

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

GLÁUCIO CIPRIANO LEITE

**3-Coloração em Grafos Cordais e Grafos  $P_4$ -esparso**

NITERÓI

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

GLÁUCIO CIPRIANO LEITE

## 3-Coloração em Grafos Cordais e Grafos $P_4$ -esparso

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização.

Orientador:

Loana Tito Nogueira

Co-orientador:

Raquel de Souza Francisco Bravo

NITERÓI

2013

# 3-Coloração em Grafos Cordais e $P_4$ -esparso

Gláucio Cipriano Leite

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização.

Aprovada por:

---

Profa. Dra. Loana Tito Nogueira / IC-UFF (Presidente)

---

Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo

---

Prof. Dr. Fábio Protti / UFF

---

Prof. Dr. Mitre Costa Dourado / UFRJ

Niterói, 24 de julho de 2013.

Dedico esse trabalho à Jeanne minha esposa querida pela ajuda e dedicação de sempre, à Débora minha filha primogênita de dois anos e meio e à Letícia minha filha caçula de apenas um ano de vida, que a pesar de terem vindo durante o andamento desse mestrado, me deram muita força e garra para que eu pudesse chegar até aqui!

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus, por permitir que eu pudesse ter saúde, coragem, perseverança e muita iluminação para concluir este trabalho.

Às minhas duas pequeninas e amadas filhas, Débora Leite e Letícia Leite por serem minhas fontes de inspiração.

Ao meu querido, amado e amigo pai Ademar Leite, pela torcida e incentivo, pessoa de uma sensibilidade enorme que me transmite muita alegria e paz.

À minha querida avó materna Raimunda Araújo(Dona Mundica - in memoriam), pois mesmo não estando mais aqui entre nós, me serviu de inspiração por todo afeto que tinha por mim.

Ao meu avô materno Dagoberto Araújo(in memoriam), por sempre me incentivar com palavras e principalmente pela vibração e alegria que sentia a cada etapa de estudo vencida por mim desde o princípio.

Ao meu avô paterno Sanção Leite de 90 anos, lúcido, pelo exemplo de vida, pela alegria e satisfação que demonstra ao me receber em qualquer lugar.

Ao meu irmão amigo Samuel Leite, pelas conversas e pensamentos positivos para que eu conseguisse concluir essa dissertação.

À minha querida irmã Glécia Leite, que apesar de morar longe também sempre me inspirou.

Ao meu primo Ruan Feitosa, pela amizade, torcida e bem estar que me proporciona nas horas de lazer como no futebol semanal.

Ao meu cunhado Jefferson Silva, pela companhia, força e ajuda, pessoa que sempre esteve disponível para me ajudar no que fosse preciso.

À diretoria do IFPI Campus Zona Sul, especificamente à Susana Lago e à Francisca Assunção por sempre autorizarem minhas viagens à Niterói, viabilizando assim minha

orientação na UFF.

À minha querida esposa Jeanne Leite, companheira de todas as horas que esteve literalmente comigo em todos os passos dessa caminhada.

À Raquel Bravo minha querida co-orientadora, que desde o início se fez muito presente para tirar dúvidas no que fosse preciso, sempre me incentivando e dando força para que eu pudesse concluir essa dissertação.

À minha querida orientadora, Loana Tito pela incomensurável ajuda, incentivo, força, compreensão e dedicação, pessoa que serve de exemplo e não mediu esforços para me dar condições de concluir esse trabalho, fazendo com que eu nunca tivesse dúvidas e sim a cada dia mais certeza de que escolhi a pessoa certa para essa orientação de mestrado. Aqui deixo meu muito obrigado do fundo do coração.

