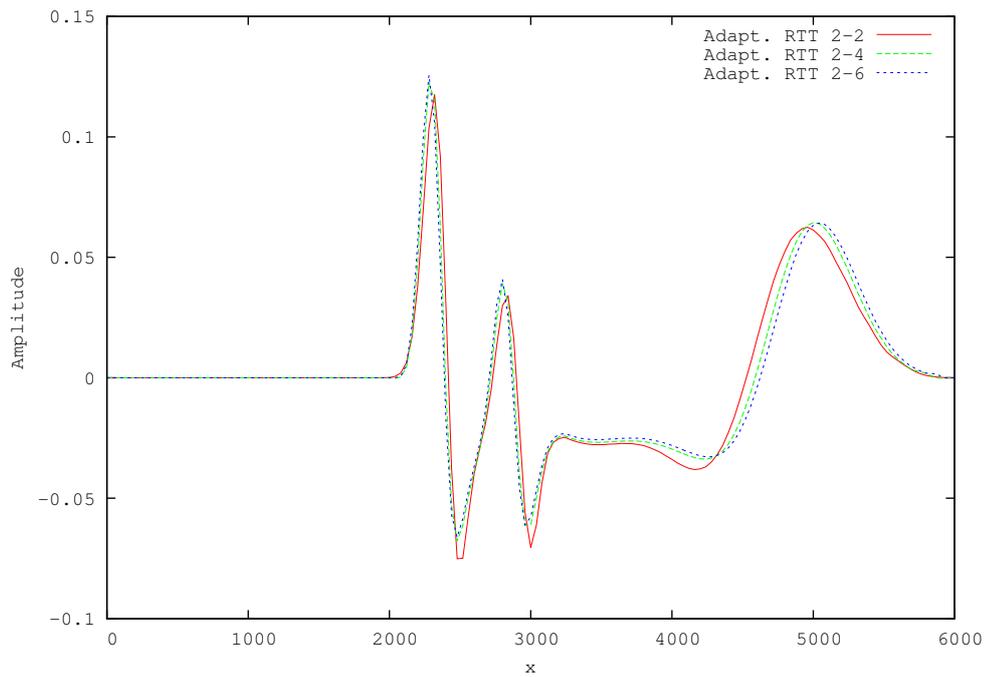
(b)



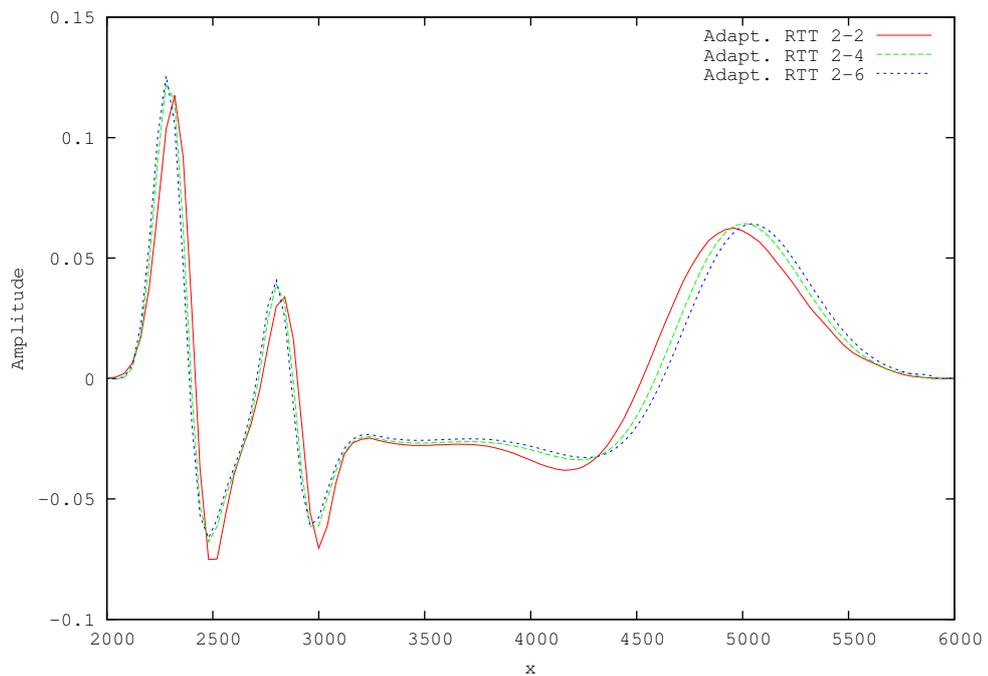
(c)

