

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

CLÁUTENIS CARVALHO VIANA

$M_{3 \times 3}$ -obstrução minimal de cografos

NITERÓI

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

CLÁUTENIS CARVALHO VIANA

$M_{3 \times 3}$ -obstrução minimal de cografos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre. Área de concentração: Otimização Combinatória.

Orientador:

Loana Tito Nogueira

Co-orientador:

Raquel de Souza Francisco Bravo

NITERÓI

2013

$M_{3 \times 3}$ -obstrução minimal de cografos

Cláutenis Carvalho Viana

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Aprovada por:

Profa. Dra. Loana Tito Nogueira / IC-UFF (Presidente)

Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo

Prof. Dr. Fábio Protti / UFF

Prof. Dra. Sulamita Klein / UFRJ

Niterói, xx de xx de 2013.

"O assunto mais importante do mundo pode ser simplificado até o ponto em que todos possam apreciá-lo e compreendê-lo.

Isso é - ou deveria ser - a mais elevada forma da arte!"

C. Chaplin

Resumo

Esta dissertação apresenta um estudo em partição de grafos numa subclasse dos grafos perfeitos. Apresentamos uma caracterização dos cografos cujo conjunto dos vértices pode ser particionados em k conjuntos independentes: S_1, \dots, S_k e ℓ cliques: $C_{k+1}, \dots, C_{k+\ell}$ e consideramos todas as possíveis restrições externas entre as partes, i.e., para quaisquer duas partes i e j , definimos se i e j são completamente adjacentes, completamente não adjacentes ou sem restrições. Para representar tais restrições, utilizamos uma matriz quadrada M de ordem $k + \ell$ onde um elemento $M_{i,i}$ na diagonal principal representa a restrição interna na parte i , ou seja, se i é um conjunto independente, uma clique ou se não há restrição, enquanto que um elemento $M_{i,j}$ fora da diagonal principal representa a restrição externa entre as partes i e j . Dizemos que um grafo G é M -particionável (ou que G admite uma M -partição) quando admite uma partição dos vértices de forma a respeitar as restrições impostas entre as partes (representadas na matriz). Neste trabalho, caracterizamos os cografos M -particionáveis em termos obstruções. Uma M -obstrução de um grafo G é um subgrafo induzido de G que não é M -particionável. Em particular, uma M -obstrução H é minimal quando para qualquer vértice v de H , $H - v$ é M -particionável. Estamos interessados em determinar as M -obstruções minimais dos cografos quando M é uma matriz de ordem no máximo três.

Palavras-chave: Cografos, M -partição, M -obstrução minimal.

Abstract

This work considers a study on graph partition when restricted to a subclass of perfect graphs. We present a characterization of cographs whose set of vertices can be partitioned into k independent sets: S_1, \dots, S_k and ℓ cliques: $C_{k+1}, \dots, C_{k+\ell}$ and consider all possible restriction between the parts (external restrictions), i.e., for any two parts i and j , we define if i and j are adjacent, non adjacent or without restrictions. In order to represent such restrictions, we use a symmetric matrix M of order $k + \ell$ where an element $M_{i,i}$ in the main diagonal represents an internal restriction, that is, if part i is an independent set, a cliquer or if there is no restriction, while an element $M_{i,j}$ represents an external restriction between parts i and j . We say that a graph G is M -partitionable (or that G admits an M -partition) if its set of vertices can be partitioned according to the restrictions imposed by matrix M . In this work we characterize M -partitionable cographs in terms of obstructions. An M -obstruction of a graph G is an induced subgraph of G which does not admit an M -partition. In particular, an M -obstruction H is minimal when for any vertex v of H , $H - v$ is M -partitionable. We are interested in determining minimal M -obstructions cographs when restricted to matrices M of size at most three.

Keywords: Cographs, M -partition, minimal M -obstruction.

Palavras-chave

1. Cografos
2. M -partição
3. M -obstrução minimal

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Grafos - Definições e Notações	3
1.1.1 Representação Computacional	10
1.2 Complexidade de Algoritmos	11
2 Classes especiais de grafos	13
2.1 Grafos Perfeitos	13
2.1.1 Grafos Cordais	15
2.1.2 Cografos	17
2.1.2.1 Decomposição Modular	18
2.1.2.2 Co-árvore	19
2.1.2.3 Reconhecimento dos cografos	22
3 M-partições	23
3.0.3 M -partições em cografos	26
4 M-obstruções de cografos	29
4.1 $M_{2 \times 2}$ -obstruções	30
4.2 $M_{3 \times 3}$ -obstruções	34
4.2.1 Casos (3,0)	34

4.2.2	Casos (0,3)	39
4.2.3	Casos (2,1)	40
4.2.4	Casos (1,2)	60
5	Conclusão	61
5.0.5	Trabalhos Futuros	62
	Referências	63

Lista de Figuras

1.1	Grafos $G(V, E)$	5
1.2	(a) grafo G e (b) subgrafo induzido de G pelos vértices $(2, 3, 4, 5, 6)$	5
1.3	Exemplos de Grafo $G(V, E)$, onde estão representados passeio, caminho, ciclo e uma corda.	6
1.4	(a) grafo conexo; (b) grafo desconexo.	7
1.5	grafo completo, K_6 ; clique de tamanho 3.	8
1.6	(a) grafo G ; (b) grafo \overline{G}	8
1.7	(a) grafo bipartido; (b) grafo bipartido completo	9
1.8	Exemplo de árvores.	9
1.9	Matriz de Adjacência do Grafo G	10
2.1	Exemplos de coloração com 3 cores.	14
2.2	(a) grafo cordal; (b) grafo não cordal.	16
2.3	(a), (b) são exemplos de cografos, (c) não é cografo.	18
2.4	Exemplo de um módulo M do grafo G	19
2.5	Exemplo de co-árvore a partir do cografo G	20
2.6	A co-árvore de G rotulada	21
2.7	Cografo G_1 desconexo e sua respectiva co-árvore	21
3.1	Matriz de Blocos	24
3.2	Matriz Constante	24
3.3	M -partição	26
3.4	$2K_2, C_4, C_5$ são M -obstruções minimais.	27
4.1	Grafo $(2, 1)^{*,1,0}$	29

4.2	Matrizes de ordem 2×2	30
4.3	Obstrução minimal do caso $(2, 0)^*$	31
4.4	Obstruções minimais do caso $(2, 0)^1$	31
4.5	Obstruções minimais do caso $(1, 1)^*$	32
4.6	Obstruções minimais do caso $(1, 1)^1$	33
4.7	Matrizes de ordem 3×3	34
4.8	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,1,1}$	35
4.9	Obstrução minimal do caso $(3, 0)^{*,*,*}$	36
4.10	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{*,1,1}$	36
4.11	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,*,*}$	37
4.12	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,0,0}$	38
4.13	Matrizes de ordem 3×3	39
4.14	Matrizes de ordem 3×3	40
4.15	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,*,*}$	41
4.16	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,1}$	42
4.17	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,1}$	43
4.18	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,0}$	44
4.19	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,*}$	45
4.20	Obstruções minimais do caso $(1, 2)^{*,*,0}$	46
4.21	Subgrafos Bipartidos	47
4.22	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,0,0}$	48
4.23	Obstruções minimais de G do caso $(1, 2)^{1,1,0}$	49
4.24	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,0,0}$	50
4.25	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,0}$	51
4.26	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,*}$	53
4.27	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,*}$	54

4.28	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{0,1,0}$	55
4.29	Obstruções minimais do caso $(1, 2)^{1,0,1}$	55
4.30	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,0}$	56
4.31	Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,*,0}$	58
4.32	Matrizes de ordem 3×3	60

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos grafos tem diversas aplicabilidades em muitas áreas (Matemática, Informática, Engenharia, Biologia, Indústria, dentre outras), pois um grafo constitui um modelo matemático ideal para o estudo das relações entre objetos discretos de qualquer tipo. Em particular, grafos são estruturas amplamente utilizadas em diversas áreas do conhecimento humano e tem sido úteis na definição e/ou resolução de problemas da vida real que vão desde problemas de localização, traçados de rotas, projetos de informática, até ciências sociais. Sua importância cresceu muito no século XX, como o surgimento das redes de energia elétrica e de telecomunicação, dos circuitos digitais e, por fim, dos computadores. Assim, grafos são estruturas muito usadas para representar a existência ou não de relações entre elementos de um dado conjunto.

A estrutura de grafos tem contribuído em diversas subáreas dentro da Ciência da Computação: podem ser usados como tipos abstratos de dados, planejamento eficiente para determinar as rotas de transmissões de pacotes na internet, organização de dados, inteligência artificial e produção de algoritmos para solução de problemas levando em consideração a execução em tempo razoável. É possível obter resultados importantes, pois existem vários problemas computacionais que empregam grafos com sucesso. No entanto, para muitos problemas em grafos, não são conhecidos algoritmos para resolver tais problemas em tempo razoável.

Um dos principais motivadores do estudo de classes de grafos é o fato de que diversos problemas, que são difíceis para grafos em geral tornam-se tratáveis quando restritos a classes especiais de grafos. Assim, busca-se delimitar a partir de que ponto um determinado problema pode ser resolvido de forma eficiente.

Particularmente o problema de particionamento em grafo tem sido objeto de estudo, despertando muito interesse devido as pesquisas de grafos perfeitos [22] e também pela procura de algoritmos eficientes para o reconhecimento de determinadas classes de grafos. São exemplos de algumas aplicações que podem ser resolvidas através de problemas de particionamento: segmentação de imagens, encontrar subconjuntos de páginas da Web que estão relacionadas entre si, o problema da k -coloração (de grande importancia na teoria dos grafos) com aplicações em questões práticas como escalonamento de tarefas e alocação de frequências. Outro problema também conhecido de particionamento de grafos é verificar se um dado grafo G é split, ou equivalentemente, verificar se o conjunto dos vértices de G pode ser particionado em dois subconjuntos, dos quais um é independente (subgrafo de G totalmente desconexo), e o outro é uma clique (subgrafo completo não necessariamente maximal). Provou-se que o reconhecimento de grafos split pode ser realizado em tempo linear [22].

Formalmente, muitos desses problemas consistem em verificar se o conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_k , satisfazendo certas propriedades. Considerando as restrições internas, é possível exigir que cada subconjunto V_i seja uma clique ou um conjunto independente; ou ainda, exigir propriedades entre cada par de subconjuntos, que são restrições externas. Assim, os subconjuntos V_i, V_j podem ser completamente adjacentes ou completamente não-adjacentes, isto é, cada vértice, v_i , do subconjunto V_i , é adjacente ou não-adjacente a todos os vértices v_j do subconjunto V_j , respectivamente. Pode-se ainda exigir nenhuma restrição interna e/ou externa.

Em [2] Brandstädt definiu uma nova classe de grafos: a classe dos grafos- $(k; \ell)$, que consiste em reconhecer se um dado grafo G pode ser particionado em k conjuntos independentes V_1, V_2, \dots, V_k e ℓ cliques $V_{k+1}, V_{k+2}, \dots, V_{k+l}$. Ressaltando que alguns dos k conjuntos independentes ou das ℓ cliques podem ser vazios e, além disso, as cliques desta definição não são necessariamente maximais. Tal classe é uma generalização dos grafos split [22]. Brandstädt considerou, em particular, as classes de grafos- $(2; 1)$, grafos- $(1; 2)$ e grafos- $(2; 2)$, apresentando algoritmos polinomiais para reconhecimento destas classes [2, 3]. Por outro lado, sabe-se que reconhecer grafos- $(k; \ell)$ para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ é NP-completo [2]. Como exemplo, podemos considerar a classe dos grafos- $(k; 0)$, que corresponde ao problema de reconhecer se um dado grafo é k -colorível (cujo reconhecimento desta classe é NP-completo para $k \geq 3$). Visando o reconhecimento de grafos- (k, ℓ) , para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$, alguns autores estudaram o problema quando restrito à subclasses de grafos. Em [24], Hell, Klein, Nogueira e Protti, apresentaram uma caracterização e um algoritmo de reconhecimento com complexidade $O(n(n+m))$ para os grafos cordais- (k, ℓ) .

Com a finalidade de expressar as restrições (internas/externas) de uma partição, Feder *et. al.* [16] definiram uma matriz simétrica M de ordem m onde cada elemento $M_{i,j}$, $i \neq j$, representa uma restrição externa entre subconjuntos A_i e A_j e cada elemento $M_{i,i}$ representa uma restrição interna do subconjunto A_i . Particularmente, seja uma matriz simétrica, onde as entradas da diagonal principal $M_{i,i}$ podem ser igual a 0, 1, ou *; assim temos que A_i é estável (conjunto independente) se $M_{i,i} = 0$, uma clique (completo) se $M_{i,i} = 1$ ou sem nenhuma restrição interna se $M_{i,i} = *$. Por outro lado, as entradas fora da diagonal principal, A_i e A_j são completamente não-adjacentes se $M_{i,j} = 0$, ou completamente adjacentes se $M_{i,j} = 1$, ou sem restrição externa se $M_{i,j} = *$. O problema da M -partição consiste em: dado um grafo G e uma matriz simétrica M de ordem m , verificar se $V(G)$ pode ser particionado em m subconjuntos de forma que os vértices em cada uma das partes satisfaça as restrições impostas pela matriz M . Em caso afirmativo, dizemos que G é M -particionável ou que G admite uma M -partição.

Baseado nestes estudos, consideramos nesta dissertação o problema de M -partição de grafos e apresentamos uma caracterização dos grafos M -particionáveis em termos de M -obstruções minimais para matrizes simétricas de ordem $m \leq 3$. Inicialmente, listamos todas as possíveis matrizes de ordem $m \leq 3$ e verificamos se um cografo G de entrada admite uma M -partição. Uma M -obstrução H de um grafo G é um subgrafo de G que não admite uma M -partição. Uma M -obstrução minimal H de um grafo G é uma M -obstrução, sendo que a retirada de qualquer vértice do grafo H torna-o M -particionável. Particularmente, caracterizamos os cografos que admitem uma M -partição em termos de M -obstruções minimais, i.e., nosso resultado exprime que dado um cografo G e uma matriz M ($m \leq 3$), G admite uma M -partição se e somente se G não possui nenhuma das M -obstruções minimais como subgrafo induzido.

1.1 Grafos - Definições e Notações

Nesta seção são explanados alguns conceitos e propriedades relacionados à estrutura básica de um grafo, com exemplos em figuras para melhor compreensão e servem como base para o desenvolvimento desta dissertação. No que segue, definimos esses conceitos:

Um *grafo simples* é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito não-vazio de *vértices*, denotado por $V(G)$ e E é um conjunto de pares não-ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*, e denotado por $E(G)$. Utilizaremos a notação $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$ para denotarmos a cardinalidade de $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente.

Definimos as arestas como sendo pares não-ordenados, mas serão indicadas como sendo pares ordenados, isto é, (u, v) ao invés de $\{u, v\}$, u e v pertencentes a V . Um grafo simples não contém laços, nem arestas múltiplas. No decorrer deste trabalho, iremos utilizar a denominação grafos para denotar o que definimos como grafos simples.

Uma classe de grafos é *Caracterizada* quando encontra-se propriedades para o conjunto de grafos que pertencem à classe de maneira que satisfazer estas propriedades é condição necessária e suficiente para que o grafo pertença à classe.

Uma classe de grafos é *Reconhecida* quando se constrói um algoritmo que tenha como entrada um grafo G e que obtém-se um retorno se G pertence ou não à classe. Em geral, buscam-se algoritmos que sejam eficientes, ou seja, que respondam a essa questão em tempo polinomial.

Um grafo G é dito *trivial* se $|V(G)| = 1$, isto é G possui um único vértice.

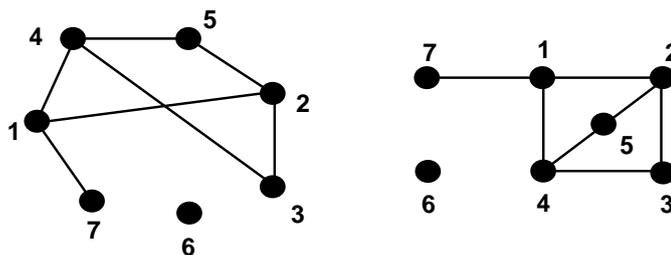
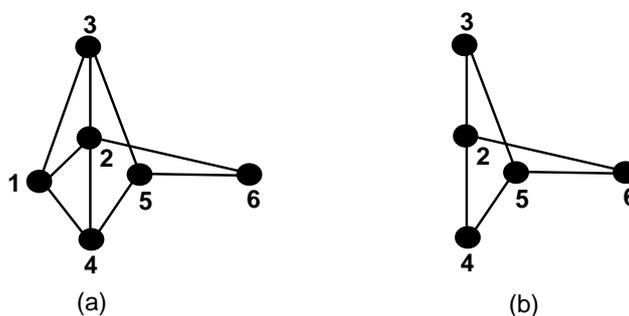
Um vértice u é *adjacente* a outro vértice v em G se $(u, v) \in E(G)$. Neste caso, dizemos que u e v são *vizinhos* em G , e que a aresta $e = (u, v)$ é *incidente* a u e a v , ou que tem *extremos* u e v . Denotamos por $N(u)$ o conjunto de vértices adjacentes a u em G e tal conjunto é chamado de *vizinhança* de u , e por $N[u]$ o conjunto $N(u) \cup \{u\}$ é chamado de *vizinhança fechada* de u .

O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes ao vértice v .

Um grafo pode ser visualizado através de uma representação gráfica por diagramas, onde os vértices são pontos distintos do plano e as arestas são linhas determinadas por somente dois destes vértices, ou seja, não contendo outro vértice. A Figura 1.1 exemplifica dois grafos $G(V, E)$, onde os $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $E(G) = \{(1,2), (1,3), (1,7), (2,3), (2,5), (3,4), (4,5)\}$. Assim, observe que os vértices são as extremidades (ou extremos) das arestas.