# Resumo

Este trabalho considera um problema bastante estudado na Teoria dos Grafos, o problema da  $k$ -coloração. Neste problema, é dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$  positivo e a questão consiste em determinar se  $G$  é  $k$ -colorível, i.e., se é possível colorir os vértices de  $G$  com no máximo  $k$  cores de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Uma forma alternativa e equivalente de se definir o problema consiste em verificar se o conjunto de vértices de  $G$  pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes (alguns deles possivelmente vazios). Sabe-se que para  $k \geq 3$  o problema da  $k$ -coloração é  $NP$ -completo. Dada a dificuldade em se resolver o problema para grafos gerais, muitos pesquisadores consideram o problema da  $k$ -coloração quando restrito a certas classes de grafos. Neste trabalho, consideramos duas subclasses de grafos perfeitos: os grafos cordais e os grafos  $P_4$ -esparsos. Mais precisamente, consideramos uma generalização do problema da 3-coloração, a saber, caracterizamos os grafos cordais ( $P_4$ -esparsos) que admitem uma partição dos vértices em três conjuntos independentes respeitando possíveis restrições impostas entre tais conjuntos. No caso da 3-coloração usual, não há restrições entre os conjuntos independentes.

# Abstract

This work considers a very well studied problem in Graph Theory, the  $k$ -coloring problem. In this work, it is given a graph  $G$  a positive integer  $k$  and the problem consists of verifying if  $G$  is  $k$ -colorable, i.e., if it is possible to color (label) the vertices of  $G$  with at most  $k$  colors (labels) such that adjacent vertices have different colors (labels). An alternative and equivalent way of defining the problem is to verify if the set of vertices of  $G$  can be partitioned into  $k$  independent sets (some of them possibly empty). It is well-known that for  $k \geq 3$  the  $k$ -coloring problem is  $NP$ -complete. Given its difficulty for general classes of graphs, many researchers consider the problem when restricted to certain classes of graphs. In this work, we consider two subclasses of perfect graphs: chordal graphs and  $P_4$ -sparse graphs. More specifically, we consider a generalization of the 3-coloring problem: we characterize chordal graphs ( $P_4$ -sparse graphs) which admit a partition of its set of vertices into three independent sets satisfying some possible restrictions imposed between the independent sets. In the case of the usual 3-coloring problem, there is no restriction between the parts.



# Palavras-chave

1.  $k$ -Coloração
2. Grafos bipartidos
3. Grafos perfeitos
4. Grafos cordais
5. Cografos
6. Grafos  $P_4$ -esparso
7.  $M$ -obstrução
8.  $M$ -partição
9. Partições esparso-denso

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Grafos - Definições e Notações . . . . .	2
1.2 Classes de Complexidade . . . . .	4
<b>2 Grafos perfeitos e suas subclasses</b>	<b>7</b>
2.1 Grafos cordais . . . . .	8
2.2 Reconhecimento linear dos grafos cordais . . . . .	10
2.3 Cografos . . . . .	12
2.4 Grafos $P_4$ -esparso . . . . .	15
<b>3 <math>M</math>-partições</b>	<b>19</b>
3.1 Resultados na Literatura . . . . .	22
3.1.1 Grafos Gerais . . . . .	22
3.1.2 Grafos Perfeitos . . . . .	23
3.1.2.1 Grafos Cordais . . . . .	24
3.1.2.2 Cografos . . . . .	25
3.1.2.3 Grafos $P_4$ -esparso . . . . .	26
<b>4 <math>M</math>-obstruções minimais em subclasses de grafos perfeitos</b>	<b>27</b>
4.1 2-Coloração com restrição externa em grafos gerais . . . . .	28
4.2 3-Coloração com restrição externa em grafos cordais . . . . .	30

---

4.3	3-Coloração com restrição externa em grafos $P_4$ -esparsos . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>43</b>
5.1	Trabalhos Futuros . . . . .	43
	<b>Referências</b>	<b>44</b>