Figura 5.20: Sismogramas (aproximação 2-6) (a) ponto S_1 , (b) ponto S_2 e (c) ponto S_3 .

Apresentam-se na Fig. 5.21 (a) resultados dos métodos adaptativos RTT referentes a cada uma das aproximações utilizadas neste trabalho próximas ao limite de estabilidade e, em (b) um zoom onde destacamos a região próxima à interface da velocidade.



(a)



(b)

Figura 5.21: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6) (a) Método Adaptativos em (b) Zoom em $[3.000m ; 6.000m]$.

Quando simulado longe do limite de estabilidade do método, conforme apresentado no Cap. 4, o algoritmo RTT não apresenta diferenças visuais perceptíveis em relação aos algoritmos Falk et al. (1998) e Tessmer (2000).

5.2 Conclusões preliminares

Esses resultados mostram que o esquema adaptativo proposto, RTT, pode ser utilizado para simular no limite de Courant, ou seja, no limite de estabilidade do método. Pode representar uma melhoria na qualidade do resultado tendo em vista a dispersão ser menor nesse limite, Alford et al. (1974).

Esses resultados indicam a possibilidade de redução do custo computacional, pois além de trabalhar com o passo de tempo ajustado localmente existe a redução adicional por poder simular com discretizações temporais menos refinadas, ou seja, no limite da estabilidade do método.

5.2.1 Custo computacional

Apresenta-se, nesta subseção, um breve estudo comparativo do tempo de processamento envolvendo o algoritmo convencional (passo de tempo constante) com os adaptativos (passos de tempo ajustados localmente): Falk et al. (1998), Tessmer (2000) e RTT. Como não se teve a preocupação com uma programação otimizada, essa comparação não foi tão precisa, visto que não faz parte do escopo principal desse trabalho. Apesar disso, deve-se levar em consideração alguns aspectos dessas simulações: configuração do computador, esquemas (2-2, 2-4 e 2-6) e região de transição.

Os testes de desempenho foram executados numa máquina com a seguinte configuração básica: cpu MHz: 1200, cache size: 8192 KB e memória RAM: 8GB - Model name: Intel(R) Core(TM) i7 CPU 860 Processador (8M Cache, 2,80 GHz).

Os diferentes esquemas influenciam de várias formas a análise do custo computacional, por exemplo, limites de estabilidade, número de pontos, entre outros. Nos métodos de adaptatividade temporal, além desses aspectos, existe a diferença relativa aos números de pontos que precisam ser calculados na região de transição. Apresenta-se na Tabela 5.3 o número de pontos da região de transição de cada método adaptativo para cada um dos esquemas utilizados nesta dissertação. Nesse caso a região de maior velocidade requer que o maior passo de tempo utilizado seja dividido por dois.

Esquema	Falk et al. (1998)	Tessmer (2000)	RTT
2 – 2	1	1	2
2 – 4	2	2	4
2 – 6	3	3	6

Tabela 5.3: Tabela com a quantidade de pontos na região de transição - Duas divisões do passo de tempo.

Para o caso em que a região de maior velocidade requer quatro divisões do passo de tempo teremos as quantidades de pontos na região de transição apresentadas na Tabela 5.3.

Esquema	Falk et al. (1998)	Tessmer (2000)	RTT
2 – 2	4	3	8
2 – 4	8	6	16
2 – 6	12	9	24

Tabela 5.4: Tabela com a quantidade de pontos na região de transição - Quatro divisões do passo de tempo.