Os grafos referenciados nesta seção são denominados não-direcionados. Isto se verifica em virtude de suas arestas não serem direcionadas. Logo, se (u, v) é uma aresta de um grafo não-direcionado $G(V, E)$ então tanto u é adjacente a v quanto v é adjacente a u .

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Dado um conjunto de vértices $Y \subseteq V(G)$, $Y \neq \emptyset$, o *subgrafo induzido* por Y , denotado por $G[Y]$ é o subgrafo H de G tal que $V(H) = Y$ e $E(H)$ é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em Y . No decorrer deste trabalho, assumiremos que todos os termos subgrafo que usarmos refere-se a noção de subgrafo induzido. (ver Figura 1.2)

Figura 1.1: Grafos $G(V, E)$.Figura 1.2: (a) grafo G e (b) subgrafo induzido de G pelos vértices $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Um *passeio* P em um grafo G é uma seqüência finita alternada de vértices e arestas da forma $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n)$, onde os vértices v_1 e v_n são chamados de origem e término do passeio P , respectivamente; os demais vértices são chamados de internos.

Um *caminho* num grafo G é um passeio $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ onde os v_i 's são vértices (dois a dois distintos), e $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $1 \leq i \leq k - 1$, ou seja, é um passeio sem vértices repetidos.

Um *ciclo* ou *circuito* é um caminho que inicia e termina no mesmo vértice, a seqüência v_1, \dots, v_k , $k \geq 3$, é um caminho tal que $v_1 = v_k$. Conforme a Figura 1.3(a) é possível verificar que a seqüência dos vértices $\{1, 3, 2, 4, 5, 1\}$ representam um ciclo, e na Figura 1.3(b) um ciclo é representado pela seqüência $\{1, 2, 6, 3, 1\}$. Uma *corda* em P é uma aresta que liga dois vértices não-consecutivos de P . Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas, e denotado por P_k o caminho induzido por k vértices. Dizemos que um grafo é P_k -free quando não contém um P_k como subgrafo. Um passeio v_1, \dots, v_k, v_{k+1} , é denominado *ciclo* quando v_1, \dots, v_k for um caminho, $k \geq 3$ e $v_1 = v_{k+1}$. Um grafo G é dito *cíclico* quando G contém um ciclo como subgrafo. Caso contrário, dizemos que G é *acíclico*.

Sejam $u, v \in V(G)$. A *distância* entre u e v em G , denotada por $d_G(u, v)$, corresponde ao comprimento do menor caminho entre u e v no grafo. Um grafo G é *distância-hereditário* se para todo par de vértices u, v , a distância entre u, v é a mesma em todo subgrafo induzido conexo de G .

Exemplos de passeio e caminho são identificados na Figura 1.3(b), onde a seqüência de vértices e arestas $\{4, (3, 4), 3, (3, 5), 5, (5, 6), 6, (3, 6), 3\}$ representa um passeio em $G(V, E)$. É possível encontrar um caminho de tamanho 4, através da seguinte seqüência de vértices e arestas: $G(V, E), \{1, (1, 2), 2, (2, 6), 6, (3, 6), 3, (3, 4), 4\}$. A aresta $(1, 2)$ do grafo ilustrado na Figura 1.3(a) é chamado de *corda*, ou seja, uma aresta que une dois vértices não consecutivos de um ciclo.

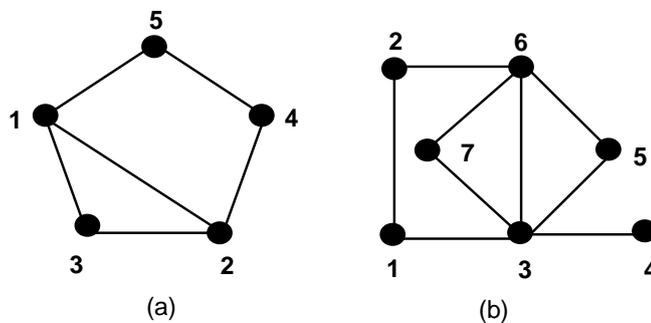


Figura 1.3: Exemplos de Grafo $G(V, E)$, onde estão representados passeio, caminho, ciclo e uma corda.

Um conjunto S é *maximal (minimal)* em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P , e todo conjunto S' que contém propriamente S (que está contido propriamente em S) não satisfaz P .

A *união disjunta* de $G_1 \cup G_2 \cup G_k$, é às vezes referida simplesmente como *união*, sendo o grafo $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k = \{(V(G), E(G)) | V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i \text{ e } E(G) = \bigcup_{i=1}^k E_i\}$.

Da mesma forma, a operação *join* é definida em $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ como sendo o grafo $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k = \{(V(G), E(G)) | V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i \text{ e } E(G) = \bigcup_{i=1}^k E_i \cup \{xy | x \in V_i \text{ e } y \in V_j, i \neq j\}\}$.

Um grafo G é *conexo* se para todo par de vértices distintos v e w de G existe um caminho de v a w . Caso contrário, G é dito *desconexo*. Uma *componente conexa* de G é um subgrafo maximal conexo de G . Quando um grafo é desconexo, dizemos que é formado por um conjunto de componentes. (ver Figura 1.4)

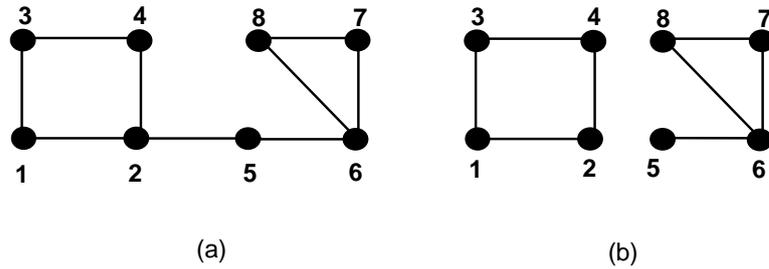


Figura 1.4: (a) grafo conexo; (b) grafo desconexo.

Um grafo é dito *planar* se puder ser desenhado em um plano sem cruzamento entre arestas.

Um conjunto de vértices I de um grafo G é um *conjunto independente* se $G[I]$ é um grafo sem arestas. Um conjunto independente I é dito *maximal* se para qualquer conjunto independente I' tal que $I \subseteq I'$ então $I = I'$. Definimos por $\alpha(G)$ o tamanho do *conjunto independente máximo*, isto é:

$$\alpha(G) = \max \{ |V'| \mid V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é um conjunto independente de } G \}.$$

Um conjunto de vértices C de um grafo G é uma *clique* se $G[C]$ é um grafo completo. Denotamos por K_k uma clique de k vértices. Uma clique C é dita *maximal* se para qualquer clique C' tal que $C \subseteq C'$ então $C = C'$. Denotamos por $\omega(G)$ o *tamanho da clique máxima*, isto é:

$$\omega(G) = \max \{ |V'| \mid V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é uma clique de } G \}$$

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices.

Na Figura 1.5 temos exemplos destas estruturas, grafo completo e clique.

O *complemento* de um grafo G , denotado por \overline{G} , é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices são adjacentes em \overline{G} se e somente se não são adjacentes em G . Na Figura 1.6 está ilustrado um grafo G e \overline{G} .

Um *kernel* de um grafo é um conjunto independente maximal. Observe que $S \subseteq V$ é um kernel se e somente se S é uma clique maximal em \overline{G} .

Dizemos que G possui uma propriedade *Clique-Kernel* (CK) se qualquer clique de G

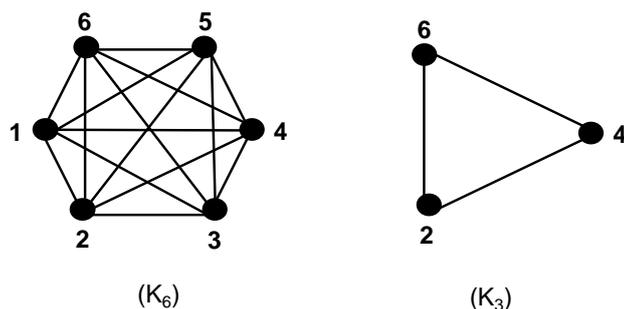


Figura 1.5: grafo completo, K_6 ; clique de tamanho 3.

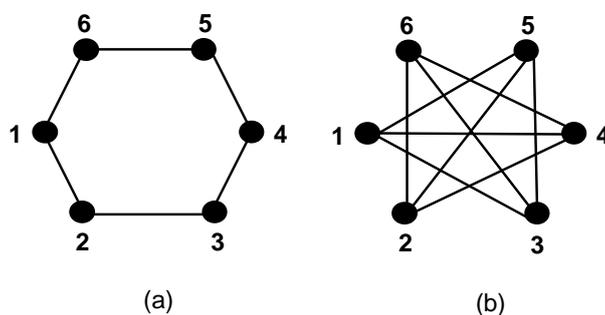


Figura 1.6: (a) grafo G ; (b) grafo \bar{G} .

possui exatamente um vértice em comum com qualquer conjunto S de G .

Uma *coloração* de um grafo G é uma partição de $V(G)$ onde cada classe da partição é um conjunto independente. Uma *k-coloração* é uma partição de $V(G)$ em k classes. O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual existe uma k -coloração de G . Neste caso, dizemos que o grafo G é *k-cromático* ou *k-colorível*.

O *número cobertura por cliques* de um grafo G é o menor número de subgrafos completos necessários para cobrir os vértices de G e é denotado por $\theta(G)$.

Uma classe de grafos G é *hereditária* se todo subgrafo induzido de um grafo em G também pertence a G . Como exemplos, ser um grafo Simples, ser Cordal, ser Completo.

Um *Buraco* em G é um ciclo induzido, sem corda, de tamanho pelo menos 4. Denotamos por C_k um buraco de tamanho k (k vértices ou arestas) e o chamamos de *k-buraco*. Dizemos que C_k é um **buraco par** se k é par; por outro lado, C_k é **ímpar** se k é ímpar. Por exemplo, o grafo C_5 é um Buraco.

Um grafo é dito *bipartido* quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1, V_2 , tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2 , isto é, podemos particionar $V(G)$ em dois conjuntos independentes (ver Figura 1.7(a)).

Um grafo é dito *bipartido completo* se é bipartido e possui uma aresta para cada par de vértices v_1, v_2 , sendo $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Denotamos por $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo, onde $|V_1| = n$ e $|V_2| = m$.

Observe na Figura 1.7(b) temos ilustrado um grafo bipartido completo, onde os vértices do grafo $K_{1,6}$ podem ser particionados em dois conjuntos disjuntos, $V_1 = \{1\}$ e $V_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

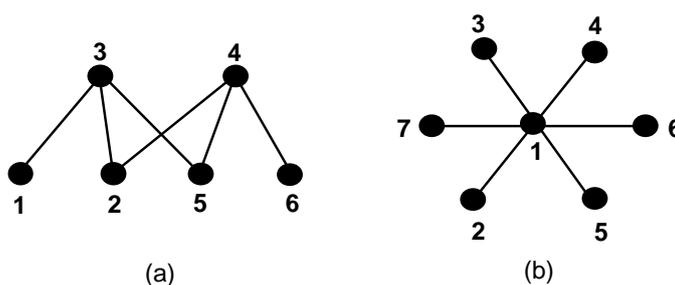


Figura 1.7: (a) grafo bipartido; (b) grafo bipartido completo

Uma *árvore* T é um grafo acíclico e conexo. Uma árvore T é denominada *enraizada* quando algum vértice $v \in V(T)$ é escolhido como especial. Este vértice é então chamado de *raiz* da árvore. Uma árvore não enraizada é também denominada *árvore livre*. Sejam v, w dois vértices de uma árvore enraizada T de raiz r . Suponhamos que v pertença ao caminho de r a w em T , então denominamos v *ancestral* de w e w *descendente* de v . Temos também que se $(v, w) \in E(T)$ então v é *pai* de w , denotado por $\text{pai}(w)$, sendo w o *filho* de v , denotado por $\text{filho}(v)$. (ver Figura 1.8)

Dois vértices que possuem o mesmo pai são chamados de *irmãos*. A raiz de uma árvore não possui pai, enquanto que todo vértice $v \neq r$ possui um único pai. Uma *folha* é um vértice que não possui filhos.

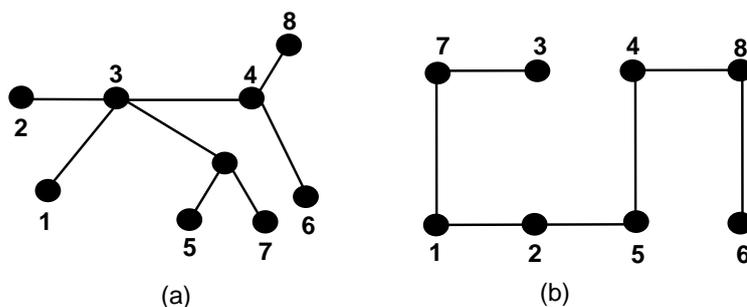


Figura 1.8: Exemplo de árvores.

1.1.1 Representação Computacional

Apesar de ser muito conveniente a representação de um grafo por um diagrama de pontos ligados por arestas, tal representação pode tornar-se inviável se pretendermos armazenar e manipular este grafo computacionalmente. Assim, a Matriz de Adjacência é uma forma alternativa que permite representar grafos no computador.

Considere um grafo $G(V, E)$ com n vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e m arestas. Definiremos a seguir a matriz.

- Matriz de Adjacência

É uma Matriz $n \times n$ (n é o número de vértices), $M_{adj} = [a_{ij}]$ onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se existe } (i, j) \in E \\ 0 & \text{se não existe } (i, j) \in E \end{cases}$$

É possível observar através da Figura 1.9 a representação da matriz de adjacência do grafo G . Observe que a matriz de adjacência é uma matriz simétrica.

Matriz de Adjacência

$$\begin{array}{c} v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Grafo G

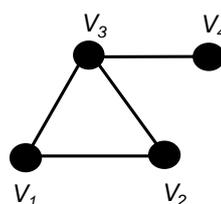


Figura 1.9: Matriz de Adjacência do Grafo G .

No caso da matriz de adjacência, $N(v)$ corresponde ao conjunto de elementos não nulos da linha (ou coluna) associada a v . Para identificar se um vértice i é adjacente ao vértice j basta consultar a matriz na posição (i, j) .

1.2 Complexidade de Algoritmos

Uma área da Ciência da Computação que teve um grande e rápido crescimento no últimos 25 anos é o campo de Algoritmos e Teoria da Complexidade - em particular, o desenvolvimento e análise de algoritmos computacionais. O objetivo de pesquisa nesta área é o de estudar a natureza dos problemas que podem ser resolvidos através de um computador digital, para fornecer soluções para problemas resolvíveis, assim como classificá-los em categorias dependendo do seu grau de dificuldade ou intratabilidade.

Formalmente, um problema algorítmico π consiste de um conjunto D de todas as possíveis entradas para o problema, chamado *conjunto de instâncias*, e de uma *questão* Q sobre estas instâncias. Resolver um problema algorítmico é desenvolver um algoritmo cuja entrada é uma instância do problema e cuja saída é uma resposta à questão do problema.

Um problema é dito de *decisão* quando a questão exige uma resposta do tipo SIM ou NÃO. Como exemplo, seja π o seguinte problema: “Dados um grafo G , reconhecer se G é um cografo”. O conjunto de instâncias de π é obviamente o conjunto de todos os grafos. O problema π pode ser assim esquematizado:

Instância genérica de π : um grafo G .

Questão: G é cografo?

Fica evidente que o problema π acima é um problema de decisão, em particular, um *problema de reconhecimento*. Resolver π significa elaborar um algoritmo de reconhecimento de cografos.

Dizemos que um algoritmo é *polinomial* quando sua complexidade de tempo (medida do número de passos que o algoritmo efetua) é uma função polinomial no tamanho da sua entrada. Os problemas de decisão para os quais existem algoritmos polinomiais constituem a classe P . Tais problemas são chamados *polinomiais*.

Um problema de decisão é *não-determinístico polinomial* quando qualquer instância que produz resposta SIM possui um *certificado* sucinto, isto é, uma comprovação de que a resposta SIM é de fato verificável em tempo polinomial no tamanho da instância. Esta classe de problemas de decisão é a classe NP .

A classe $Co-NP$ é formada pelos problemas que possuem um certificado sucinto para as instâncias que produzem resposta NÃO.

Sejam $\pi_1(D_1, Q_1)$ e $\pi_2(D_2, Q_2)$ dois problemas de decisão. Uma *transformação* ou *redução polinomial* de π_1 em π_2 é uma função $f : D_1 \rightarrow D_2$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. f pode ser calculada em tempo polinomial;
2. para toda instância $I \in D_1$, tem-se que I produz resposta SIM para π_1 se e somente se $f(I)$ produz resposta SIM para π_2 .

Um problema de decisão π pertence à classe *NP-completo* quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\pi \in NP$;
2. para todo problema $\pi' \in NP$ existe uma transformação polinomial de π' em π .

Um problema pertencente à classe NP-completo é chamado NP-completo. Para provar que um certo problema π é NP-completo, basta mostrar que $\pi \in NP$ e que existe uma transformação de um problema NP-completo π' em π .

Analogamente, prova-se que um problema de decisão π pertence à classe *Co-NP-completo* (e, neste caso, π é dito Co-NP-completo) quando $\pi \in Co-NP$ e existe um problema π' (Co-)NP-completo tal que:

1. se π' é NP-completo, existe uma função f que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância I' de π' , tem-se que I' produz SIM para π' se e somente se $I = f(I')$ produz NÃO para π ;
2. se π' é Co-NP-completo, existe uma função f que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância I' de π' , tem-se que I' produz NÃO para π' se e somente se $I = f(I')$ produz NÃO para π .

Como fonte de referência para esta seção, indicamos [21, 32].

Capítulo 2

Classes especiais de grafos

Neste capítulo, descreveremos uma importante classe de grafos: os grafos perfeitos. Além disso, revisamos algumas subclasses dos grafos perfeitos: os grafos cordais e os cografos, sendo este último de extrema importância para os nossos resultados apresentados no Capítulo 4. Vale ressaltar que estas classes especiais de grafos são bastante estudadas em teoria dos grafos. De fato, grafos em geral podem ser classificados com relação a certas características presentes em sua estrutura, o que define as classes de grafos.