# Lista de Figuras

2.1	Grafo cordal . . . . .	9
2.2	Grafo não cordal . . . . .	9
2.3	Cografos com até 3 vértices. . . . .	13
2.4	Cografo $G$ e sua co-árvore $T(G)$ . . . . .	14
2.5	Aranha magra e aranha gorda. . . . .	16
3.1	Estrutura de um grafo split. . . . .	20
3.2	Problema da 3-coloração. . . . .	20
3.3	Matriz amigável. . . . .	22
3.4	Obstrução infinita. . . . .	24
4.1	Grafo $(3, 0)^{*,1,0}$ . . . . .	28
4.2	Matrizes de ordem $2 \times 2$ . . . . .	28
4.3	Obstrução minimal do caso $(2, 0)^*$ . . . . .	29
4.4	Obstruções minimais do caso $(2, 0)^1$ . . . . .	29
4.5	Matrizes de ordem $3 \times 3$ . . . . .	31
4.6	Obstrução minimal do caso $(3, 0)^{*,*,*}$ . . . . .	32
4.7	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,1,1}$ . . . . .	32
4.8	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,0,0}$ . . . . .	33
4.9	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{*,1,1}$ . . . . .	34
4.10	Obstrução infinita. . . . .	36
4.11	Obstruções minimais do caso $P_4$ -esparso $(3, 0)^{*,*,1}$ . . . . .	37
4.12	Obstruções minimais do caso $P_4$ -esparso $(3, 0)^{*,1,1}$ . . . . .	38
4.13	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,0,0}$ . . . . .	40

---

4.14	Obstruções minimais do caso $(3,0)^{1,1,1}$ . . . . .	41
4.15	Obstrução minimal do caso $(3,0)^{*,*,*}$ . . . . .	42

# Capítulo 1

## Introdução

A Teoria dos Grafos vem despertando grande interesse na comunidade científica durante as últimas décadas. O problema da coloração de vértices merece atenção especial já que modela uma grande variedade de aplicações. Para os matemáticos, o problema é interessante por uma razão adicional: é extremamente difícil resolvê-lo de forma eficiente. Neste trabalho, consideramos dois problemas que generalizam o problema usual de coloração de vértices, a saber, o problema dos grafos- $(k, l)$  e, sua versão ainda mais geral, o problema da  $M$ -partição.

Dizemos que um grafo é  $(k, l)$  se seu conjunto de vértices pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $l$  cliques. Dado um grafo  $G$  e inteiros positivos  $k$  e  $l$ , a questão consiste em verificar se  $G$  é um grafo- $(k, l)$ , ou simplesmente  $(k, l)$  para simplificar. Em caso afirmativo, dizemos que  $G$  admite uma  $(k, l)$ -partição.

É fácil ver que no caso em que  $l = 0$ , verificar se um dado grafo  $G$  é  $(k, l)$  é equivalente a verificar se  $G$  é  $k$ -colorível. Sabe-se que o problema da  $k$ -coloração é  $NP$ -completo para  $k \geq 3$  e polinomial no caso contrário. Em [6], Brandstädt provou que reconhecer grafos- $(k, l)$  é um problema  $NP$ -completo para  $k \geq 3$  ou  $l \geq 3$  e polinomial para  $k, l \leq 2$ . Observe que tanto no problema dos grafos- $(k, l)$ , quanto no problema da  $k$ -coloração, nenhuma exigência é feita sobre as arestas entre os conjuntos da partição. Com o intuito de capturar exigências sobre as arestas entre os conjuntos da partição, Feder et al. em [17, 18] definiram o problema da  $M$ -partição, onde  $M$  é uma matriz simétrica de ordem  $m \times m$  com  $M(i, j) \in \{0, 1, *\}$ . O problema da  $M$ -partição de grafo  $G$  é uma partição do conjunto de vértices de  $G$  em  $m$  conjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_m$  tal que dois vértices distintos em partes (possivelmente iguais)  $V_i$  e  $V_j$  são adjacentes se  $M(i, j) = 1$  e não adjacentes se  $M(i, j) = 0$ ; o caso  $M(i, j) = *$  significa que não há restrição entre as partes  $i$  e  $j$ . Como admitimos o caso em que  $i = j$ , um conjunto  $V_i$  é independente se  $M(i, i) = 0$  e uma clique