Para avaliar o custo computacional utilizou-se a mesma discretização espacial utilizada em nosso resultado de referência, ou seja, $\Delta h = \Delta x = \Delta y = 2,50$. Testou-se o desempenho para os esquemas 2-2, 2-4 e 2-6 que tem diferentes limites de estabilidade, conforme apresentado na Tabela 2.1. Utilizou-se, portanto, o $Courant = 0,575$, válido para todos os esquemas, como a referência para a escolha da discretização temporal. O esquema convencional foi simulado com uma discretização temporal ficando a um quarto da referência estabelecida para esses testes. Os adaptativos com a discretização temporal correspondente ao convencional. Deve-se ressaltar que, no caso dos adaptativos Falk et al. (1998) e Tessmer (2000), não se pode simular no limite da estabilidade do método devido ao aparecimento de "ruídos" no sinal da onda. Entretanto o algoritmo apresentado nesta dissertação, permite simulações no limite da estabilidade do método. Sendo assim, acrescentou-se o desempenho do algoritmo RTT no limite da estabilidade nesses testes.

Apresenta-se na Tabela 5.5 as discretizações temporais utilizadas e respectivas médias dos tempos de execução para um domínio em que a região de maior velocidade necessita, no algoritmo adaptativo, de duas divisões do passo de tempo. O instante de tempo final adotado nestes casos foi $t = 1,50s$

Esquema	Método	Δt_{min}	Δt_{max}	Tempo (T)	T_{adpt}/T_{conv}
	Convencional	0,000479	0,000479	36m27,32s	
2 – 2	Falk et al. (1998)	0,000479	0,000958	21m21,23s	58,58%
	RTT	0,000479	0,000958	21m25,83s	58,79%
	RTT (Limite)	0,000958	0,001916	10m58,77s	30,12%
	Convencional	0,000479	0,000479	49m51,89s	
2 – 4	Falk et al. (1998)	0,000479	0,000958	31m17,30s	62,75%
	RTT	0,000479	0,000958	31m19,07s	62,81%
	RTT (Limite)	0,000958	0,001916	18m35,58s	37,29%
	Convencional	0,000479	0,000479	01h11m45,14s	
2 – 6	Falk et al. (1998)	0,000479	0,000958	48m45,30s	67,95%
	RTT	0,000479	0,000958	48m39,15s	67,81%
	RTT (Limite)	0,000958	0,001916	35m18,10s	49,20%

Tabela 5.5: Tabela com os tempos das simulações - Duas divisões do passo de tempo.

Para os mesmos métodos (convencional e adaptativo) os resultados entre os esquemas testados (2-2, 2-4 e 2-6) não apresentam diferenças visuais perceptíveis. Portanto, na Fig. 5.22, usou-se uma única solução para os métodos convencionais (2-2, 2-4 e 2-6) e para os métodos adaptativos (Falk et al. (1998) e RTT). Pode-se observar, nesta mesma figura, que os resultados não apresentam diferenças visuais perceptíveis entre os métodos adaptativos longe do limite de estabilidade e nesse mesmo limite. O método adaptativo RTT teve um melhor desempenho relativo ao custo computacional, portanto podemos afirmar que a proposta apresentada nesta dissertação produz um resultado com a mesma qualidade com um menor tempo de simulação implicando num ganho no custo computacional.