2.1 Grafos Perfeitos

Definição 2.1 *Um grafo G é perfeito se e somente se para todo subgrafo induzido H de G , o tamanho da maior clique é igual ao número cromático, i.e., $\chi(G) = \omega(G)$.*

Em outras palavras um grafo G é perfeito se satisfaz às seguintes propriedades para todo subgrafo induzido G' de G :

$$\chi(G') = \omega(G') \tag{2.1}$$

$$\theta(G') = \alpha(G') \tag{2.2}$$

É evidente que o grafo G satisfaz a equação 2.1, se e somente se, seu complemento \overline{G} satisfaz a equação 2.2. Assim, quando ocorre a igualdade $\chi(G') = \omega(G')$, G satisfaz a ω -igualdade minimal e G é considerado ω -perfeito, se cada subgrafo de G satisfaz a ω -igualdade minimal. Quando ocorre a igualdade $\theta(G') = \alpha(G')$, G satisfaz a α -igualdade minimal e G é considerado α -perfeito, se cada subgrafo de G satisfaz a α -igualdade minimal.

A concepção de grafos perfeitos foi introduzida por C. Berge em 1961 e a partir dessas observações conjecturou que ω -perfeito e α -perfeito são equivalentes e propôs as seguintes conjecturas:

Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos : Um grafo G é perfeito se e somente se o seu complemento \overline{G} também é perfeito.

Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos : Um grafo G é perfeito se e somente se G não contém um buraco ímpar nem seus complementos como subgrafo induzido.

A Conjectura Fraca foi aprovada por L. Lovász no ano de 1972, tornando-se o Teorema dos Grafos Perfeitos [26] e a Conjectura Forte sendo aprovada no ano de 2002 por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [8], resultando no *Teorema Forte dos Grafos Perfeitos*.

Em qualquer grafo G , a clique máxima resulta num limite inferior para o número cromático, já que todos os vértices numa clique devem estar associados a uma cor distinta em qualquer coloração própria. Os grafos perfeitos são aqueles para os quais o limite inferior é “exato”, tanto para o grafo como também para qualquer subgrafo induzido. Para grafos mais gerais (considerados imperfeitos ou críticos), o número cromático e o número clique podem ser diferentes. Por exemplo, um ciclo de tamanho 5 requer 3 cores em qualquer coloração mínima própria, mas sua maior clique tem tamanho 2.

A Figura 2.1(a) mostra um grafo C_5 , não-perfeito. Um grafo perfeito é visualizado pela Figura 2.1(b), onde $\chi(G) = \omega(G)$.

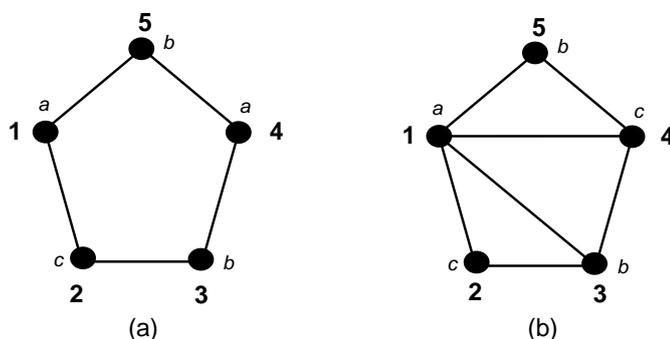


Figura 2.1: Exemplos de coloração com 3 cores.

M. Grötschel, L. Lovász e A. Schrijver [30] desenvolveram um algoritmo em tempo polinomial onde foi possível obter $\chi(G)$ e $\omega(G)$ para a classe dos grafos perfeitos, mesmo possuindo eficiência prática ruim. Em 2003 Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour e

Vušković apresentaram algoritmos diferentes de reconhecimento polinomial para os grafos perfeitos.

Grafos perfeitos incluem muitas famílias importantes de grafos. É possível citar a classe dos grafos cordais e cografos, objetos de estudo deste trabalho, além dessas, a classe dos grafos bipartidos, grafo de permutação, grafos de intervalo, grafo split, grafo de comparabilidade, dentre outros, os quais servem para unificar resultados relacionados a coloração e cliques nessas famílias. A classificação desses grafos é interessante, pois apesar de muitos problemas em grafos gerais serem NP -completos, quando nessas classes é possível resolver muitos dos algoritmos estudados em tempo polinomial, por exemplo, o problema de k -coloração de grafos, problema da clique máxima e o problema do conjunto estável máximo [23].

2.1.1 Grafos Cordais

Os *grafos cordais* constituem de propriedades estruturais bem particulares, onde as cliques obedecem a condições bem específicas, favorecendo a resolução de inúmeros problemas algorítmicos. Sendo uma das primeiras classes a serem reconhecidas como pertencente à classe dos grafos perfeitos. Particularmente, tem sido uma classe de grafos bastante pesquisada e existem caracterizações por subgrafos proibidos para várias de suas subclasses. Alguns conceitos e propriedades desta família são descritos a seguir.

Um grafo $G = (V, E)$, é chamado *cordal* ou *triangularizado* quando todo ciclo de comprimento estritamente maior do que três possui uma corda (i.e. uma aresta ligando dois vértices não consecutivos do ciclo).

A propriedade de ser cordal é uma propriedade hereditária, isto é, todo subgrafo induzido de um grafo cordal também é um grafo cordal. Assim, G não contém um subgrafo induzido isomorfo a C_n , $n > 4$. O grafo da Figura 2.2(a) é um exemplo de grafo cordal, enquanto na Figura 2.2(b) o grafo não é cordal já que o ciclo $1, 2, 3, 4, 1$ de comprimento quatro não possui uma corda.

Sejam $G(V, E)$ um grafo, com $n = |V|$, e $v \in V$ um vértice qualquer de G . v é denominado *simplicial*, se o subgrafo induzido pela vizinhança de v , $N(v)$, é um subgrafo completo (i.e., $N(v)$ é uma clique - não necessariamente maximal). No grafo da Figura 2.2(a), por exemplo, o vértice 2 é simplicial, pois sua vizinhança induz um K_3 .

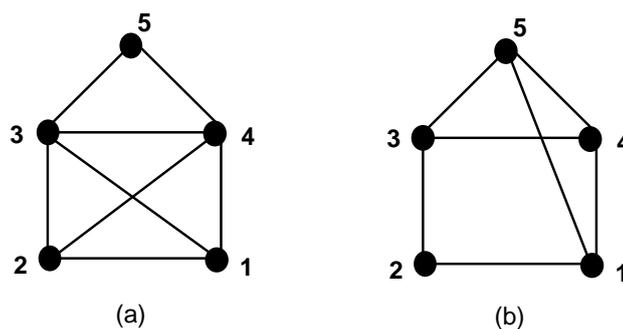


Figura 2.2: (a) grafo cordal; (b) grafo não cordal.

Um *esquema de eliminação perfeita* de G , é uma seqüência dos vértices de G , $\alpha = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, onde cada v_i é um vértice simplicial do subgrafo induzido por $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$. Isto é, para cada vértice v , sua vizinhança $N(v)$, que ocorre depois de v na ordenação, induz um grafo completo. Por exemplo, a seqüência $\alpha = [5, 4, 2, 1, 3]$ é um esquema de eliminação perfeita para o grafo da Figura 2.2(a). No entanto, esta seqüência não é necessariamente única. Para este mesmo grafo, outra seqüência possível é $\alpha = [2, 1, 4, 3, 5]$. Por outro lado, observe que no grafo da Figura 2.2(b) não existe vértice simplicial, não admitindo esquema de eliminação perfeita.

Uma característica importante dos grafos cordais é a existência de um *Esquema de Eliminação Perfeita - EEP*, conforme estabelecido no Teorema 2.1.

Teorema 2.1 [22]. *Seja G um grafo. G é cordal se, e somente se, admite um esquema de eliminação perfeita, que pode iniciar-se com qualquer vértice simplicial.*

Os algoritmos de reconhecimento dos grafos cordais mais conhecidos e mais eficientes baseiam-se no Teorema 2.1 e constam de dois passos. Primeiramente, um percurso especial (por vizinhança máxima ou em largura lexicográfica, por exemplo) determina uma seqüência de vértices; em seguida, verifica-se se esta seqüência é um EEP. Esses dois passos podem ser implementados através de algoritmos de complexidade linear em tempo e espaço. Se o grafo fornecido como entrada for sabidamente cordal, a seqüência de vértices produzida por este percurso constitui um esquema de eliminação perfeita para ele [27].

A próxima seção apresenta uma outra subclasse dos grafos perfeitos: os cografos.

2.1.2 Cografos

Cografos, ou simplesmente *grafos redutíveis por complemento*, surgiram em diversas áreas da Matemática e Ciência da Computação, de forma independente e tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores. Esta independência permitiu o surgimento de alguns sinônimos para o termo cografo, dentre os quais podemos citar: grafos D^* , grafos sem P_4 , grafos Hereditary Dacey - HD.

O termo cografo foi introduzido na década de 70 por H. Lerchs [25] que estudou suas propriedades estruturais e algorítmicas definindo assim a classe dos cografos. A partir de uma análise e ampliação deste estudo, L. Stewart [31] desenvolveu um algoritmo com complexidade $O(n^2)$ para reconhecer tal classe. Posteriormente, Corneil *et al.* [11] desenvolveu um algoritmo mais eficiente, com complexidade linear. A classe dos cografos constitui uma subfamília do grafo de permutação [10, 11], de grafos perfeitos e possuem a propriedade de complementaridade, isto é, o grafo G é cografo se e somente se o complemento também o é.

Definição 2.2 *Um cografo G é um grafo simples definido, recursivamente [10], como:*

- i. O grafo trivial (K_1) é um cografo;*
- ii. Se G_1, \dots, G_k são cografos, então a união $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ também é cografo;*
- iii. Se G é cografo, então \overline{G} também é cografo.*

Dessa forma, um cografo pode ser obtido a partir de um conjunto de grafos de um único vértice (grafos triviais), através de um número finito de operações de união e *join*. De maneira inversa, um cografo pode ser reduzido a vários vértices isolados, se forem feitas recursivas operações de complemento em todos os componentes conexos. Por isso a denominação aos cografos de grafos redutíveis por complemento.

A Figura 2.3(a) ilustra o cografo $G = (K_1 + 2K_2)$ - temos o join do K_1 e $2K_2$ e em (b), o complemento, o cografo $\overline{G} = (I_1 \cup C_4)$ - a união do I_1 e C_4 . Já em (c) temos um P_4 que não é cografo (não é possível construir o P_4 pela definição recursiva acima).

Os cografos podem ser representados de forma única através de uma árvore especial denominada de co-árvore ou *cotree* [11], que incorpora a seqüência de operações de união e *join* a partir da definição recursiva utilizada na sua construção. Considerando tal representação, obtém-se diversas propriedades e características de um cografo, o que auxilia na

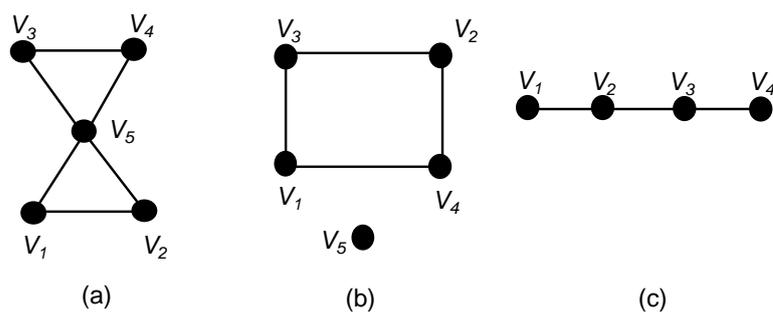


Figura 2.3: (a), (b) são exemplos de cografos, (c) não é cografo.

solução de problemas julgados difíceis em outras classes de grafos. Além disso, a representação em co-árvore é importante para o reconhecimento linear da classe de cografo [11] e para a solução de alguns algoritmos polinomiais de problemas clássicos como isomorfismo, detecção de cliques, de conjuntos independentes, entre outros [10]. Antes de definirmos a co-árvore, definimos o conceito de decomposição modular.

2.1.2.1 Decomposição Modular

A *decomposição modular*, descoberta independentemente por Möhring, Muller e Spinrad é um processo para decompor um grafo. Em cada etapa, o subgrafo que está sendo decomposto é chamado de *módulo*. Durante o processo de decomposição modular, cada um dos subgrafos é decomposto recursivamente, sendo que este processo continua até que todos os subgrafos que estão sendo decompostos contenham somente um vértice (módulos triviais).

A noção de módulo surgiu naturalmente a partir de diferentes estruturas combinatórias. A decomposição modular facilita a resolução de diversos problemas em certas classes de grafos [28], podendo ser usada em algoritmos de tempo polinomial para problemas tais como reconhecimento de grafos de comparabilidade e grafos de permutação [9].

Dado um grafo $G(V, E)$, um módulo de um grafo G é um subconjunto M de vértices de $V(G)$ tal que cada vértice de $V(G) \setminus M$ ou é adjacente a todo vértice de M ou a nenhum vértice de M [1]. Um módulo M é dito trivial, se $|M| = 1$ ou $M = V(G)$. Um grafo G é primo se todos seus módulos são triviais. A decomposição modular de um grafo G particiona $V(G)$ em módulos, os quais podem ser classificados exatamente a uma das três classes de módulos: paralelo, serial e vizinhança. Tal classificação é feita de acordo com a conectividade de G e \overline{G} . O módulo M é paralelo se $G[M]$ é desconexo; M é serial se $\overline{G}[M]$ é desconexo, M é vizinhança se $G[M]$ e $\overline{G}[M]$ são ambos conexos.

Podemos citar como exemplo a Figura 2.4, onde $M = \{a, b\}$ é um módulo de G , os vértices do conjunto $A = \{1, 2\}$ são adjacentes a todos os vértices de M e os vértices do conjunto $B = \{3, 4\}$ são não-adjacentes a todos os vértices de M .

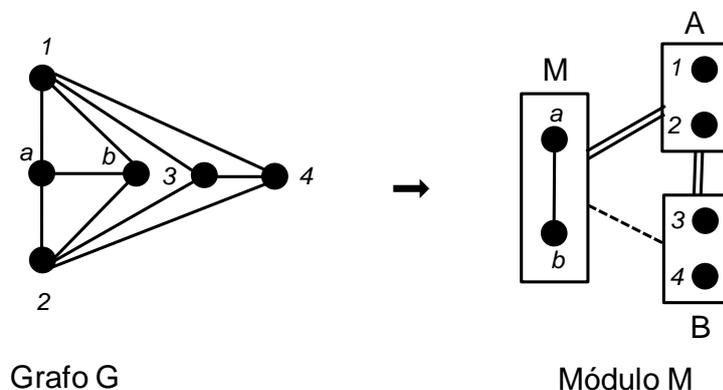


Figura 2.4: Exemplo de um módulo M do grafo G

Através da decomposição modular de um grafo G é possível construir uma árvore correspondente, chamada de *árvore de decomposição modular* e denotada por $T(G)$. De acordo com o citado anteriormente, a árvore de decomposição possui os três tipos de nós: paralelo, serial e vizinhança. Cada vértice do grafo G corresponde a uma folha da árvore de decomposição. Cada módulo M de G está associado a um nó da árvore, cujas folhas descendentes de M correspondem aos vértices pertencentes ao módulo M .

Um caso particular de decomposição modular, é o caso em que a árvore contém somente os módulos paralelo e serial, denominada de *Co-árvore*. No decorrer desta dissertação estaremos interessados em mostrar como a decomposição modular pode ser utilizada para reconhecer os cografos. Vejamos na Figura 2.5 uma representação de um cografo G e sua respectiva *co-árvore*.

2.1.2.2 Co-árvore

Diversos problemas de otimização combinatória tem sido resolvidos eficazmente através da família dos cografos, usando a representação de co-árvore [10, 11, 22].

O Teorema a seguir, apresentado por Corneil, Lerchs e Burlingham [10], constitui a equivalência entre três distintas caracterizações de cografos.

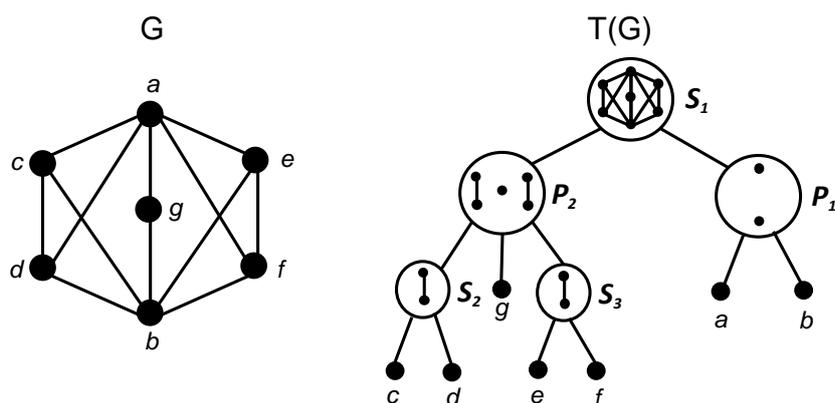


Figura 2.5: Exemplo de co-árvore a partir do cografo G

Teorema 2.2 [10] *Dado um grafo G , as seguintes sentenças são equivalentes:*

- i. G é cografo;*
- ii. G não contém um P_4 como subgrafo induzido;*
- iii. O complemento de todo subgrafo conexo não trivial de G é desconexo.*

A equivalência $(i) \leftrightarrow (iii)$ do Teorema 2.2 garante que toda árvore de decomposição dos cografos é uma co-árvore. Assim, enunciamos o seguinte corolário:

Corolário 2.1 *Um grafo G é um cografo se e somente se para todo subgrafo H de G com pelo menos dois vértices, exatamente uma das condições abaixo é satisfeita:*

- (i) H é desconexo;*
- (ii) \overline{H} é desconexo;*

Com base nas condições apresentadas, as folhas de uma co-árvore representam os vértices do cografo correspondente. Os nós internos são rotulados por 0 ou 1, de tal forma que estes rótulos se alternem por todo o caminho desde a raiz. Os nós rotulados por 0 são chamados *nós tipo-0* e correspondem ao módulo paralelo, enquanto os nós rotulados por 1 são chamados *nós tipo-1* correspondendo ao módulo serial.