se  $M(i, i) = 1$ . No caso em que  $M(i, i) = *$ , não há restrição na parte  $V_i$ . O problema da  $M$ -partição consiste em determinar se um dado  $G$  admite uma  $M$ -partição. Novamente, é fácil verificar que o problema da  $M$ -partição corresponde a uma generalização tanto do problema da  $k$ -coloração (basta que  $M$  tenha ordem  $k$ , com diagonal principal nula e que elementos fora da diagonal sejam  $*$ ), quanto do problema dos grafos- $(k, l)$  (basta que  $M$  tenha ordem  $k + l$ , com  $k$  elementos nulos e  $l$  elementos 1 na diagonal principal e que todos elementos fora da diagonal sejam  $*$ ).

Visto que os problemas supra-mencionados são todos  $NP$ -completos no caso geral, uma forma de encontrar a saída para essa dificuldade consiste em resolver o problema em classes especiais de grafos.

Neste trabalho, vamos considerar o problema da  $M$ -partição quando restrito à classe dos grafos cordais e à classe dos grafos  $P_4$ -esparsos quando a matriz  $M$  tem ordem três e diagonal nula, ou equivalentemente para o problema da 3-coloração com restrições externas entre os conjuntos independentes que definem a partição.

Esta dissertação está organizada como segue. No Capítulo 1 apresentaremos algumas definições e notações utilizadas no decorrer desse trabalho. O Capítulo 2 considera algumas classes de grafos perfeitos: os grafos cordais, os cografos e os grafos  $P_4$ -esparsos. No Capítulo 3 abordamos mais detalhadamente o problema da  $M$ -partição, no Capítulo 4 definirmos e resolvermos o problema proposto neste trabalho. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões e contribuições desse trabalho, bem como os trabalhos futuros propostos.

## 1.1 Grafos - Definições e Notações

Podemos dizer que um grafo simples é um par ordenado  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito não-vazio de *vértices*, denotado por  $V(G)$  e  $E$  é um conjunto de pares não-ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*, e denotado por  $E(G)$ . Utilizaremos a notação  $n = |V(G)|$  e  $m = |E(G)|$  para denotarmos a cardinalidade de  $V(G)$  e  $E(G)$ , respectivamente. Definimos as arestas como sendo pares não-ordenados, mas serão indicadas como sendo pares ordenados, isto é,  $(u, v)$  ao invés de  $\{u, v\}$ . Ao decorrer deste trabalho, iremos utilizar a denominação grafos para denotar o que definimos como grafos simples.

Um grafo  $G$  é dito *trivial* se  $|V(G)| = 1$ , isto é  $G$  possui um único vértice.

Um vértice  $u$  é *adjacente* a outro vértice  $v$  em  $G$  se  $(u, v) \in E(G)$ . Neste caso, dizemos que  $u$  e  $v$  são *vizinhos* em  $G$ , e que a aresta  $e = (u, v)$  é *incidente* a  $u$  e a  $v$ , ou que tem *extremos*  $u$  e  $v$ . Denotamos por  $N(u)$  o conjunto de vértices adjacentes a  $u$  em  $G$  e tal conjunto é chamado de *vizinhança* de  $u$ , e por  $N[u]$  o conjunto  $N(u) \cup \{u\}$  é chamado de *vizinhança fechada* de  $u$ .

O *grau* de um vértice  $v \in V(G)$ , denotado por  $d(v)$ , é o número de arestas incidentes ao vértice  $v$ .