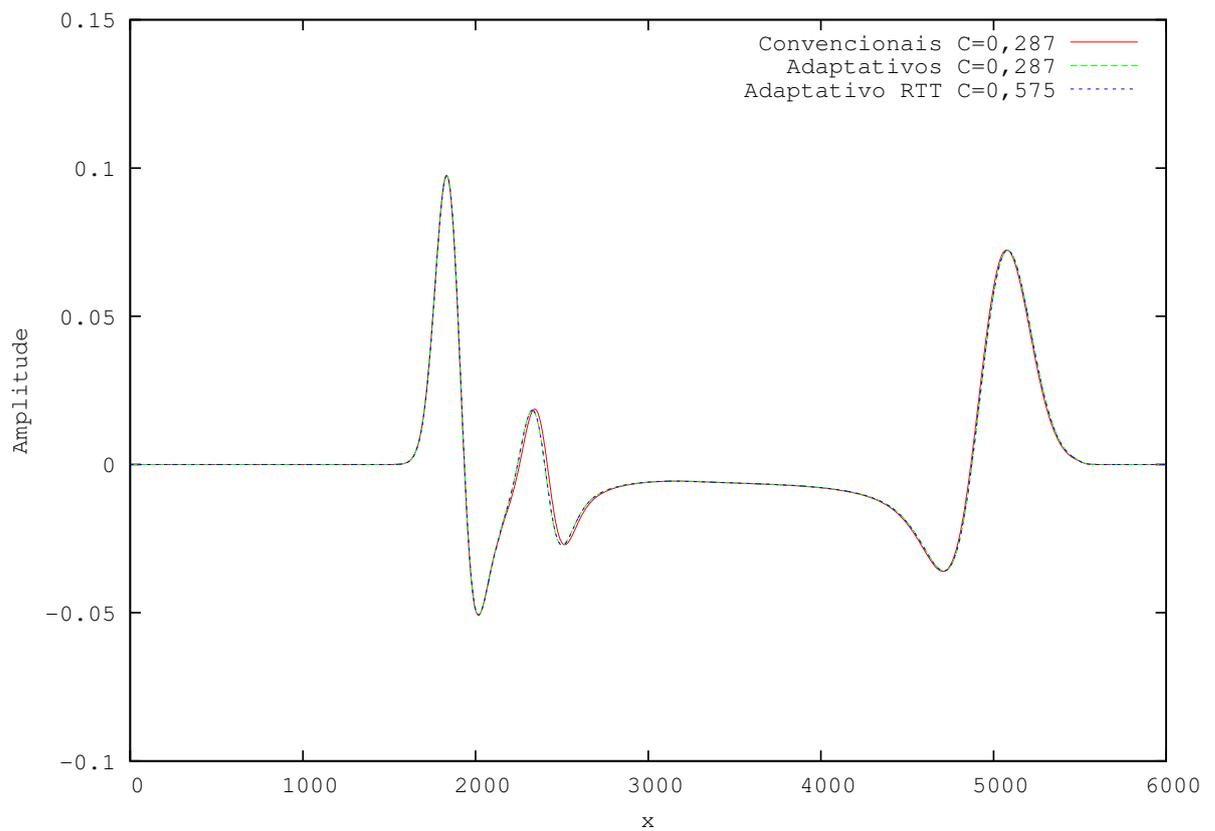


Figura 5.22: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 1,50s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6). Métodos: Adaptativos x Convencionais x RTT no Limite.

Seguindo o mesmo critério, apresentam-se na Tabela 5.6 as discretizações temporais utilizadas e respectivas médias dos tempos de execução para um domínio em que a região de maior velocidade necessita, no algoritmo adaptativo, de quatro divisões do passo de tempo.

Esquema	Método	Δt_{min}	Δt_{max}	Tempo (T)	T_{adpt}/T_{conv}
2 – 2	Convencional	0,000119	0,000119	01h25m59,17s	
	Falk et al. (1998)	0,000119	0,000479	45m56,75s	52,84%
	Tessmer (2000)	0,000119	0,000479	31m59,69s	37,38%
	RTT	0,000119	0,000479	45m07,38s	53,01%
	RTT (Limite)	0,000479	0,001916	12m05,61s	14,07%
2 – 4	Convencional	0,000119	0,000119	01h55m32,80s	
	Falk et al. (1998)	0,000119	0,000479	50m42,61s	43,89%
	Tessmer (2000)	0,000119	0,000479	50m43,46s	43,90%
	RTT	0,000119	0,000479	50m43,46s	43,90%
	RTT (Limite)	0,000479	0,001916	15m55,01s	13,78%
2 – 6	Convencional	0,000119	0,000119	02h40m37,20s	
	Falk et al. (1998)	0,000119	0,000479	01h18m46,20s	49,04%
	Tessmer (2000)	0,000119	0,000479	01h09m28,97s	43,26%
	RTT	0,000119	0,000479	01h09m28,97s	43,26%
	RTT (Limite)	0,000479	0,001916	23m50,26s	14,84%