Uma forma de facilitar a representação é adotar a raiz como sendo sempre um nó tipo-1, mesmo quando o cografo for desconexo [10, 11]. Todo nó terá dois ou mais filhos,

no entanto a raiz terá somente um filho tipo-0, se e somente se, o grafo representado for desconexo.

Dado um cografo G e sua respectiva co-árvore T , a seguinte propriedade é facilmente verificada a partir da definição de co-árvore.

Propriedade 2.1 *Dois vértices x e y de um cografo são adjacentes (não-adjacentes) se e somente se o "ancestral" mais próximo a x e a y em T , no sentido da raiz para as folhas, for um nó tipo-1 (nó tipo-0).*

Na Figura 2.6 há uma representação da mesma co-árvore da Figura 2.5, contudo já rotulada. A Figura 2.7 mostra o exemplo de um cografo G_1 desconexo e sua respectiva co-árvore.

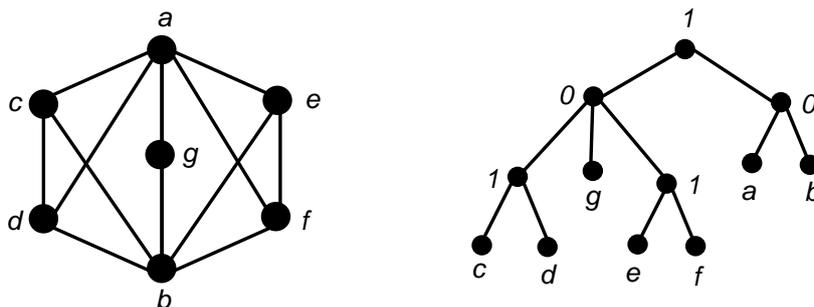


Figura 2.6: A co-árvore de G rotulada

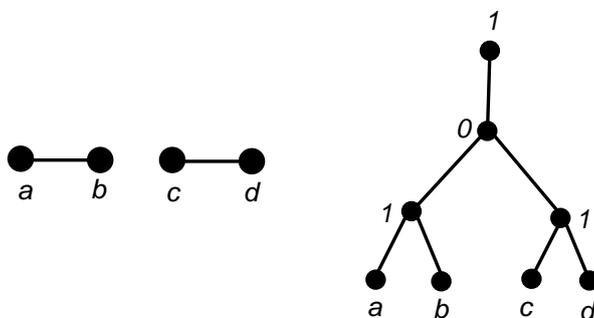


Figura 2.7: Cografo G_1 desconexo e sua respectiva co-árvore

Pelo Teorema 2.2, é fácil inferir que se G é um cografo então G é um grafo perfeito. De fato, todo cografo G é perfeito, pois G e seu complemento, \overline{G} , não possuem P_4 , logo não possuem ciclo ímpar induzido de tamanho maior ou igual a cinco. O resultado segue do Teorema Forte dos Grafos Perfeitos.

2.1.2.3 Reconhecimento dos cografos

Conforme mencionado anteriormente, existem diversas características estruturais da família dos cografos que definem se um dado grafo G realmente é um cografo. Além disso, é importante o questionamento de reconhecer, em tempo polinomial, se um dado grafo G possui algumas destas características. A classe dos cografos apresenta algoritmos de reconhecimento em tempo linear.

A idéia inicial do algoritmo para reconhecer se um grafo é cografo parte do princípio do Corolário 2.1 e da observação de que cografos são perfeitos. Um algoritmo linear para reconhecer cografos é descrito a seguir.

Dado que todo subgrafo induzido de um cografo também é um cografo, o algoritmo apresentado por Corneil, Perl e Stewart [11] constrói a co-árvore $T(G)$ de um cografo G vértice a vértice, verificando se $G+x$ é cografo, onde x é um novo vértice a ser introduzido em G . Para isso, analisa-se as relações de adjacência de x com os vértices de G usando T .

Provou-se que o reconhecimento dos cografos pode ser feito em tempo linear [11].

Capítulo 3

M -partições

Este capítulo descreve um estudo de problemas de partição em grafos. Em geral, no problema de partição em grafos é dado um grafo $G = (V, E)$, e o objetivo consiste em verificar se o conjunto de vértices de G pode ser particionado em m subconjuntos disjuntos (também chamados partes) V_1, \dots, V_m ($V_1 \cup \dots \cup V_m = V$) exigindo-se certas propriedades nos conjuntos (propriedades internas) e/ou entre os conjuntos (propriedades externas). Com o objetivo de capturar tais restrições internas e externas, Feder *et al.* [16] uma matriz simétrica M de ordem k onde os elementos na diagonal principal representam as restrições internas no conjunto, enquanto que os elementos fora da diagonal principal representam as restrições externas entre os conjuntos.

Mais formalmente, nosso problema de partição as partes podem ser cliques, conjuntos independentes ou não ter restrição e as restrições externas podem representar partes completamente adjacentes, não-adjacentes ou sem restrições. A matriz simétrica M , de ordem $m \times m$, é definida sobre $\{0, 1, *\}$, onde uma parte V_i é uma clique se $M_{i,i} = 1$; um conjunto independente se $M_{i,i} = 0$, ou sem restrições se $M_{i,i} = *$. No caso da adjacência entre as partes, isto é as restrição externa, V_i e V_j são completamente não-adjacentes se $M_{i,j} = 0$, ou completamente adjacentes se $M_{i,j} = 1$, ou não tem restrições se $M_{i,j} = *$.

O problema da M -partição consiste em verificar se dado um grafo G e uma matriz simétrica M de ordem m , G admite uma partição dos vértices em m partes, onde os vértices de G satisfazem as restrições impostas pela matriz M .

Observe que se M tem um $*$ na diagonal principal, então todo grafo G admite uma M -partição. Portanto, podemos assumir que M não possui $*$'s na diagonal, caso contrário o problema seria trivial. Neste caso, M pode ser escrita como uma matriz de blocos, primeiro listando as linhas e colunas com diagonal nula, e então aquelas com 1's na

O problema da M -partição foi introduzido por Feder, Hell, Klein e Motwani em 2003 [17] e generaliza diversos problemas de partição em grafos, a saber, o problema da k -coloração e o problema de reconhecer grafos- (k, ℓ) .

Problema da k -coloração

Dados: Um grafo G e um inteiro positivo k

Objetivo: Verificar se $V(G)$ pode ser particionado em no máximo k conjuntos independentes.

Problema dos grafos- (k, ℓ)

Dados: Um grafo G e inteiros não negativos k e ℓ

Objetivo: Verificar se $V(G)$ pode ser particionado em no máximo k conjuntos independentes e ℓ cliques.

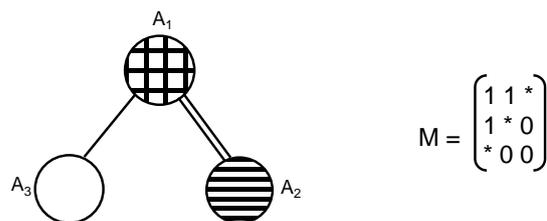
No caso do problema da k -coloração, o problema da M -partição equivalente considera M como sendo uma matriz de ordem k com todos os elementos da diagonal principal nulos e *'s fora da diagonal principal.

No caso do problema dos grafos- (k, ℓ) , o problema da M -partição equivalente tem M como sendo uma matriz de ordem $k + \ell$ com k elementos da diagonal principal nulos, ℓ elementos da diagonal principal 1's e *'s fora da diagonal principal.

Observe que a matriz M admite uma matriz complemento \overline{M} , obtida pela mudança de todos os valores 0's para 1's e de 1's para 0's. Assim, G admite uma M -partição se e somente se \overline{G} admite uma \overline{M} -partição.

Na Figura 3.3 apresentamos um exemplo de partição em três subconjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$, seguido de sua matriz M . Esta Figura ilustra também uma representação simbólica (ver em [17]) de uma M -partição geral. O círculo vazio representa um conjunto estável (0 na diagonal principal de M), um círculo cruzado representa uma clique (1 na diagonal principal de M) e ausência de restrição interna por um círculo listrado (* na diagonal principal de M). Similarmente, considerando as restrições externas, os dois subconjuntos $\{A_1, A_2\}$ estão ligados por uma linha dupla e são completamente adjacentes (1 fora da diagonal principal de M); os subconjuntos $\{A_1, A_3\}$ estão unidos por uma linha simples, sem restrição externa (* fora da diagonal principal de M); os subconjuntos $\{A_2, A_3\}$ são completamente não-adjacentes (0 fora da diagonal principal de M).

Dada uma matriz M , um grafo G que não admite M -partição é chamado de uma M -obstrução. Uma M -obstrução *minimal* de um grafo G é uma M -obstrução, onde cada

Figura 3.3: M -partição

subgrafo induzido do grafo G admite uma M -partição. Neste ponto, faz-se necessária a seguinte pergunta: dado um grafo G , G admite uma M -partição com relação à matriz M ?

Neste sentido, podemos observar, na Figura 3.4, que os grafos $2K_2, C_4, C_5$ são M obstruções minimais para a matriz M com um elemento nulo e um elemento 1 na diagonal principal e contendo $*$ fora da diagonal principal (ou ainda, M é uma matriz que representa uma partição split). Assim, um grafo contendo $2K_2, C_4$ ou C_5 como subgrafos induzidos não pode ser particionado, conforme a matriz M , em dois subconjuntos sendo um conjunto independente e o outro uma clique (sem restrição externa entre os subconjuntos). Além disso, se G é isomorfo a alguma das obstruções, é possível verificar que a retirada de qualquer vértice de G , torna-o M -particionável, ou seja essas obstruções são minimais.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

A próxima seção apresenta alguns resultados do problema de M -partição quando restrito à classe dos cografos. Um artigo mais detalhado contendo tais resultados pode ser encontrado em [15].

3.0.3 M -partições em cografos

Iremos apresentar alguns resultados da classe dos cografos.

Mais especificamente, apresentamos resultados obtidos por Feder *et al.* [15] onde é provado que todos os problemas de M -partição quando restrito á classe dos cografos admite M -obstruções minimais que são cografos. Na verdade, eles apresentam um limite no tamanho de tais M -obstruções minimais. Para algumas matrizes especiais, o resultado e refinado apresentando um limite mais justo para o tamanho das M -obstruções minimais.

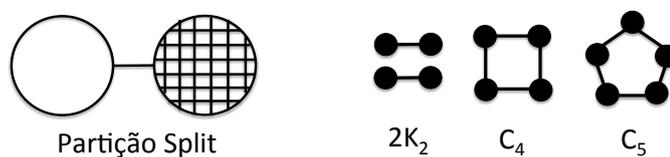


Figura 3.4: $2K_2, C_4, C_5$ são M -obstruções minimais.

Vale mencionar que para apenas dois casos de matrizes as M -obstruções minimais são explicitadas. A seguir os principais resultados que serão usados no próximo capítulo. Antes disso, fazemos uma observação simples e bastante usada nos resultados.

Observação 3.1 *Um cografo G admite uma M -partição se e somente se \overline{G} admitir uma \overline{M} -partição. O complemento \overline{M} de uma matriz M tem todos os 0's mudados para 1's e vice versa.*

Teorema 3.1 [15] *Seja M uma matriz $(*, *, *)$ -bloco. Então cada M -obstrução minimal que é um cografo é $(k + 1)$ -colorível e pode ser particionado em $\ell + 1$ cliques.*

É fácil ver que o Teorema 3.1 acima corresponde a um resultado que vale para os grafos- (k, l) , já que M representa uma (k, l) -partição.

É importante ressaltar que Brandstädt [2] apresentou um algoritmo polinomial para reconhecimento das classes $(2, 1)$; $(1, 2)$ e $(2, 2)$, e provou que o problema de reconhecimento de grafos (k, ℓ) para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ é NP-completo.

Demange *et. al.* [13] definiu uma caracterização dos cografos- $(2, 1)$; cografos- $(1, 2)$ e cografos- $(2, 2)$. Uma generalização deste resultado foi demonstrado por Bravo, Klein e Nogueira [4] em termos de subgrafos proibidos dos cografos- (k, ℓ) .

Um colorário do Teorema 3.1 é o apresentado a seguir:

Corolário 3.1 [15] *Seja M uma matriz $(*, *, *)$ -bloco. Então cada M -obstrução minimal tem exatamente $(k + 1)(\ell + 1)$ vértices.*

Feder *et al.* também apresentaram um limite no número de vértices quando M é uma matriz constante, conforme o resultado a seguir.

Teorema 3.2 [15] *Sejam M uma matriz constante e G uma M -obstrução minimal que é um cografo, então G no máximo $(k + 1)(\ell + 1)$ vértices.*

Teorema 3.3 [15] *Seja M uma matriz $m \times m$ que tem apenas 0's na diagonal principal, um 1 fora da diagonal e *'s em qualquer outra posição. Então M tem apenas duas obstruções minimais que são cografos, chamados K_{m+1} e $K_m \cup K_{m-1}$.*

Teorema 3.4 [15] *Todo problema de partição de matriz para cografos, admite algoritmo em tempo polinomial e caracterização por subgrafos proibidos induzidos.*

A principal contribuição deste trabalho é apresentar uma caracterização de M -partição dos cografos em termos de obstruções minimais para todos os casos da matriz M de ordem 2×2 (Casos $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(1, 1)$) e matrizes M de ordem 3×3 (Casos $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$), considerando as relações entre os subconjuntos de vértices. Este resultado encontra-se no capítulo 4.

Capítulo 4

M -obstruções de cografos

Neste capítulo, consideramos o problema da M -partição para matrizes quadradas M de ordem $m \leq 3$ e apresentamos uma caracterização dos cografos M -particionáveis em termos de M -obstruções, i.e., dado um cografo G e uma matriz simétrica M de ordem no máximo três, nosso resultado exprime quando um cografo G admite uma M -partição.

É fácil ver que para $m = 1$ o problema é trivial já que corresponde a verificar se G é uma clique ou um conjunto independente. Sendo assim, no que segue, consideramos os casos $m = 2$ e $m = 3$.

Usaremos a notação $(k, \ell)_{\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{k+\ell}, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^{k+\ell}\}}$, $i := 1, \dots, k + \ell - 1$ para representar uma partição em k conjuntos independentes: X_1, X_2, \dots, X_k e ℓ cliques: $X_{k+1}, \dots, X_{k+\ell}$, onde cada a_i^j representa a restrição externa entre os conjuntos X_i e X_j . Observe que um grafo- $(k, \ell)_{\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{k+\ell}, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^{k+\ell}\}}$ representa um grafo que admite uma M -partição onde M é uma matriz com k elementos nulos na diagonal principal, ℓ 1's na diagonal principal, com qualquer elemento fora da diagonal principal podendo pertencer ao conjunto $\{0, 1, *\}$. Como exemplo, um grafo $(2, 1)_{*,1,0}$ possui partição do conjunto dos vértice conforme a Figura 4.1 e matriz M .

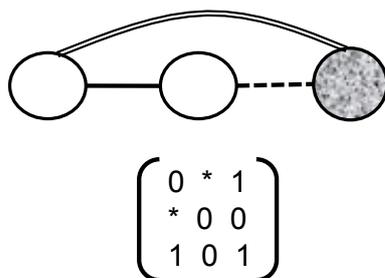


Figura 4.1: Grafo $(2, 1)_{*,1,0}$

4.1 $M_{2 \times 2}$ -obstruções

Nesta seção, uma caracterização de cografos (k, ℓ) por subgrafos proibidos é apresentada. Tal caracterização é obtida a partir da verificação se um dado cografo G pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques com base nas matrizes de ordem 2×2 .

Na Figura 4.2 são listadas todas as matrizes de ordem 2×2 que serão aqui consideradas.

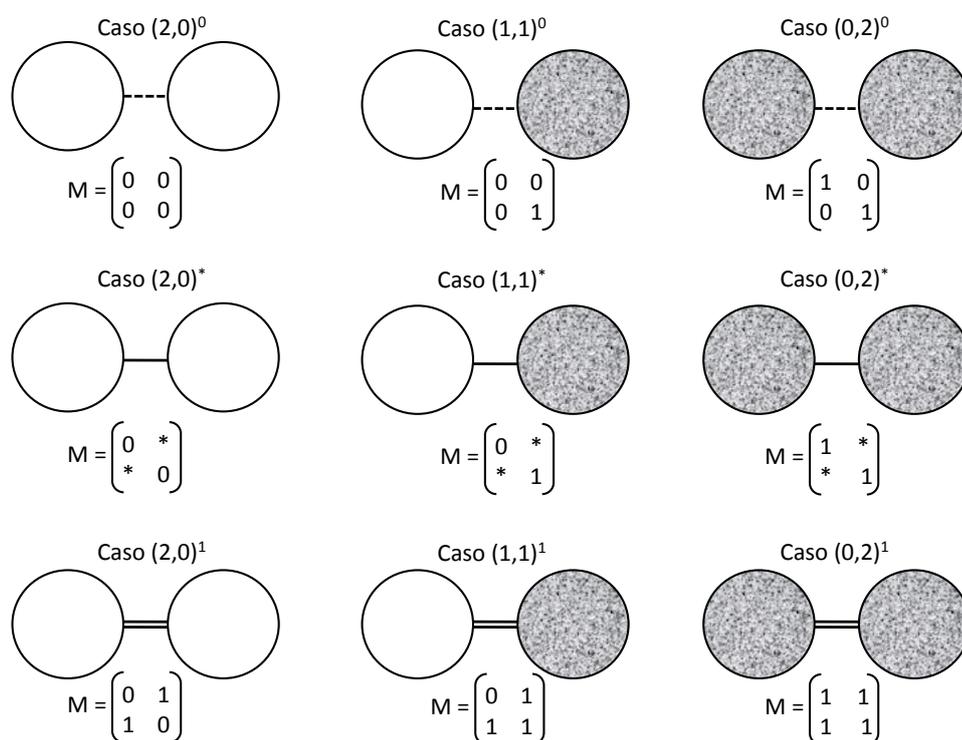


Figura 4.2: Matrizes de ordem 2×2

Observe que o caso $(2,0)^0$ e caso $(0,2)^1$ correspondem respectivamente aos casos triviais de se verificar se um dado grafo é completo ou um conjunto independente (i. e, um grafo sem arestas). Note também que o caso de se verificar se um grafo G é $(2,0)^*$ é equivalente a verificar se o grafo \overline{G} é $(0,2)^*$. Da mesma forma, verificar se um grafo é $(1,1)^1$, equivale a verificar se o grafo \overline{G} é $(1,1)^0$.