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Dado um conjunto de vértices  $Y \subseteq V(G)$ ,  $Y \neq \emptyset$ , o subgrafo induzido por  $Y$ , denotado por  $G[Y]$  é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = Y$  e  $E(H)$  é o conjunto das arestas de  $G$  que têm ambos os extremos em  $Y$ . Neste trabalho assumiremos que todos os termos subgrafo que usarmos refere-se a noção de subgrafo induzido.

Um *passeio* em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices, cada qual adjacente ao vértice que lhe sucede na sequência. Um *caminho* num grafo  $G$  é um passeio  $P = v_1, v_2, \dots, v_k$  onde os  $v_i$ 's são vértices (dois a dois distintos), e  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ .

Uma *corda* em  $P$  é uma aresta que liga dois vértices não-consecutivos de  $P$ . Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas, e denotado por  $P_k$  o caminho induzido por  $k$  vértices. Dizemos que um grafo é  *$P_k$ -free* quando não contém um  $P_k$  como subgrafo.

Um passeio  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ , é denominado *ciclo* quando  $v_1, \dots, v_k$  for um caminho,  $k \geq 3$  e  $v_1 = v_{k+1}$ .

Um grafo  $G$  é dito *cíclico* quando  $G$  contém um ciclo como subgrafo. Caso contrário, dizemos que  $G$  é *acíclico*.

Um conjunto  $S$  é *maximal* (*minimal*) em relação a uma determinada propriedade  $P$  se  $S$  satisfaz  $P$ , e todo conjunto  $S'$  que contém propriamente  $S$  (que está contido propriamente em  $S$ ) não satisfaz  $P$ .

Um grafo  $G$  é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de  $G$  são adjacentes. Denotamos por  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices.

Um conjunto de vértices  $I$  de um grafo  $G$  é um *conjunto independente* se  $G[I]$  é um grafo sem arestas. Um conjunto independente  $I$  é dito *maximal* se para qualquer conjunto independente  $I'$  tal que  $I \subseteq I'$  então  $I = I'$ . Definimos por  $\alpha(G)$  o tamanho do *conjunto independente máximo*, isto é:

$$\alpha(G) = \max \{ |V'| \mid V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é um conjunto independente de } G \}.$$



Um conjunto de vértices  $C$  de um grafo  $G$  é uma *clique* se  $G[C]$  é um grafo completo. Denotamos por  $K_k$  uma clique de  $k$  vértices. Uma clique  $C$  é dita *maximal* se para qualquer clique  $C'$  tal que  $C \subseteq C'$  então  $C = C'$ . Denotamos por  $\omega(G)$  o *tamanho da clique máxima*, isto é:

$$\omega(G) = \max \{ |V'| \mid V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é uma clique de } G \}$$

Um grafo  $G$  é *conexo* se para todo par de vértices distintos  $v$  e  $w$  de  $G$  existe um caminho de  $v$  a  $w$ . Caso contrário,  $G$  é dito *desconexo*. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo maximal conexo de  $G$ .

Sejam  $v, w \in V(G)$ . A *distância* entre  $v$  e  $w$  em  $G$ , denotada por  $d_G(v, w)$  é o comprimento do menor caminho entre  $v$  e  $w$ , em  $G$ .

Uma *árvore*  $T$  é um grafo acíclico e conexo. Uma árvore  $T$  é denominada *enraizada* quando algum vértice  $v \in V(T)$  é escolhido como especial. Este vértice é então chamado de *raiz* da árvore. Uma árvore não enraizada é também denominada *árvore livre*.

Sejam  $v, w$  dois vértices de uma árvore enraizada  $T$  de raiz  $r$ . Suponhamos que  $v$  pertença ao caminho de  $r$  a  $w$  em  $T$ , então denominamos  $v$  *ancestral* de  $w$  e  $w$  *descendente* de  $v$ . Temos também que se  $(v, w) \in E(T)$  então  $v$  é *pai* de  $w$ , denotada por  $\text{pai}(w)$ , sendo  $w$  o *filho* de  $v$ , denotada por  $\text{filho}(v)$ .