Tabela 5.6: Tabela com os tempos das simulações - Quatro divisões do passo de tempo.

Novamente comparamos os resultados conforme descrito anteriormente. A única diferença é a inclusão do algoritmo Tessmer (2000) entre os métodos adaptativos. A conclusão é ratificada onde novamente pode-se observar, agora na Fig. 5.23, que o método RTT no limite da estabilidade produz um resultado de mesma qualidade com um menor custo computacional.

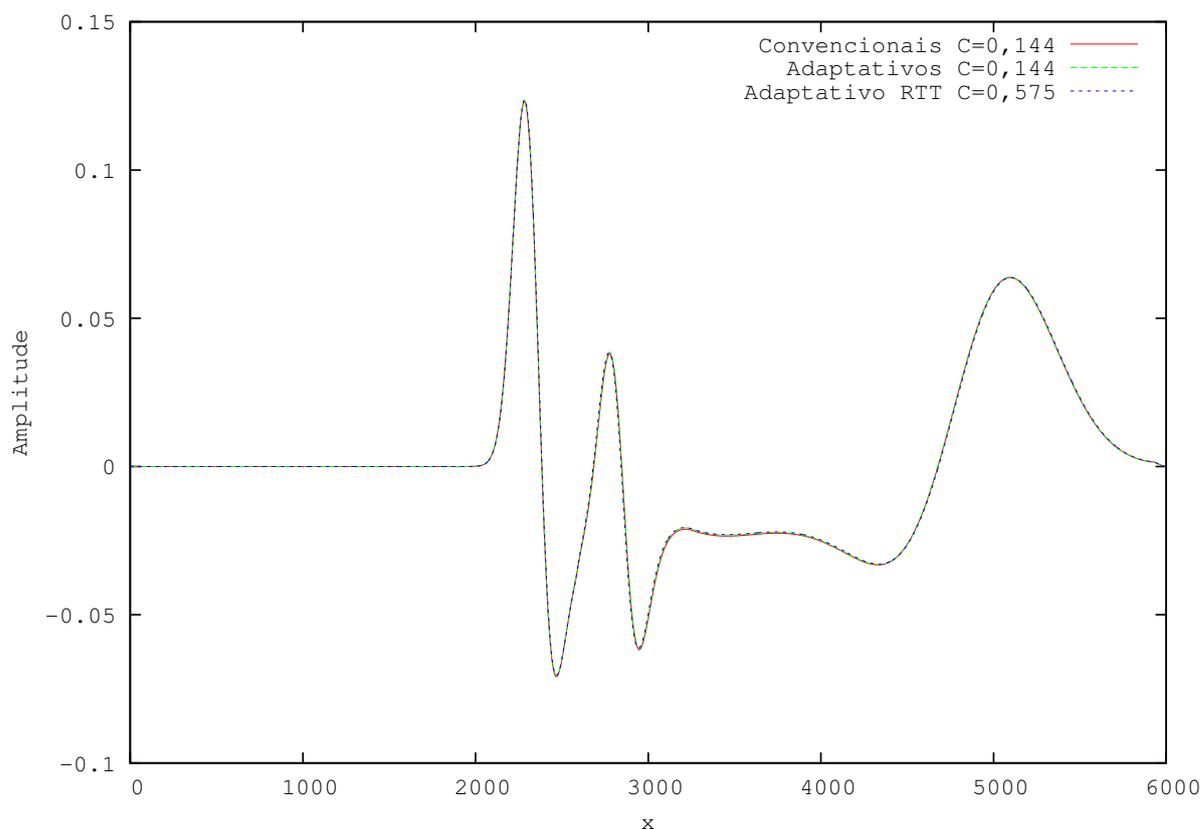


Figura 5.23: Solução em $y = 3.000m$ e $t = 0,90s$ (aproximação 2-2, 2-4 e 2-6). Métodos: Adaptativos x Convencionais x RTT no Limite.