Portanto, analisaremos apenas os casos $(2,0)^*$, $(2,0)^1$, $(1,1)^*$ e $(1,1)^1$, uma vez que os demais casos são facilmente resolvidos através dos seus complementos.

Teorema 4.1 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 0)^*$ se e somente se G não contém o grafo da Figura 4.3 como subgrafo induzido.*

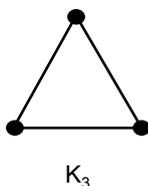


Figura 4.3: Obstrução minimal do caso $(2, 0)^*$

Prova. Um grafo G é bipartido se e somente se não contém ciclo induzido de comprimento $2k + 1, k \geq 1$. Como cografos não admitem ciclos ímpares de comprimento maior que 3, o resultado segue. ■

Teorema 4.2 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 0)^1$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.4 como subgrafo induzido.*

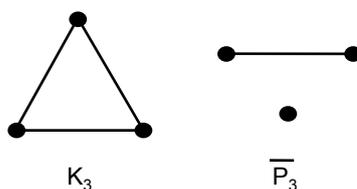


Figura 4.4: Obstruções minimais do caso $(2, 0)^1$

Prova.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos subgrafos acima, então G não é um cografo $(2, 0)^1$. Pode-se também verificar que cada grafo da Figura 4.4 é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(2, 0)^1$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo minimal que não é $(2, 0)^1$, ou seja, para todo vértice $v \in V(G)$, $G - v$ é um grafo $(2, 0)^1$. Suponha, por contradição que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.4 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisemos os dois casos:

- (i) G é desconexo. Seja $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k, k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se todos G_i forem triviais, então G é $(2, 0)^1$, o que seria um absurdo. Logo, deve existir algum G_i tal que $|G_i| > 1$. Neste caso, G contém \overline{P}_3 . Absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Assim, analisaremos dois casos:

- $k \geq 3$: temos que cada G_i possui pelo menos um vértice, e desta forma, G contém um K_3 .
- $k = 2$: se todos os G_i 's forem tais que $V(G_i)$ são conjuntos independentes, então G é $(2, 0)^1$, o que seria uma contradição. Portanto, existe algum G_i que contém um par de vértices adjacentes, e como cada G_i é desconexo temos que G_i contém $\overline{P_3}$, e desta forma, G contém $\overline{P_3}$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 0)^1$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos K_3 e $\overline{P_3}$ como subgrafo induzido. ■

Para simplificar e não se tornar muito repetitiva, nas provas das recíprocas dos teoremas que seguem, consideraremos que G é um grafo minimalmente não $(k, \ell)^{a,b,c}$, $k + \ell \leq 3$ e $a, b, c \in \{0, *, 1\}$, i.e, a retirada de qualquer vértice de G torna-o $(k, \ell)^{a,b,c}$.

Teorema 4.3 [20] *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 1)^*$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.5 como subgrafo induzido.*

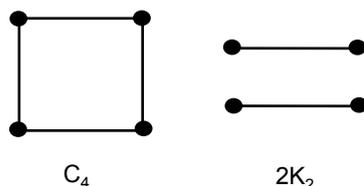


Figura 4.5: Obstruções minimais do caso $(1, 1)^*$

Prova.

Em [20] foi apresentada uma caracterização por subgrafos proibidos para os grafos split, isto é, os grafos $(1, 1)^*$. Nesta dissertação apresentaremos uma prova alternativa para tal caracterização quando restrito à classe dos cografos.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(1, 1)^*$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.5 como subgrafo induzido. Vamos analisar dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se existe G_i trivial, então, G é $(1, 1)^*$, pois por minimalidade, $G - G_i$ é $(1, 1)^*$. Contradição! Portanto, para todo G_i , $|G_i| \geq 2$. Desta forma, G contém $2K_2$, o que é um absurdo!
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Se existe $|G_i| = 1$ então G é $(1, 1)^*$, pois, por minimalidade, $G - G_i$ é $(1, 1)^*$. Portanto, $|G_i| \geq 2$, e desta forma, cada G_i contém um I_2 , e assim, G contém C_4 . Absurdo!

Concluimos que o cografo G é $(1, 1)^*$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos C_4 e $2K_2$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.4 *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 1)^1$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.6 como subgrafo induzido.*

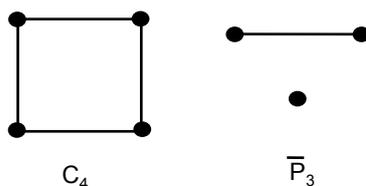


Figura 4.6: Obstruções mínimas do caso $(1, 1)^1$

Prova. (\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(1, 1)^1$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.6 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se todos G_i forem triviais, então G é $(1, 1)^1$, o que seria um absurdo. Logo, deve existir algum G_i tal que $|G_i| \geq 2$. Neste caso, G contém \overline{P}_3 . Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, então G é $(1, 1)^1$, pois, por minimalidade, $G - G_i$ é $(1, 1)^1$. Absurdo. Logo, $|G_i| \geq 2$, para todo G_i , assim cada G_i contém I_2 . Desta forma, G contém C_4 . Contradição!

Concluimos que o cografo G é $(1, 1)^1$, se e somente se, não contém dos grafos C_4 e \overline{P}_3 como subgrafo induzido. ■

4.2 $M_{3 \times 3}$ -obstruções

Nesta seção, caracterizaremos os cografos (k, ℓ) em termos de M-obstruções minimais com base nas matrizes de ordem 3×3 .

4.2.1 Casos $(3,0)$

Na Figura 4.7 são listadas todas as matrizes de ordem 3×3 referentes aos Casos $(3,0)$.

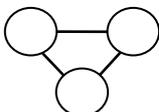
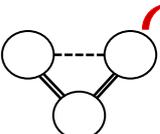
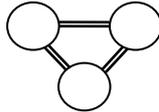
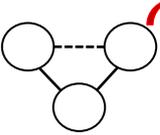
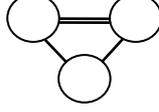
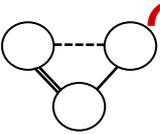
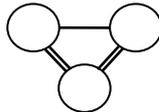
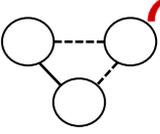
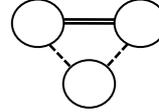
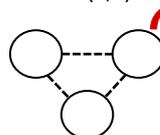
$M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$ 	$\text{Caso } (3,0)^{*,*,*}$		$\text{Caso } (3,0)^{0,1,1} \quad \text{Caso } (2,0)^1$
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 	$\text{Caso } (3,0)^{1,1,1}$		$\text{Caso } (3,0)^{*,*,0} \quad \text{Caso } (2,0)^*$
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$ 	$\text{Caso } (3,0)^{1,*,*}$		$\text{Caso } (3,0)^{*,0,1} \quad \text{Caso } (2,0)^*$
$M = \begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 	$\text{Caso } (3,0)^{*,1,1}$		$\text{Caso } (3,0)^{*,0,0} \quad \text{Caso } (2,0)^*$
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 	$\text{Caso } (3,0)^{1,0,0}$		$\text{Caso } (3,0)^{0,0,0} \quad \text{Caso } (2,0)^0$

Figura 4.7: Matrizes de ordem 3×3

Observe que o caso de verificar se um grafo G é $(3,0)^{0,0,0}$ corresponde ao caso trivial de verificar se G é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente (i.e, um grafo sem arestas). Note também que os casos de verificar se um grafo é $(3,0)^{*,0,0}$ ou $(3,0)^{*,*,0}$ ou $(3,0)^{*,0,1}$ equivalem a verificar se o grafo é $(2,0)^*$. Da mesma forma, verificar se um grafo é $(3,0)^{0,1,1}$ equivale a verificar se o grafo é $(2,0)^1$.

Analisaremos os casos $(3,0)^{1,1,1}$, $(3,0)^{*,*,*}$, $(3,0)^{*,1,1}$, $(3,0)^{1,*,*}$ e $(3,0)^{1,0,0}$, já que os

demais casos podem ser reduzidos a alguns dos casos da matriz 2×2 , já demonstrados na seção 4.1.

Teorema 4.5 *Seja G um cografo. G é $(3, 0)^{1,1,1}$, se e somente se, G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.8 como subgrafo induzido.*

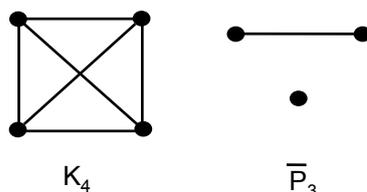


Figura 4.8: Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,1,1}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(3, 0)^{1,1,1}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.8 como subgrafo induzido. No que segue, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se para todo G_i , $i = 1, \dots, k$, $|G_i| = 1$, então G é $(3, 0)^{1,1,1}$. Contradição. Logo, deve existir algum G_i , tal que $|G_i| \geq 2$. Neste caso, G contém \overline{P}_3 . Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Se existir algum G_i tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então $G - G_i$ não pode ser $(2, 0)^1$, caso contrário, G seria $(3, 0)^{1,1,1}$. Contradição.

Logo, pelo Teorema 4.2, $G - G_i$ deve conter \overline{P}_3 ou K_3 como subgrafo induzido. Em qualquer um dos casos, obtemos um absurdo pela existência de um \overline{P}_3 ou $K_3 + K_1 \cong K_4$ em G , como subgrafo induzido.

Suponha para todo G_i , $i = 1, \dots, k$, que G_i contém aresta. Como $k \geq 2$, G contém K_4 . Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(3, 0)^{1,1,1}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos K_4 e \overline{P}_3 como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.6 *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{*,*,*}$ se e somente se G não contém o grafo da Figura 4.9 como subgrafo induzido.*

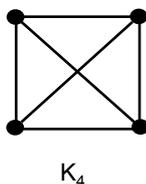


Figura 4.9: Obstrução minimal do caso $(3, 0)^{*,*,*}$

Prova.

Este resultado segue diretamente do fato de que os cografos são perfeitos. ■

Teorema 4.7 *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{*,1,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.10 como subgrafo induzido.*

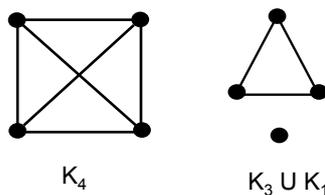


Figura 4.10: Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{*,1,1}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(3, 0)^{*,1,1}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.10 como subgrafo induzido. Assim, vamos analisar dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se algum G_i contiver K_3 , então G contém $K_3 \cup K_1$. Absurdo. Desta forma, todos os G_i 's não contém K_3 , assim, pelo teorema 4.1 temos que G é $(2, 0)^*$, e desta forma, G é $(3, 0)^{*,1,1}$. Contradição.

(ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedades da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se algum G_i é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então $G - G_i$ não pode ser $(2, 0)^*$, caso contrário G seria $(3, 0)^{*,1,1}$. Contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, $G - G_i$ contém K_3 , e portanto G contém K_4 . Absurdo. Temos então que cada G_i contém um K_2 , logo G contém um K_4 como subgrafo induzido.

Concluimos que o cografo G é $(3, 0)^{*,1,1}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos K_4 e $K_3 \cup K_1$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.8 *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{1,*,*}$ se e somente se G não contém o grafo da Figura 4.11 como subgrafo induzido.*

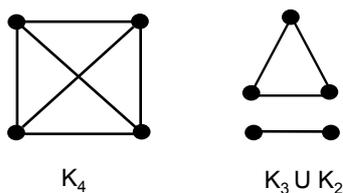


Figura 4.11: Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,*,*}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(3, 0)^{1,*,*}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.11 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se para todo G_i , $i = 1, \dots, k$, G_i é trivial, então G é $(3, 0)^{1,*,*}$. Contradição! Logo, $|G_i| \geq 2$, para todo $i = 1, \dots, k$. Temos que G não é $(2, 0)^*$, caso contrário, G seria $(3, 0)^{1,*,*}$. Contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, G contém K_3 , e desta forma, G_i contém K_3 . Como cada G_i , $|G_i| \geq 2$ e $k \geq 2$, então G contém $K_3 \cup K_2$. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se algum G_i for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então $G - G_i$ não pode ser $(2, 0)^*$, caso contrário G seria $(3, 0)^{1,*,*}$. Contradição. Logo, pelo Teorema 4.1 $G - G_i$ contém K_3 , então G contém K_4 .

Absurdo. Desta forma, suponhamos que todo G_i contém um K_2 , logo G contém $K_2 + K_2 \cong K_4$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(3, 0)^{1,*,*}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos K_4 e $K_3 \cup K_2$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.9 *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{1,0,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.12 como subgrafo induzido.*

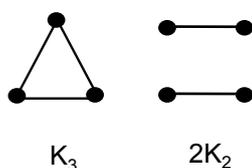


Figura 4.12: Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,0,0}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(3, 0)^{1,0,0}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.12 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se algum G_i , $i = 1, \dots, k$, for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então, por minimalidade de G , $G - G_i$ é $(3, 0)^{1,0,0}$, e por consequência, G é $(3, 0)^{1,0,0}$, contradição. Logo, todo G_i contém um K_2 , e neste caso, G contém um $2K_2$. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se $k \geq 3$, então G contém K_3 como subgrafo induzido, contradição. Se $k = 2$ então se G_i contém K_2 , então G contiver $K_2 + K_1 \cong K_3$. Absurdo. Logo, cada G_i é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, e neste caso, G é $(2, 0)^1$, e por consequência, G é $(3, 0)^{1,0,0}$. Absurdo!

Concluimos que o cografo G é $(3, 0)^{1,0,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos K_3 e $2K_2$ como subgrafo induzido. ■

4.2.2 Casos (0,3)

Na Figura 4.13 são listadas todas as matrizes de ordem 3×3 referentes aos Casos (0,3) que serão aqui considerados nesta subseção.

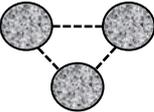
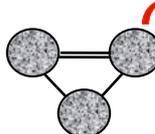
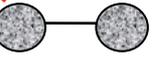
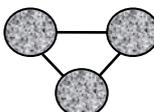
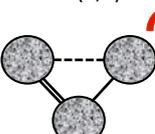
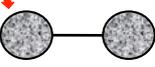
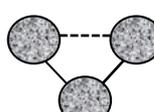
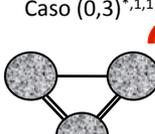
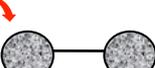
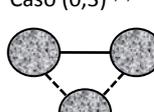
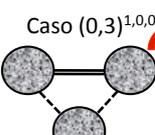
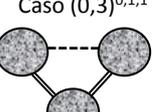
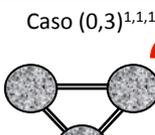
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Caso (0,3) ^{0,0,0} 	Caso (0,3) ^{1,*,*} 	Caso (0,2) [*] 
$M = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	Caso (0,3) ^{*,*,*} 	Caso (0,3) ^{0,1,*} 	Caso (0,2) [*] 
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	Caso (0,3) ^{0,*,*} 	Caso (0,3) ^{*,1,1} 	Caso (0,2) [*] 
$M = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Caso (0,3) ^{*,0,0} 	Caso (0,3) ^{1,0,0} 	Caso (0,2) ⁰ 
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Caso (0,3) ^{0,1,1} 	Caso (0,3) ^{1,1,1} 	Caso (0,2) ¹ 

Figura 4.13: Matrizes de ordem 3×3

Observe que o caso de verificar se um grafo G é $(0,3)^{1,1,1}$ corresponde ao caso trivial de verificar se G é uma clique. Note também que os casos de verificar se um grafo é $(0,3)^{*,1,1}$ ou $(0,3)^{1,*,*}$ ou $(0,3)^{0,1,*}$ equivale a verificar se o grafo é $(0,2)^*$. Da mesma forma, verificar se um grafo é $(0,3)^{1,0,0}$, equivale a verificar se o grafo é $(0,2)^0$.

No entanto, os casos $(0,3)^{0,0,0}$, $(0,3)^{*,*,*}$, $(0,3)^{0,*,*}$, $(0,3)^{*,0,0}$ e $(0,3)^{0,1,1}$, são complementares aos casos $(3,0)^{1,1,1}$, $(3,0)^{*,*,*}$, $(3,0)^{1,*,*}$, $(3,0)^{*,1,1}$ e $(3,0)^{1,0,0}$, respectivamente, e já demonstrados na subseção 4.2.1.

4.2.3 Casos (2,1)

Na Figura 4.14 são listadas todas as matrizes de ordem 3×3 referentes aos Casos (2,1) que serão considerados nesta subseção.