Dois vértices que possuem o mesmo pai são chamados de *irmãos*. A raiz de uma árvore não possui pai, enquanto que todo vértice  $v \neq r$  possui um único. Uma *folha* é um vértice que não possui filhos.

## 1.2 Classes de Complexidade

Um problema algorítmico  $\pi$  consiste de um conjunto  $D$  de todas as possíveis entradas para o problema, chamado *conjunto de instâncias*, e de uma *questão*  $Q$  sobre estas instâncias. Resolver um problema algorítmico é desenvolver um algoritmo cuja entrada é uma instância do problema e cuja saída é uma resposta questão do problema.

Um problema é dito de *decisão* quando a questão exige uma resposta do tipo SIM ou NÃO. Como exemplo, seja  $\pi$  o seguinte problema: “Dado um grafo  $G$ , reconhecer se  $G$  é um cografo”. O conjunto de instâncias de  $\pi$  é obviamente o conjunto de todos os grafos. O problema  $\pi$  pode ser assim esquematizado:

Instância genérica de  $\pi$ : um grafo  $G$ .

Fica evidente que o problema  $\pi$  acima é um problema de decisão, em particular, um *problema de reconhecimento*. Resolver  $\pi$  significa elaborar um algoritmo de reconhecimento de cografos.

De acordo com [22] um algoritmo é *polinomial* quando sua complexidade de tempo (medida do número de passos que o algoritmo efetua) é uma função polinomial no tamanho da sua entrada. O problema de decisão para os quais existem algoritmos polinomiais constituem a classe  $P$ . Tais problemas são chamados *polinomiais*.

Um problema de decisão é *não-determinístico polinomial* quando qualquer instância que produz resposta SIM possui um *certificado* sucinto, isto é, uma comprovação de que a resposta SIM é de fato verificável em tempo polinomial no tamanho da instância. Esta classe de problemas de decisão é a classe  $NP$ .

A classe  $Co-NP$  é formada pelos problemas que possuem um certificado sucinto para as instâncias que produzem resposta NÃO.

Sejam  $\pi_1(D_1, Q_1)$  e  $\pi_2(D_2, Q_2)$  dois problemas de decisão. Uma *transformação* ou *redução polinomial* de  $\pi_1$  em  $\pi_2$  é uma função  $f : D_1 \rightarrow D_2$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $f$  pode ser calculada em tempo polinomial;
2. para toda instância  $I \in D_1$ , tem-se que  $I$  produz resposta SIM para  $\pi_1$  se e somente se  $f(I)$  produz resposta SIM para  $\pi_2$ .

Um problema de decisão  $\pi$  pertence à classe  $NP$ -completo quando as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $\pi \in NP$ ;
2. para todo problema  $\pi' \in NP$  existe uma transformação polinomial de  $\pi'$  em  $\pi$ .

Um problema pertencente à classe NP-completo é chamado NP-completo. Para provar que um certo problema  $\pi$  é NP-completo, basta mostrar que  $\pi \in NP$  e que existe uma transformação de um problema NP-completo  $\pi'$  em  $\pi$ .

Analogamente, de acordo com [22] prova-se que um problema de decisão  $\pi$  pertence à classe  $Co-NP$ -completo (e, neste caso,  $\pi$  é dito Co-NP-completo) quando  $\pi \in Co-NP$  e existe um problema  $\pi'$  (Co-)NP-completo tal que:

1. se  $\pi'$  é NP-completo, existe uma função  $f$  que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância  $I'$  de  $\pi'$ , tem-se que  $I'$  produz SIM para  $\pi'$  se e somente se  $I = f(I')$  produz NÃO para  $\pi$ ;
2. se  $\pi'$  é Co-NP-completo, existe uma função  $f$  que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância  $I'$  de  $\pi'$ , tem-se que  $I'$  produz NÃO para  $\pi'$  se e somente se  $I = f(I')$  produz NÃO para  $\pi$ .