Pode-se notar, como esperado, que nos métodos convencionais o aumento da ordem aumenta o custo computacional. Apesar do tempo de processamento ser menor para os métodos adaptativos também ocorre um aumento desse custo computacional a medida em que aumentamos a ordem espacial do esquema. Os algoritmos adaptativos, Falk et al. (1998) e Tessmer (2000), como visto neste trabalho, não podem ser simulados no limite de estabilidade dos respectivos métodos, devido ao aparecimento de "ruídos" no sinal da onda. Esses dados não são conclusivos, pela simplicidade de nossos testes, mas indicam que este novo algoritmo, em simulações no limiar de estabilidade do método, podem representar um ganho significativo no custo computacional reproduzindo uma qualidade na aproximação satisfatória quando comparadas com os resultados dos outros métodos: convencional, Falk et al. (1998) e Tessmer (2000).

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho, foram testados e avaliados dois algoritmos que utilizam passos de tempo localmente ajustáveis para resolução do problema de onda acústica utilizando o Método das Diferenças Finitas [6, 7]. A implementação do problema unidimensional foi utilizada para entender e validar a aplicabilidade desses algoritmos: Falk et al. (1998) e Tessmer (2000). Os algoritmos citados foram implementados e os respectivos resultados das simulações para o caso bidimensional foram apresentadas. Foram utilizadas aproximações de segunda ordem no tempo e de segunda, quarta e sexta ordem no espaço. Além dos esquemas tradicionais apresentados neste trabalho, realizou-se testes em esquemas compactos com sucesso, cujos resultados não foram apresentados por manterem as mesmas características aqui descritas.

Mesmo não sendo o foco de nosso trabalho, algumas experiências extras realizadas apontam para um ganho real de desempenho no uso da discretização temporal adaptativa quando maior parte do meio possui menor velocidade. Concluiu-se, portanto, que o ganho significativo de desempenho é dependente do meio de velocidades testado. No entanto esses algoritmos requerem um espaço adicional de memória, pois na região de transição, há necessidade de armazenamento de um maior número de informações do que aqueles requeridos em um esquema convencional que é nenhuma.

Em relação a acurácia, esses esquemas mostraram-se precisos quando utilizam-se discretizações que conduzem a valores com razoável distância do limiar de estabilidade do método de diferenças finitas utilizada ($\beta \leq 4$) conforme empregado na literatura citada neste trabalho. As diferenças visuais entre os resultados adaptativos e o convencional são pequenas obedecendo aos critérios de dispersão na escolha das discretizações espacial e temporal. Entretanto, ao simular os algoritmos existentes na literatura, no limiar da estabilidade, aparecem "*ruídos*" no sinal da onda que, ao longo do tempo, inviabilizam o

resultado. Para resolver esse problema apresenta-se uma nova proposta de algoritmo que foi chamada de Região de Transição Triangular (RTT), que não apresenta os "ruídos" descritos anteriormente, quando se trabalha próximo ao limite de estabilidade do método considerado.

Com a nova proposta tem-se um ganho, dessa forma, no custo computacional (tempo), em relação aos demais algoritmos adaptativos, pois podem ser utilizados valores de Δt menos refinados. Outra vantagem que pode ser citada, comparando-se com os outros algoritmos adaptativos: a proposta RTT é mais fácil de ser generalizada para qualquer divisão do passo de tempo.