<p>Caso $(2,1)^{*,*}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{*,1,1}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{0,0,0}$</p>	<p>Caso $(1,1)^0$</p>
<p>Caso $(2,1)^{1,1,1}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{*,1,0}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{0,1,1}$</p>	<p>Caso $(1,1)^1$</p>
<p>Caso $(2,1)^{1,*,*}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{1,0,0}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{0,*,*}$</p>	<p>Caso $(1,1)^*$</p>
<p>Caso $(2,1)^{*,0,0}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{1,1,0}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{0,1,*}$</p>	<p>Caso $(1,1)^*$</p>
<p>Caso $(2,1)^{1,1,*}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{*,1,*}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & * \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{0,0,*}$</p>	<p>Caso $(1,1)^*$</p>
<p>Caso $(2,1)^{0,1,0}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{1,*,0}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(2,1)^{*,*,0}$</p> $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

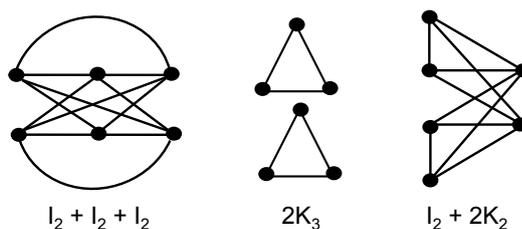
Figura 4.14: Matrizes de ordem 3×3

Na demonstração destes resultados, observe que o caso de se verificar se um grafo G é $(2,1)^{0,0,0}$ equivale a verificar se o grafo é $(1,1)^0$. Da mesma forma, o caso de se verificar se um grafo é $(2,1)^{0,1,1}$ equivale a se verificar se o grafo é $(1,1)^1$. Note também, que os casos de se verificar se um grafo é $(2,1)^{0,*,*}$ ou $(2,1)^{0,1,*}$ ou $(2,1)^{0,0,*}$ são equivalentes a verificar se o grafo é $(1,1)^*$.

Analisaremos todos os demais casos da Figura 4.14, uma vez que os casos relacionados acima podem ser reduzidos a alguns dos casos da matriz $M_{2 \times 2}$, já demonstrados na seção 4.1.

Teorema 4.10 [5] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2,1)^{*,*,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.15 como subgrafo induzido.*

Tal resultado se encontra em [5], e apresentaremos uma prova alternativa.

Figura 4.15: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{*,*,*}$ **Prova.**

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{*,*,*}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.15 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

(i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Cada G_i não pode ser $(2, 0)^*$, caso contrário, $G' = G - G_i$ é $(2, 1)^{*,*,*}$, por minimalidade, e $G = G' \cup G_i$ também seria $(2, 1)^{*,*,*}$, uma contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, cada G_i contém K_3 , e portanto G contém $K_3 \cup K_3 \cong 2K_3$. Absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Todo G_i deve ser desconexo, pois caso contrário, algum G_i seria trivial, e assim, $G' = G - G_i$ é um grafo $(2, 1)^{*,*,*}$, por minimalidade, e então G seria um grafo $(2, 1)^{*,*,*}$. Contradição! Logo, cada G_i contém um par de vértices não adjacentes. Desta forma, analisaremos dois subcasos ($k \geq 3$, $k = 2$):

- $k \geq 3$: temos que cada G_i possui um par de vértices não adjacentes, e assim, G contém $I_2 + I_2 + I_2$. Absurdo.

- $k = 2$: se G_1 e G_2 forem $(1, 1)^*$ então $G = G_1 + G_2$ é um grafo $(2, 1)^{*,*,*}$. Contradição! Logo, algum G_i , $i = 1, 2$ não é $(1, 1)^*$, isto é, pelo Teorema 4.3, G_i contém C_4 ou $2K_2$ como subgrafo induzido. Desta forma, vejamos as seguintes possibilidades:

- Se G_i contém C_4 então G contém $I_2 + I_2 + I_2$. Absurdo.

- Se G_i contém $2K_2$ então G contém $I_2 + 2K_2$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{*,*,*}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $2K_3$, $I_2 + 2K_2$ e $I_2 + I_2 + I_2$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.11 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,1,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.16 como subgrafo induzido.*

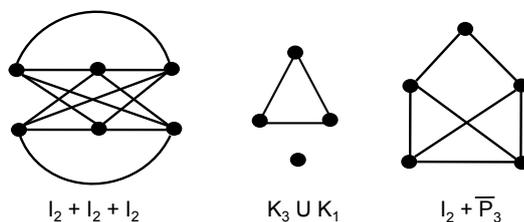


Figura 4.16: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,1}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{*,1,1}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.16 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Temos que G não pode ser $(2, 0)^*$, caso contrário, G seria $(2, 1)^{*,1,1}$. Contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, G contém K_3 , e desta forma, G contém $K_3 \cup K_1$. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, então $G - G_i$ é $(2, 1)^{*,1,1}$, por minimalidade e G é $(2, 1)^{*,1,1}$. Contradição. Desta forma, cada G_i possui pelo menos um par de vértices não adjacentes. Se $k \geq 3$, então G contém $I_2 + I_2 + I_2$. Absurdo! Para $k = 2$, se G for $(2, 0)^*$, então G é $(2, 1)^{*,1,1}$, contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, G contém K_3 . Portanto, analisaremos as seguintes possibilidades:

- Se G_i contém K_3 , então G contém $K_3 \cup K_1$. Absurdo.
- Se $G_1 + G_2$ contém K_3 , então pelo menos um G_i contém uma aresta, digamos, G_1 . Como ambos são desconexos, então G_1 contém um I_2 e G_2 contém \overline{P}_3 . Logo, G contém $I_2 + \overline{P}_3$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{*,1,1}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $I_2 + I_2 + I_2$, $K_3 \cup K_1$ e $I_2 + \overline{P}_3$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.12 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,1,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.17 como subgrafo induzido.*

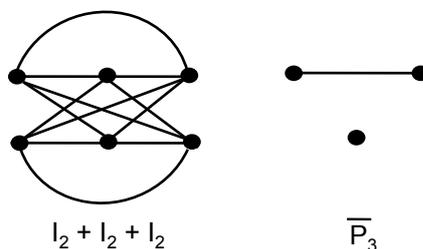


Figura 4.17: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,1}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{1,1,1}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.17 como subgrafo induzido. Assim, vamos considerar dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, \dots, k$, então G é $(2, 1)^{1,1,1}$, uma contradição. Logo, existe um G_i que contém uma aresta, e desta forma G contém $K_1 \cup K_2 \cong \overline{P}_3$. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, então $G - G_i$ é $(2, 1)^{1,1,1}$, por minimalidade e, conseqüentemente, G é $(2, 1)^{1,1,1}$, uma contradição. Desta forma, cada G_i possui pelo menos um par de vértices não adjacentes. Se $k \geq 3$, por minimalidade, G contém $I_2 + I_2 + I_2$, absurdo. Para $k = 2$, se G for $(2, 0)^1$, então G é $(2, 1)^{1,1,1}$, contradição. Logo, pelo Teorema 4.2, G contém K_3 ou \overline{P}_3 . Em ambas situações, podemos garantir que G contém \overline{P}_3 , já que G_i é desconexo. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{1,1,1}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $I_2 + I_2 + I_2$ e \overline{P}_3 como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.13 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.18 como subgrafo induzido.*

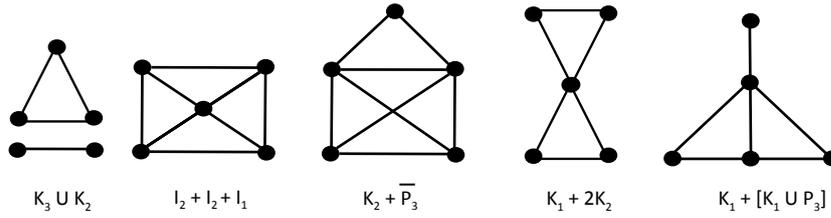


Figura 4.18: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,0}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{*,1,0}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.18 como subgrafo induzido. Assim, consideraremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, 2, \dots, k$, então G é $(2, 1)^{*,1,0}$, pois por minimalidade, $G - G_i$ é $(2, 1)^{*,1,0}$. Contradição. Dessa forma, $|G_i| \geq 2$, para todo $i = 1, \dots, k$. Temos que G não é $(2, 0)^*$, caso contrário G seria $(2, 1)^{*,1,0}$, uma contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, G contém K_3 e desta forma, G_i contém K_3 . Como cada G_i , $|G_i| \geq 2$ e $k \geq 2$, então G contém $K_3 \cup K_2$. Absurdo.
- (ii) \bar{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, então G é $(2, 1)^{*,1,0}$, uma contradição. Desta forma, existe pelo menos um G_i que possui pelo menos um par de vértices não adjacentes, $i = 1, 2, \dots, k$. Assim, analisaremos os dois subcasos ($k \geq 3, k = 2$):
 - $k \geq 3$: se existem G_i e G_j , ambos contendo I_2 , então G contém $I_2 + I_2 + I_1$. Absurdo. Se apenas G_i contém I_2 e G_i for $(1, 1)^1$, então G é $(2, 1)^{*,1,0}$, uma contradição. Logo, pelo Teorema 4.6, G_i contém C_4 ou \bar{P}_3 . Desta forma, se G_i contém C_4 , então G contém $C_4 + K_1$. Absurdo. E se G_i contém \bar{P}_3 , então G contém $\bar{P}_3 + K_2$. Absurdo.
 - $k = 2$: consideraremos mais dois subcasos:
 - i. G_1 contém I_2 e G_2 é trivial. Se G_1 for $(1, 1)^1$, então G é $(2, 1)^{*,1,0}$. Absurdo! Logo, pelo Teorema 4.6, G_1 contém C_4 ou \bar{P}_3 . Considerando que G_1 contenha C_4 , então G contém $I_2 + I_2 + I_1$. Se G_1 contém \bar{P}_3 , então, analisaremos as seguintes situações:

- Se G_1 for $(1, 1)^0$, então G é $(2, 1)^{*,1,0}$. Contradição. Logo, G_1 contém P_3 ou $2K_2$. Se G_1 contém P_3 , então como G_1 é desconexo temos que G_1 contém $P_3 \cup K_1$, logo G contém $K_1 + (K_1 \cup P_3)$. E, se G_1 contém $2K_2$, então G contém $2K_2 + K_1$. Absurdo.
- ii. Ambos G_1 e G_2 contém I_2 . Se G é $(2, 0)^*$ então G é $(2, 1)^{*,1,0}$. Contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, G contém K_3 . Já que G contém K_3 , então pelo menos um G_i , digamos G_1 , contém uma aresta. Se G_2 também contiver K_2 , então G contém $\overline{P}_3 + K_2$, já que G_1 contém \overline{P}_3 , pois é desconexo. Absurdo. No entanto, se apenas G_1 contém K_2 e G_2 é tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente, então:

- * se G_1 for $(1, 1)^0$ então G é $(2, 1)^{*,1,0}$. Contradição.
- * se G_1 não for $(1, 1)^0$ então G_1 contém $2K_2$ ou P_3 . Dessa forma, considerando que G_1 contenha $2K_2$, então G contém $K_1 + 2K_2$. Absurdo. E, se G_1 contém P_3 , então G contém $K_1 + (P_3 \cup K_1)$, já que G_1 é desconexo. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{*,1,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $K_3 \cup K_2$, $I_2 + I_2 + I_1$, $K_2 + \overline{P}_3$, $K_1 + 2K_2$ e $K_1 + [K_1 \cup P_3]$ como subgrafo induzido.

■

Teorema 4.14 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,*,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.19 como subgrafo induzido.*

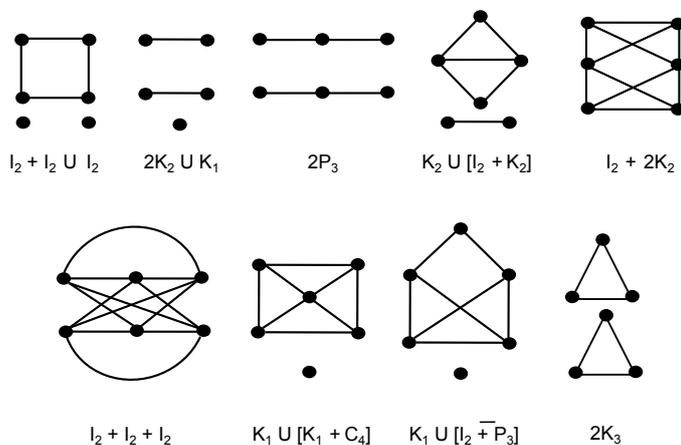


Figura 4.19: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,*}$

Prova.

Neste caso, a prova é demonstrada através do complemento do grafo $(2, 1)^{1,*,*}$. Portanto, o resultado segue conforme o Teorema 4.15.

Teorema 4.15 *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.20 como subgrafo induzido.*

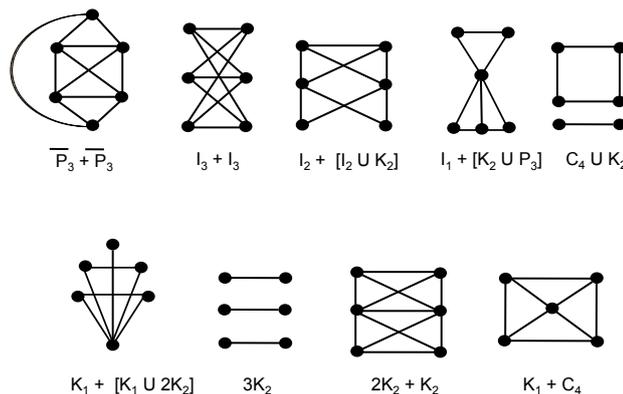


Figura 4.20: Obstruções minimais do caso $(1, 2)^{*,*,0}$

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(1, 2)^{*,*,0}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.20 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

(i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, \dots, k$, então G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$. Contradição! Logo, para todo $i = 1, \dots, k$, G_i contém K_2 . Para $k \geq 3$, então G contém $3K_2$. Absurdo. Analisaremos o caso onde $k = 2$.

- Se ambos G_1 e G_2 forem $(1, 1)^*$, então G é $(1, 2)^{*,*,0}$. Contradição! Logo, algum G_i não é $(1, 1)^*$, e desta forma, pelo Teorema 4.3, G_i contém $2K_2$ ou C_4 . Se G_i contém $2K_2$, então G contém $3K_2$. Absurdo. Considerando que G_i contém C_4 , então G contém $C_4 \cup K_2$. Absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, \dots, k$, então G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$. Contradição! Logo, existe um G_i , $i = 1, \dots, k$ tal que G_i contém um par de vértices não adjacentes. No que segue, analisaremos os seguintes subcasos ($k \geq 3$, $k = 2$):

- $k \geq 3$: se ambos G_i e G_j possuem um par de vértices não adjacentes, então, G contém $I_2 + I_2 + I_1 \cong C_4 + K_1$. Absurdo. Se apenas um G_i é não trivial, digamos G_1 , e se G_1 for $(1, 1)^*$, então G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$. Contradição! Logo, pelo Teorema 4.3, G_1 contém $2K_2$ ou C_4 . Considerando que G_1 contenha $2K_2$, então G contém $2K_2 + K_2$. Absurdo. Se G_1 contém C_4 , então G contém $C_4 + K_1$. Absurdo.

- $k = 2$: considerando G_1 e G_2 tais componentes, analisaremos as seguintes viabilidades:

i. $|G_1| \leq 2$ ou $|G_2| \leq 2$.

* Se G_1 for trivial e G_2 for $(1, 1)^*$, então G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$, uma contradição. Logo, G_2 contém $2K_2$ ou C_4 . Portanto, se G_2 for um grafo $(0, 2)^0$, então G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$, uma contradição! Logo, G_2 contém I_3 ou P_3 . Dessa forma, vejamos as seguintes possibilidades:

a) se G_2 contém $2K_2$ e I_3 , então G contém $(2K_2 \cup K_1) + K_1$. Absurdo.

b) se G_2 contém $2K_2$ e P_3 , então G contém $(P_3 \cup K_2) + K_1$. Absurdo.

c) se G_2 contém C_4 e I_3 , então G contém $K_1 + C_4$. Absurdo.

d) se G_2 contém C_4 e P_3 , então G contém $C_4 + K_1$. Absurdo.

* Se $|G_1| = 2$ e G_2 for um grafo $(0, 2)^0$, então G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$. Contradição! Logo, G_2 contém I_3 ou P_3 . Neste caso, consideraremos duas possibilidades:

a) se G_2 contém I_3 . Considerando G_2 tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente, então G é $(1, 2)^{*,*,0}$, Contradição! Logo, G_2 contém uma aresta. Desta forma, G contém $I_2 + (I_2 \cup K_2)$. Absurdo.

b) se G_2 contém P_3 , então G contém $I_2 + P_3 \cong I_2 + I_2 + I_1$. Absurdo.

* Se $|G_2| \leq 2$, então a prova é análoga ao caso anterior.

* Se $|G_1| \leq 2$ e $|G_2| \leq 2$, então temos as possibilidades da Figura 4.21 . Portanto o grafo é $(1, 2)^{*,*,0}$.

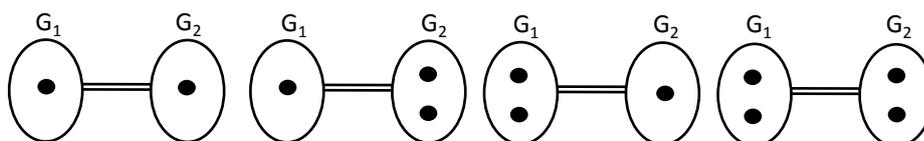


Figura 4.21: Subgrafos Bipartidos

ii. $|G_1| \geq 3$ e $|G_2| \geq 3$.