# Capítulo 2

## Grafos perfeitos e suas subclasses

A primeira formalização dos grafos perfeitos se deve ao matemático francês Claude Berge em 1960, ainda que haja outros estudos nesta direção antes dele. Um ponto crucial ao introduzir a rica família dos grafos perfeitos é a noção de número cromático  $\chi$  de um grafo  $G$ , que é o menor número de cores necessárias para colorir propriamente o grafo  $G$ , i.e., de forma que vértices adjacentes tenham cores distintas. Sabe-se que determinar o número cromático de um grafo é um problema difícil, *NP*-difícil, e também parece ser difícil encontrar limites inferiores para tal. Obviamente, dado um grafo  $G$ , um limite inferior é o tamanho de seu maior subgrafo completo,  $\omega(G)$ , já que necessitaremos de pelo menos uma cor diferente para colorir os vértices desse maior subgrafo completo.

Existem alguns para o qual a igualdade  $\chi(G) = \omega(G)$  é verificada.

Em 1960, Berge [2, 3] formulou duas conjecturas sobre grafos perfeitos, uma mais forte do que a outra.

**Teorema 2.1 (Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos)** *Um grafo é perfeito se e somente se seu complemento é perfeito.*

Esta conjectura foi provada em 1972 por Lovász [35, 36] e é conhecida como o **Teorema dos Grafos Perfeitos**.

**Teorema 2.2 (Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos - CFGP)** *Um grafo  $G$  é perfeito se e somente se  $G$  não contém ciclo ímpar  $C_{2k+1}$ ,  $k \geq 1$  (também chamados buracos) ou seu complemento (chamados anti-buracos).*

Essa conjectura atraiu muita atenção e foi provada recentemente (Maio de 2002) através de uma sequência de resultados por Chudnovsky, Robertson, Seymour and Thomas [8].

Uma das importâncias dos grafos perfeitos reside no fato de que diversos problemas  $NP$ -difíceis tornam-se polinomiais, ou até mesmo lineares, quando restritos à classe dos grafos perfeitos. A seguir, apresentamos algumas classes de grafos perfeitos, a saber:

- Árvores;
- Grafos Cordais;
- Grafos Split;
- Cografos;
- Grafos  $P_4$ -esparsos;
- outros.

**Teorema 2.3** *Árvores são grafos perfeitos.*

**Prova.** O tamanho da maior clique de uma árvore tem tamanho dois ou um, já que árvores não possuem ciclo. Além disso, para qualquer árvore não trivial (ou floresta)  $T$ ,  $\chi(T) = \omega(T) = 2$  e o resultado segue trivialmente. ■

## 2.1 Grafos cordais

Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado e  $C$  um ciclo de  $G$ . Uma *corda* de  $G$  é uma aresta entre dois vértices não consecutivos de  $C$ . Um grafo é dito *cordal* ou *triangularizado* quando todo ciclo de tamanho maior que três possui uma corda. O grafo da Figura 2.1 é cordal, enquanto o da Figura 2.2 não o é, já que possui o ciclo  $b, c, d, e$  que tem tamanho quatro sem cordas.

Um vértice  $v \in V$  que induz um subgrafo completo dos vértices de sua vizinhança  $v, N(v)$ , é chamado *simplicial*. No grafo da Figura 2.1 o vértice  $a$  é um vértice simplicial, pois sua vizinhança induz um  $K_3$ .

É fácil ver que a propriedade ser cordal é uma propriedade hereditária, isto é, todo subgrafo induzido de um grafo cordal é também um grafo cordal.