Nas implementações desenvolvidas não nos preocupamos com o uso eficiente do algoritmo, relativo a economia de memória ou na otimização da estrutura de dados utilizada. Acredita-se que não é operação complexa trabalhar numa versão mais econômica no uso da memória. No entanto, a necessidade de um melhor uso de memória deverá ser levado em consideração, em futuras otimizações destes algoritmos, principalmente se for implementado para implementações em paralelo e as que utilizam a arquitetura de GPUs (Graphics Processing Unit).

Para as simulações realizadas, os campos de velocidade foram definidos estaticamente devido o foco do trabalho ser a análise do método em casos mais simplificados. Entretanto, outro aspecto a ser pesquisado está na definição das subregiões para utilizar o método adaptativo em domínios mais complexos. Para esta questão é razoável afirmar que a utilização eficiente dos métodos adaptativos está condicionada a uma fase de pré-processamento tendo como informação organizadora a transformação do campo de velocidades em um campo de Δt 's.

Outra questão importante está na paralelização deste algoritmo, pois cada subdomínio terá um tempo de processamento distinto devido aos diferentes números de passos no tempo. Assim, a subdivisão do domínio deve levar tal aspecto em consideração para que não seja gerado um desbalanceamento de carga que poderia fazer com que as vantagens do algoritmo desaparecessem. Uma solução seria um balanceamento de carga dinâmico mas isto envolveria complicações extras. No entanto, um pré-processamento semelhante ao do caso não paralelo pode ser elaborado de forma que um balanceamento estático seja imposto, o que pode ser mais eficiente e simples.

6.1 Referências Bibliográficas

1. Fortuna, Armando de Oliveira, Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações/Armando de Oliveira Fortuna - São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000 - (Acadêmica;30).
2. D. M. Boore, Finite-Difference Methods for Seismic Wave Propagation in Heterogeneous Materials, Method in Computational Physics, Academic Press, New York, 1972, vol 39.
3. J. Virieux, P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, Geophysics, 1986, vol 51, pp 889–901.
4. K. S. Yee, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations, Journal IEE Trans. Antenn. Propagat., 1966, vol 14, pp 302–307.
5. Z. Alterman and F. C. Karal Jr., Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods, Bulletin of the Seismological Society of America, 1968, vol 58, pp 367–398.
6. R.M., Alford, K.R. Kelly, D.M. Boore, Accuracy of Finite-difference Modeling of the Accoustic Wave Equation, Geophysics, 39, No. 6, P.834-842 (1974)
7. Falk, J., Tessmer, E. and Gajewski D., Efficient finite-difference modelling of seismic waves using locally adjustable time steps, Geophysical Prospecting, 1998, 46, 603-616.
8. Tessmer, E., Seismic finite-difference modeling with spatially varying time steps, 2000, 65, Geophysical Prospecting, 1290–1293
9. Bulcão, André, Modelagem e Migração Reversa no Tempo Empregando Operadores Elásticos e Acústicos, COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Civil, vii, 349 p. 29,7 cm, 2004.
10. Tucci, C. E. M. Modelos hidrológicos. Porto Alegre: Universidade/UFRGS/ABRH, 1998.
11. Daripa, Prabir, A new theory for one-dimensional adaptive grid generation and its application, Journal on Numerical Analysis, SIAM, Volume 28, Issue 6, pp 1635-1660, 1991.

12. Jameson, Leland, A wavelet-optimized, very order adaptive grid and order numerical method, *Journal on Scientific Computing*, SIAM, Volume 19, Issue 6, pp 1980-2013, 1998.
13. Silva, Ana Maria dos Santos da, Estudo da Variação de Amplitudes com o Ângulo (AVA) Através do Emprego de Diferentes Formas de Extrapolação Nas Imagens Oriundas Da Migração Reversa No Tempo, UFRJ/COPPE, IX, 92 p.: il.; 29,7 cm, 2009.
14. Ferreira, Patricia Perez, Características da Atenuação das Reflexões Múltiplas da Superfície Livre Utilizando a Extrapolação do Campo de Onda, UFRJ/COPPE, X, 151 p.: il.; 29,7 cm, 2009.