- * se G_1 e G_2 são tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes, então G contém $I_3 + I_3$. Absurdo.
- * se apenas um G_i é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, suponhamos, sem perda de generalidade, que seja G_1 tal conjunto então se G_2 for um grafo $(0, 2)^0$, então G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$. Assim, G_2 não é um grafo $(0, 2)^0$, e portanto G_2 contém I_3 ou P_3 . Desta forma, analisaremos as seguintes possibilidades:
 - a) Se G_2 contém I_3 , então G contém $I_3 + I_3$. Absurdo.
 - b) Se G_2 contém P_3 , então G contém $I_2 + I_2 + I_1$. Absurdo.
- * se cada G_i contém pelo menos uma aresta, logo G_1 e G_2 contém $\overline{P_3}$, já que ambos são desconexos e possuem aresta. Assim, G contém $\overline{P_3} + \overline{P_3}$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(1, 2)^{*,*,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $\overline{P_3} + \overline{P_3}$, $I_3 + I_3$, $I_2 + [I_2 \cup K_2]$, $I_1 + [K_2 \cup P_3]$, $C_4 \cup K_2$, $K_1 + [K_1 \cup 2K_2]$, $3K_2$, $2K_2 + K_2$ e $K_1 + C_4$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.16 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,0,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.22 como subgrafo induzido.*

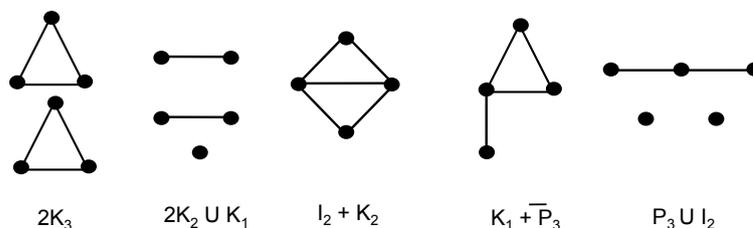


Figura 4.22: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{1,0,0}$

Prova.

Neste caso, a prova é demonstrada através do complemento do grafo $(2, 1)^{1,0,0}$. Assim, o resultado segue conforme o Teorema 4.17.

Teorema 4.17 *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 2)^{1,1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.23 como subgrafo induzido.*

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(1, 2)^{1,1,0}$.

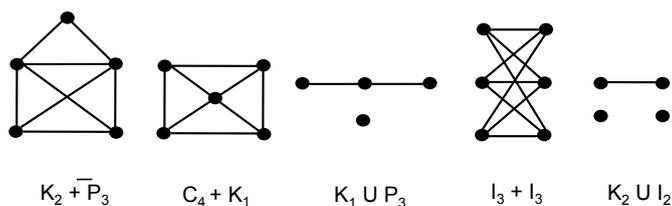


Figura 4.23: Obstruções mínimas de G do caso $(1, 2)^{1,1,0}$

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.23 como subgrafo induzido. No que segue, vamos considerar dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, \dots, k$, então G é $(1, 2)^{1,1,0}$. Contradição. Logo, algum G_i possui um par de vértices adjacentes. Se G for um grafo $(0, 2)^0$, então G é $(1, 2)^{1,1,0}$. Contradição. Logo, G contém P_3 ou I_3 . Se G contém P_3 então G contém $K_1 \cup P_3$, já que G é desconexo,. Absurdo. Se G contém I_3 , então G contém $K_2 \cup I_2$, já que G contém aresta. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, \dots, k$, então G é $(1, 2)^{1,1,0}$. Contradição. Logo existe algum G_i tal que $|V(G_i)| \geq 2$, ou seja, G_i contém um par e vértices não adjacentes. Sem perda de generalidade, suponha que seja G_1 . Vamos analisar os seguintes subcasos ($k \geq 3$, $k = 2$):

- $k \geq 3$: Se G_1 for tal que $V(G_1)$ é um conjunto independente, então se G_j for trivial, para todo $j = 2, \dots, k$, então G é $(1, 2)^{1,1,0}$, com partição $G_2 + G_3 + \dots + G_k$ na clique e G_1 no independente. Contradição. Logo, existe G_j tal que $|G_j| \geq 2$, isto é, G_j contém um par de vértices não adjacentes. Como $k \geq 3$, considerando que ambos G_1 e G_j contenham I_2 , então G contém $I_2 + I_2 + I_1 \cong C_4 + K_1$. Absurdo. Se G_1 contém um par de vértices adjacentes, temos que G_1 contém \overline{P}_3 , pois G_1 é desconexo, logo G contém $\overline{P}_3 + K_2$. Absurdo.

- $k = 2$:

- se G_1 for tal que $V(G_1)$ é um conjunto independente, então G_2 não pode ser $(0, 2)^*$, caso contrário, G seria $(1, 2)^{1,1,0}$, contradição. Logo, G_2 contém P_3 ou I_3 . Considerando que G_2 contém P_3 , então como G_2 é desconexo, G contém $P_3 \cup K_1$. Absurdo. Se G_2 contém I_3 , então vejamos as seguintes possibilidades:

* Se $|G_1| \geq 3$, então G contém $I_3 + I_3$. Absurdo.

- * Se $|G_1| = 2$ e se G_2 for tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente, então G é $(1, 2)^{1,1,0}$. Contradição. Logo, G_2 possui uma aresta. Como G_2 contém K_2 e G_2 contém I_3 , então G_2 contém $K_2 \cup I_2$. Absurdo.
- Se G_2 for tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente, a prova é análoga ao caso apresentado acima.
- Se ambos G_1 e G_2 contiverem um par de vértices adjacentes, então G_1 e G_2 contém \overline{P}_3 . Desta forma, G contém $\overline{P}_3 + K_2$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(1, 2)^{1,1,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $K_2 + \overline{P}_3$, $C_4 + K_1$, $K_1 \cup P_3$, $I_3 + I_3$ e $K_2 \cup I_2$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.18 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,0,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.24 como subgrafo induzido.*

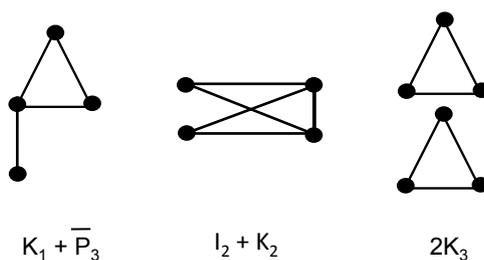


Figura 4.24: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,0,0}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{*,0,0}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.24 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos considerando dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Cada G_i não pode ser $(2, 0)^*$, caso contrário, $G' = G - G_i$ é $(2, 1)^{*,0,0}$, por minimalidade e $G = G' \cup G_i$ também seria $(2, 1)^{*,0,0}$, uma contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, cada G_i contém K_3 , e portanto, G contém $K_3 \cup K_3 \cong 2K_3$. Absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, \dots, k$, então G é $(2, 1)^{*,0,0}$. Contradição. Logo, existe algum G_i que contém um par de vértices não adjacentes. Para $k \geq 3$, G contém $I_2 + K_2$. Absurdo. Analisaremos o caso $k = 2$:

- Se G for $(2, 0)^*$, então G é $(2, 1)^{*,0,0}$, uma contradição. Logo, pelo Teorema 4.1, G contém K_3 . Temos duas possibilidades, G_i conter K_3 ou $G_1 \cup G_2$ conter K_3 , isto implica em ambos os casos G_i conter uma aresta. Como G_i é desconexo, existe um vértice que é não incidente a esta aresta. Logo, G contém $K_1 + \overline{P}_3$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{*,0,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $K_1 + \overline{P}_3$, $I_2 + K_2$ e $2K_3$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.19 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.25 Como subgrafo induzido.*

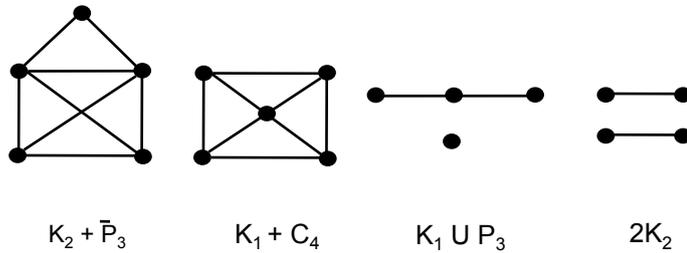


Figura 4.25: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{1,1,0}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{1,1,0}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.25 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Temos que G não pode ser $(1, 1)^0$, caso contrário, G seria $(2, 1)^{1,1,0}$, uma contradição. Logo, G contém $2K_2$ ou P_3 . Se G contém $2K_2$, então temos um subgrafo proibido. Absurdo.

Considerando que G contém P_3 , então G contém $P_3 \cup K_1$, já que G é desconexo. Absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para todo $i = 1, \dots, k$, então, G é $(2, 1)^{1,1,0}$. Absurdo! Logo, existe um G_i não trivial. Suponha, sem perda de generalidade, que o grafo G_1 é não trivial. Vamos analisar os seguintes subcasos ($k \geq 3, k = 2$):

- $k \geq 3$: se G_j for trivial, para todo $j = 2, \dots, k$. Se G_1 for tal que $V(G_1)$ é um conjunto independente, então G é $(2, 1)^{1,1,0}$. Contradição! Logo, G_1 contém K_2 . Como G_1 é desconexo temos que G_1 contém \overline{P}_3 , e assim, G contém $\overline{P}_3 + K_2$. Se existem pelo menos duas componentes não triviais, digamos G_1 e G_2 então ambos G_1 e G_2 contém I_2 . Como $k \geq 3$ então G contém $I_2 + I_2 + I_1 \cong C_4 + K_1$. Absurdo.

- $k = 2$: se G for $(2, 0)^1$, então G é $(2, 1)^{1,1,0}$, uma contradição! Logo, pelo Teorema 4.2, G contém K_3 ou \overline{P}_3 . Desta forma, podemos garantir que G_1 ou G_2 possui uma aresta. Sem perda de generalidade, se G_1 contém uma aresta, como G_1 é desconexo, então G_1 contém \overline{P}_3 .

* Se G_2 contém K_2 , então G contém $\overline{P}_3 + K_2$. Absurdo.

* Se G_2 não contém K_2 então G_2 é tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente. Desta forma, se G_1 for $(1, 1)^0$, então G é $(2, 1)^{1,1,0}$. Contradição! Logo, G_1 contém P_3 ou $2K_2$. Se G_1 contém $2K_2$, então G contém $2K_2$. Absurdo. Considerando que G contém P_3 , então G contém $P_3 \cup K_1$, já que G_1 é desconexo. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{1,1,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $K_2 + \overline{P}_3$, $K_1 + C_4$, $K_1 \cup P_3$ e $2K_2$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.20 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,1,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.26 como subgrafo induzido.*

Prova.

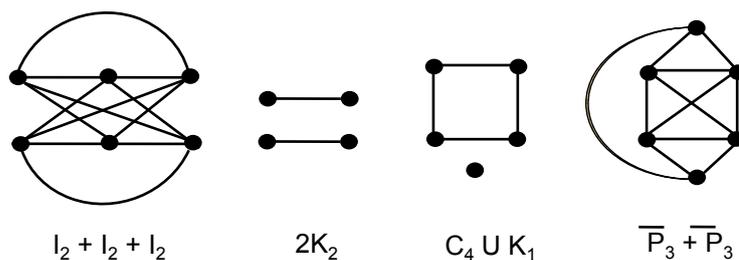


Figura 4.26: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,*}$

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{1,1,*}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.26 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos os seguintes casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G for $(1, 1)^*$, então G é $(2, 1)^{1,1,*}$. Contradição! Logo pelo Teorema 4.3, G contém $2K_2$ ou C_4 . Se G contém $2K_2$, então temos um subgrafo proibido. Absurdo! Se G contém C_4 , então G contém $C_4 \cup K_1$, pois G é desconexo. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, \dots, k$, então, por minimalidade de G , $G - G_i$ é $(2, 1)^{1,1,*}$, e por consequência, G é $(2, 1)^{1,1,*}$, contradição! Logo, cada G_i contém um par de vértices não adjacentes, para $i = 1, \dots, k$. Para $k \geq 3$, então G contém $I_2 + I_2 + I_2$, por minimalidade. Absurdo. Analisaremos o caso onde $k = 2$:

- Se G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes, então G é $(2, 1)^{1,1,*}$. Contradição.
- Se apenas um G_i é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, digamos G_1 , então se G_2 for $(1, 1)^*$, então G é $(2, 1)^{1,1,*}$. Contradição. Logo, G_2 contém $2K_2$ ou C_4 . Se G_2 contém $2K_2$, então G contém $2K_2$. Absurdo! Se G_2 contém C_4 então G contém $C_4 \cup K_1$, já que G_2 é desconexo. Absurdo.
- Se ambos, G_1 e G_2 contém arestas, então como G_1 e G_2 são desconexos, temos que G_1 e G_2 contém \overline{P}_3 . Logo, G contém $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{1,1,*}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $I_2 + I_2 + I_2$, $2K_2$, $C_4 \cup K_1$ e $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.21 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,1,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.27 como subgrafo induzido.*

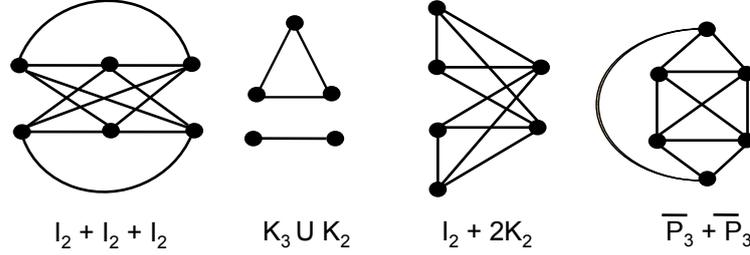


Figura 4.27: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,*}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{*,1,*}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.27 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, 2, \dots, k$, então, por minimalidade de G , $G - G_i$ é $(2, 1)^{*,1,*}$, e por consequência, G é $(2, 1)^{*,1,*}$. Contradição! Logo, cada G_i contém um par de vértices adjacentes, para todo $i = 1, \dots, k$. temos que o grafo G não pode ser $(2, 0)^*$, caso contrário, G seria $(2, 1)^{*,1,*}$, contradição! Logo pelo Teorema 4.1, G contém K_3 , e como G é desconexo, G contém $K_3 \cup K_2$. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, \dots, k$, então, por minimalidade, $G - G_i$ é $(2, 1)^{*,1,*}$, e portanto é $(2, 1)^{*,1,*}$. Contradição. Logo, todo G_i contém um par de vértices não adjacentes, para todo $i = 1, \dots, k$. Para $k \geq 3$, por minimalidade, G contém $I_2 + I_2 + I_2$. Absurdo. Analisaremos o subcaso onde $k = 2$:

- Se G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes, então G é $(2, 1)^{*,1,*}$. Contradição!
- Se apenas um G_i é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente. Sem perda de generalidade, suponhamos que este grafo é G_1 . Se G_2 for $(1, 1)^*$, então G é $(2, 1)^{*,1,*}$. Contradição! Logo pelo Teorema 4.3, G_2 contém $2K_2$ ou C_4 .

- * Se G_2 contém $2K_2$, então G contém $2K_2 + I_2$. Absurdo.
- * Se G_2 contém C_4 , então G contém $I_2 + I_2 + I_2$. Absurdo.
- Se ambos, G_1 e G_2 contém arestas, então G_1 e G_2 contém K_2 e K_2 . Como G_1 e G_2 são desconexos, temos que G_1 e G_2 contém \overline{P}_3 e \overline{P}_3 . Logo, G contém $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{*,1,*}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $I_2 + I_2 + I_2$, $K_3 \cup K_2$, $I_2 + 2K_2$ e $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.22 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{0,1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.28 como subgrafo induzido.*

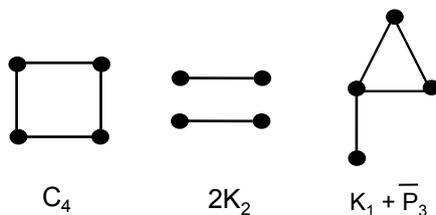


Figura 4.28: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{0,1,0}$

Prova.

Neste caso, a prova é demonstrada através do complemento do grafo $(2, 1)^{0,1,0}$. Portanto, o resultado segue conforme o Teorema 4.23.

Teorema 4.23 *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 2)^{1,0,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.29 como subgrafo induzido.*

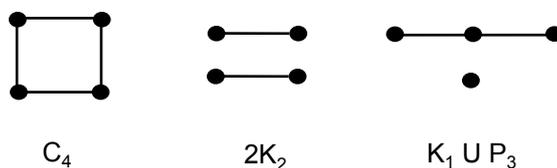


Figura 4.29: Obstruções minimais do caso $(1, 2)^{1,0,1}$

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(1, 2)^{1,0,1}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.29 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G for $(1, 1)^0$, então G é $(1, 2)^{1,0,1}$. Contradição! Logo G contém $2K_2$ ou P_3 . Se G contém $2K_2$, então temos um subgrafo proibido. Absurdo! Se G contém P_3 , então G contém $K_1 \cup P_3$, já que G é desconexo. Absurdo.
- (ii) \bar{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, \dots, k$, então G é um grafo $(1, 2)^{1,0,1}$. Contradição! Logo, $|G_i| \geq 2$, para todo $i = 1, \dots, k$. Desta forma, G contém $I_2 + I_2 \cong C_4$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(1, 2)^{1,0,1}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos C_4 , $2K_2$ e $K_1 \cup P_3$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.24 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,*,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.30 como subgrafo induzido.*

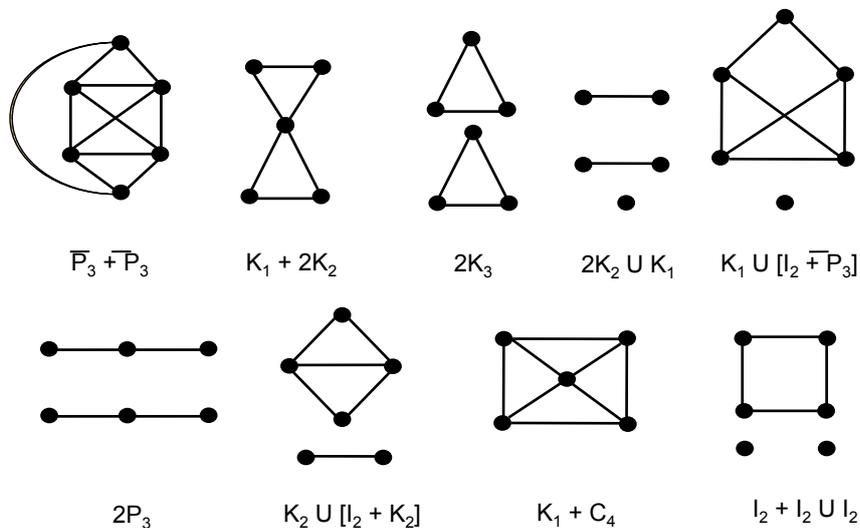


Figura 4.30: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,0}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{1,*,0}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.30 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

(i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se algum G_i , para $i = 1, \dots, k$, for tal que $V(G_i)$ é uma clique, então se $G - G_i$ for $(2, 0)^1$, G é $(2, 1)^{1,*,0}$. Contradição! Logo, pelo Teorema 4.2, $G - G_i$ contém K_3 ou \overline{P}_3 . Dessa forma, vamos considerar as seguintes situações:

a) $|G_i| \geq 3$. Se $G - G_i$ contém K_3 , então G contém $2K_3$. Absurdo. Se $G - G_i$ contém \overline{P}_3 , então G contém $2K_2 \cup K_1$. Absurdo.

b) $|G_i| = 2$. Se $G - G_i$ for tal que $V(G - G_i)$ é uma clique, então G é $(2, 1)^{1,*,0}$. Contradição! Logo, $G - G_i$ possui um I_2 . Como $G - G_i$ contém K_3 ou \overline{P}_3 , então temos as seguintes possibilidades:

- Se $G - G_i$ contém K_3 , então G contém $2K_3$. Absurdo!

- Se $G - G_i$ contém $K_1 + \overline{P}_3$, então G contém $2K_2 \cup K_1$. Absurdo!

- Se $G - G_i$ contém $K_2 + I_2$, então G contém $(K_2 + I_2) \cup K_2$. Absurdo!

c) $|G_i| = 1$. Se $G - G_i$ for $(1, 1)^*$, então G é $(2, 1)^{1,*,0}$. Contradição! Logo, pelo Teorema 4.3, $G - G_i$ contém C_4 ou $2K_2$. Se $G - G_i$ contém C_4 , então como $G - G_i$ contém K_3 ou \overline{P}_3 , pelo explicado acima, temos os seguintes casos a serem considerados:

- $G - G_i$ contém $K_3 \cup C_4$, então G contém $K_3 \cup I_2$. Absurdo!

- $G - G_i$ contém $I_2 + \overline{P}_3$, então G contém $K_1 \cup (I_2 + \overline{P}_3)$. Absurdo!

- $G - G_i$ contém $K_1 + C_4$, então G contém $K_1 + C_4$. Absurdo!.

Consideraremos o caso em que nenhum G_i é uma clique, para todo $i = 1, \dots, k$, isto é, cada G_i possui um I_2 e como cada G_i é conexo, então G_i contém P_3 e, desta forma, G contém $2P_3$, por minimalidade de G . Absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se existe pelo menos um G_i , $i = 1, \dots, k$ tal que G_i seja trivial, temos que, se $G - G_i$ for $(1, 1)^*$, então G é $(2, 1)^{1,*,0}$. Contradição! Logo, pelo Teorema 4.3, $G - G_i$ contém C_4 ou $2K_2$. Se $G - G_i$ contém C_4 , então G contém $C_4 + K_1$. Absurdo. Se $G - G_i$ contém $2K_2$, então G contém $2K_2 + K_1$. Absurdo. Dessa forma, cada $|G_i| \geq 2$, para todo $i = 1, \dots, k$. Para $k \geq 3$, então G contém $I_2 + I_2 + I_1 \cong C_4 + K_1$. Absurdo. Assim, analisaremos o subcaso onde $k = 2$:

* Se G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes, então G é $(2, 1)^{1,*,0}$. Contradição.

- * Se apenas um G_i for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então sem perda de generalidade, seja G_1 tal conjunto. Se G_2 for $(1, 1)^0$, então G é $(2, 1)^{1,*,0}$. Contradição! Logo, G_2 contém $2k_2$ ou P_3 . Dessa forma, se G_2 contém $2k_2$, então G contém $2K_2 + K_1$. Absurdo! Se G_2 contém P_3 , então G contém $I_2 + I_2 + I_1 \cong C_4 + K_1$. Absurdo!
- * Se ambos, G_1 e G_2 contém arestas, então G_1 contém K_2 e G_2 contém K_2 . Como G_1 e G_2 são desconexos, temos então que G_1 e G_2 contém \overline{P}_3 , logo G contém $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$. Absurdo.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{1,*,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$, $K_1 + 2K_2$, $2K_3$, $2K_2 \cup K_1$, $K_1 \cup [I_2 + \overline{P}_3]$, $2P_3$, $K_2 \cup [I_2 + K_2]$, $K_1 + C_4$ e $I_2 + I_2 \cup I_2$ como subgrafo induzido. ■

Teorema 4.25 *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,*,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 4.31 como subgrafo induzido.*

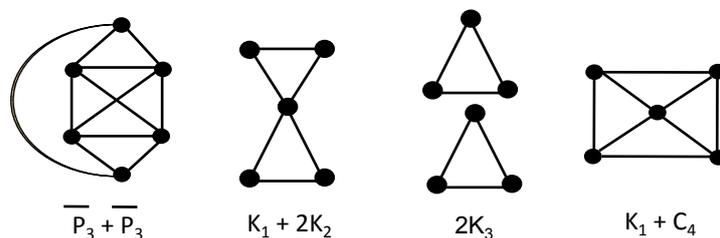


Figura 4.31: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,*,0}$

Prova.

(\Rightarrow) É fácil ver que se G contém algum dos subgrafos acima, como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(2, 1)^{*,*,0}$.

(\Leftarrow) Suponha que G não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.31 como subgrafo induzido. Assim, analisaremos dois casos:

- (i) G é desconexo. $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, $k \geq 2$, onde cada G_i é conexo. Se G_i for trivial, para algum $i = 1, \dots, k$, então G é $(2, 1)^{*,*,0}$. Contradição! Logo, $|G_i| \geq 2$, para todo $i = 1, \dots, k$. Se G for $(2, 0)^*$, então G é $(2, 1)^{*,*,0}$. Contradição! Logo pelo Teorema 4.1, existe um G_i que contém K_3 . Sem perda de generalidade, digamos que seja G_1 , assim consideramos as seguintes possibilidades:

- Se existir G_j , com $j \neq 1$, tal que $G_j \supseteq K_3$, então $G \supseteq 2K_3$. Absurdo.
 - Se não existir G_j , com $j \neq 1$, tal que $G_j \supseteq K_3$, então G é $(2, 1)^{*,*,0}$, pois $G_2 \cup \dots \cup G_K$ é $(2, 0)^*$, já que não possui K_3 e, por outro lado, G_1 é $(2, 1)^{*,*,0}$, por minimalidade.
- (ii) \overline{G} é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular, $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$ e cada G_i é trivial ou desconexo. Se G for $(1, 1)^*$, então G é $(2, 1)^{*,*,0}$. Absurdo! Logo pelo Teorema 4.3, G contém $2K_2$ ou C_4 . Neste caso, se G contém $2K_2$, então G contém $2K_2 + K_1$, já que G é conexo. Absurdo. Porém, se G contém C_4 : se G_i contém C_4 , para algum $i = 1, \dots, k$, então G contém $C_4 + K_1$. Absurdo. Se G_i não contém C_4 , para $i = 1, \dots, k$, então analisaremos dois subcasos ($k \geq 3, k = 2$):
- $k \geq 3$: por minimalidade, G contém $I_2 + I_2 + I_1, \cong C_4 + K_1$. Absurdo.
 - $k = 2$: considerando G_1 e G_2 tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes, então G é $(2, 1)^{*,*,0}$. Contradição! Se apenas um G_i for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, sem perda de generalidade, digamos G_1 . Se G_1 for $(1, 1)^0$, então G é $(2, 1)^{*,*,0}$. Contradição! Logo, G_1 contém P_3 ou $2K_2$. Se G_1 contém $P_3 \cong I_1 + I_2$, então G contém $I_2 + I_2 + I_1$. Absurdo! Se G_1 contém $2K_2$, então G contém $2K_2 + K_1$. Absurdo!. Se Ambos, G_1 e G_2 contém arestas, temos então que G_1 e G_2 contém K_2 . Como G_1 e G_2 são desconexos, temos que G_1 e G_2 contém \overline{P}_3 , e portanto, G contém $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$. Absurdo!.

Concluimos que o cografo G é $(2, 1)^{*,*,0}$, se e somente se, não contém nenhum dos grafos $\overline{P}_3 + \overline{P}_3, K_1 + 2K_2, 2K_3$ e $K_1 + C_4$ como subgrafo induzido. ■

4.2.4 Casos (1,2)

Na figura 4.32 são listadas todas as matrizes de ordem 3×3 referentes aos Casos (1, 2) que serão aqui considerados nesta subseção.

<p>Caso $(1,2)^{*,**}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{*,0,0}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ * & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{1,1,1}$</p>	<p>Caso $(1,1)^1$</p>
<p>Caso $(1,2)^{0,0,0}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{*,0,1}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ * & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{1,0,0}$</p>	<p>Caso $(1,1)^1$</p>
<p>Caso $(1,2)^{0,*,*}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{0,1,1}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{1,*,*}$</p>	<p>Caso $(1,1)^*$</p>
<p>Caso $(1,2)^{*,1,1}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{0,0,1}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{1,0,*}$</p>	<p>Caso $(1,1)^*$</p>
<p>Caso $(1,2)^{0,0,*}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{*,0,*}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ * & 1 & * \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{1,1,*}$</p>	<p>Caso $(1,1)^*$</p>
<p>Caso $(1,2)^{1,0,1}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{0,*,1}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix}$	<p>Caso $(1,2)^{*,*,1}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix}$	

Figura 4.32: Matrizes de ordem 3×3

Oberve que o caso de verificar se o grafo é $(1, 2)^{1,1,1}$ equivale a verificar se o grafo é $(1, 1)^1$. Da mesma forma, o caso de verificar se um grafo é $(1, 2)^{1,0,0}$ equivale a verificar se o grafo é $(1, 1)^0$. Note também que os casos de verificar se o grafo é $(1, 2)^{1,*,*}$ ou $(1, 2)^{1,0,*}$ ou $(1, 2)^{1,1,*}$ equivalem verificar se o grafo é $(1, 1)^*$.

Portanto os demais casos $(1, 2)^{*,*,*}$, $(1, 2)^{*,0,0}$, $(1, 2)^{0,0,0}$, $(1, 2)^{*,0,1}$, $(1, 2)^{0,*,*}$, $(1, 2)^{0,1,1}$, $(1, 2)^{*,1,1}$, $(1, 2)^{0,0,1}$, $(1, 2)^{0,0,*}$, $(1, 2)^{*,0,*}$, $(1, 2)^{0,1,1}$, $(1, 2)^{0,*,1}$ e $(1, 2)^{*,*,1}$, podem ser provados através do complemento, e estes casos da matriz $M_{3 \times 3}$, já foram demonstrados na seção 4.2.3.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho consideramos o problema da M -partição em cografos: dados um cografo G e uma matriz M de ordem m , reconhecemos se G admite uma partição do conjunto de vértices em m subconjuntos, cada um deles respeitando as restrições (internas e externas) impostas pela matriz M . Nossos resultados correspondem a caracterizações dos cografos que admitem uma M -partição (i.e., podem ser particionados segundo a matriz M) para $m \leq 3$. Para cada matriz M satisfazendo $m \leq 3$, explicitamos os subgrafos proibidos (as M -obstruções) de um cografo M -particionável. Em outras palavras, nosso resulta expressa que um cografo G admite uma M -partição se e somente se não possuir nenhuma das M -obstruções que são cografos como subgrafo induzido. Além disso, nossas M -obstruções são minimais. Com a finalidade de abordarmos estes problemas de forma compreensível e familiar para o leitor, desenvolvemos ao longo dos três primeiros capítulos, um resumo sucinto dos principais conceitos que identificamos como importantes no decorrer das pesquisas e estudos realizados para o desenvolvimento desta dissertação. Dedicamos o capítulo 4 exatamente para descrição da nossa proposta de trabalho a cerca deste tema, sendo que na seção 4.1, foram listadas todas as matrizes de ordem 2×2 e apresentou-se as caracterizações por subgrafos proibidos. Da mesma forma, na seção 4.2 as matrizes de ordem 3×3 foram apresentadas para os casos específicos $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$ e demonstramos a prova para tais casos. Vale mencionar que os resultados descritos acima foram apresentados, através do extended abstract, no Latin American Workshop on Cliques in Graphs-LAWCG2012, em Buenos Aires, Argentina [6].

A seguir, listamos alguns problemas em aberto no contexto desta dissertação.

5.0.5 Trabalhos Futuros

Como extensão para este trabalho, propomos estudar os seguintes problemas:

- (i) Considerar o problema da M -partição em termos de M -obstrução minimal, nas matrizes simétricas de ordem $m \leq 3$, para outra classe de grafo: por exemplo, para grafos de distância hereditária;
- (ii) Estudar da caracterização de grafos- $(2, 1)$, com restrições externas, para o caso de grafos gerais.

Ressaltamos que para grafos- $(2, 1)$ em classes gerais de grafos, não se conhece uma caracterização por subgrafos proibidos. Dessa forma, pode haver casos em que seja possível caracterizá-lo considerando as restrições externas. Por exemplo, seja um grafo- $(2, 1)^{0,0,0}$, onde seu conjunto de vértice $V(G)$ pode ser particionado em 2 subconjuntos independentes e 1 clique, sem aresta ligando tais subconjuntos. Assim, dado um grafo G , dizemos que G é $(2, 1)^{0,0,0}$ se e somente se G não contém $2K_2$, C_4 e C_5 como subgrafo induzido.

- Considerar o problema da M -partição em cografos para matrizes de ordem maior que 3. Se possível, apresentar uma prova por indução de como as M -obstruções para matrizes maiores são construídas a partir de matrizes menores.

Referências

- [1] M. F. Andrielli and C. P. de Mello. Conjunto fonte máximo em grafos de comparabilidade. *Technical Report IC-96-07*, pages 189–241, 1996.
- [2] A. Brandstädt. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics*, 152(1–3):47–54, 1996.
- [3] A. Brandstädt. Corrigendum. *Discrete Mathematics*, pages 186–295, 1998.
- [4] R. Bravo, S. Klein, and L. Nogueira. Characterizing (k, ℓ) -partitionable cographs. *manuscript*, 2005.
- [5] R. Bravo, S. Klein, L. Nogueira, and F. Protti. Characterization and recognition of p_4 -sparse graphs partitionable into k independent sets and ℓ cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 159:165–173, 2011.
- [6] R. Bravo, F. Protti, L. Nogueira, and C. Viana. *minimal* $_{3 \times 3}$ m-obstruction cographs. *Latin American Workshop on Cliques in Graphs-LAWCG2012*, 2012.
- [7] J. G. Chang and D. Kuo. The $l(2,1)$ -labeling problem on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 9:309–316, 1996.
- [8] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. D. Seymour, and R. Thomas. Mathematical programming. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 97:405–422, 2003.
- [9] R. M. S. M. Connel. Ordered vertex partitioning. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 4:45–60, 2000.
- [10] D. G. Corneil, H. Lerchs, and L. S. Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Appl. Math.*, 3:163–174, 1981.
- [11] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart. A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing*, 14(4):926–934, 1985.
- [12] C. M. H. de Figueiredo and S. Klein. The NP-completeness of multipartite cutset testing. *Congressus Numerantium*, 119:217–222, 1996.
- [13] T. Ekim, D. de Werra, and M. Demange. Partitioning cographs into cliques and stable sets. *Discrete Optimization*, 2:145–153, 2005.
- [14] T. Feder and P. Hell. Matrix partitions of perfect graphs. *Discrete Mathematics*, 306:2450–2460, 2006.
- [15] T. Feder, P. Hell, and W. Hochstättler. Generalized colouring (matrix partitions) of cographs. *Trends in Mathematics*, pages 149–167, 2006.

-
- [16] T. Feder, P. Hell, S. Klein, and R. Motwani. Complexity of graph partitions problems. *Proceedings of the 31st Annual ACM Symposium on the Theory of Computing STOC'99*, pages 464–472, 1999.
- [17] T. Feder, P. Hell, S. Klein, and R. Motwani. List partitions. *SIAM Journal Discrete Mathematics*, 16:449–478, 2003.
- [18] T. Feder, P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. List matrix partitions of chordal graphs. *LATIN 2004, Lecture Notes in Computer Science*, 2976:100–108, 2004.
- [19] T. Feder, P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. List matrix partitions of chordal graphs. *Theoretical Computer Science*, 349:52–56, 2005.
- [20] S. Földes and P.L. Hamme. Split graphs. *Proc. 8th South-eastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 19:311–315, 1977.
- [21] M. R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [22] M. C. Golumbic. Algorithmic graph theory and perfect graphs. *Academic Press*, 1980.
- [23] M. Groshaus, P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. Cycle transversals in bounded degree graphs. *Discrete Mathematics*, 35:189–195, 2009.
- [24] P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 141:185–194, 2004.
- [25] H. Lerchs. On cliques and kernels. *Dept. of Comp. Sci., University of Toronto*, 1971.
- [26] L. Lovász. A characterization of perfect graphs. *J. C. T (B)*, 13:95–98, 1972.
- [27] L. Markezon, O. Vernet, and P. R. C. Pereira. Determinação eficiente de vértices simpliciais em grafos cordais. *Anais Eletrônicos do XXXVIII SBPO*, pages 2255–2260, 2006.
- [28] R. M. McConnel and J. P. Spinrad. Modular decomposition and transitive orientation. *Discrete Mathematics*, 201:189–241, 1999.
- [29] L. T. Nogueira. Grafos split e grafos split generalizados. *M.sc. thesis, COPPE/UFRJ*, 1999.
- [30] A. Schrijver, M. Grötschel, and L. Lovász. Polynomial algorithms for perfect graphs. *Discrete Math*, 21:322–356, 1981.
- [31] L. Stewart. Cographs, a class of tree representable graphs. *Master thesis, University of Toronto*, 1978.
- [32] J. L. Szwarcfiter. *Grafos e algoritmos computacionais*. Editora Campus, 1986.