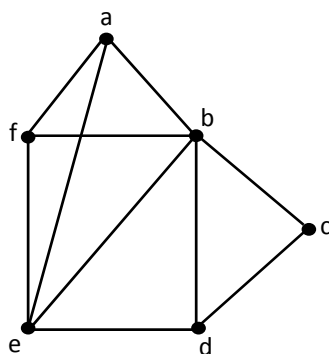


Figura 2.1: Grafo cordal

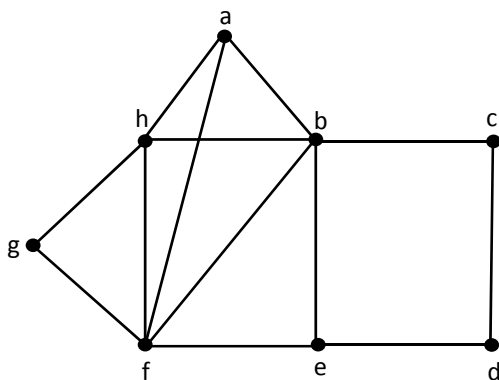


Figura 2.2: Grafo não cordal

Um *esquema de eliminação perfeita* é uma sequência de vértices  $\sigma = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ , onde cada  $v_i$  é um vértice simplicial do subgrafo induzido por  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_n$ . Em outras palavras, uma sequência  $\sigma$  é um esquema de eliminação perfeita se, para cada  $v_i$ , o subgrafo induzido por  $N(v_i) - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  for completo.

**Teorema 2.4** [12, 21] *Um grafo  $G = (V, E)$  é cordal se e somente se  $G$  possuir um esquema de eliminação perfeita.*

**Lema 2.1** [12] *Seja  $G = (V, E)$  um grafo cordal que não seja um grafo completo. Então  $G$  contém dois vértices não adjacentes simpliciais.*

Usando este resultado, Fulkerson and Gross [21] sugeriram um procedimento iterativo para reconhecer grafos cordais baseado no resultado e na propriedade hereditária dos grafos cordais. Desta forma, repetidamente, encontre um vértice simplicial de  $G$  e elimine-o do grafo até que não haja mais vértice. Se isso ocorrer, o grafo é cordal, mas se em algum momento nenhum vértice for simplicial, então o grafo não é cordal. A correteza desse procedimento segue diretamente do Teorema 2.4. Embora tal procedimento possa ser executado em tempo polinomial, é possível reconhecer grafos cordais em tempo linear, conforme a seção a seguir.

## 2.2 Reconhecimento linear dos grafos cordais

Pelo Lema 2.1, o procedimento de Fulkerson-Gross para reconhecer grafos cordais nos permite escolher pelo menos dois vértices não adjacentes para cada posição na construção de um esquema de eliminação perfeito para um grafo cordal. Logo, podemos livremente escolher um vértice  $v_n$  para ser evitado durante todo o processo, guardando-o para a última posição do esquema. Da mesma forma, podemos escolher qualquer vértice  $v_{n-1}$  adjacente a  $v_n$  para guardar a  $(n - 1)$ -ésima posição. Continuando dessa maneira, estaremos constuindo um esquema na ordem contrária. Foi exatamente isso o que Leuker [34], Rose e Tarjan [37] fizeram para construir um algoritmo linear para reconhecer grafos cordais. A versão apresentada por eles usa uma busca em largura lexicográfica em que a fila dos vértices é substituída por uma fila de subconjuntos de vértices que as vezes é refinada, mas nunca reordenada. O algoritmo é dado a seguir:

**ALGORITMO BUSCA LEXCOGRÁFICA****início**

1. Atribua rótulo 0 a cada vértice;
2. Para  $i \leftarrow n$  a 1 faça
3. Seleção: escolha um vértice não rotulado  $v$  com maior rótulo;
4.  $\sigma(i) \leftarrow v$ ; (Atribua a  $v$  o número  $i$ )
5. Atualização: para cada vértice não rotulado  $w \in Adj(v)$  adicione  $i$  ao rótulo( $w$ ).

**fim**

Pode-se provar que o algoritmo anterior pode ser implementado em tempo linear.

A busca em largura lexicográfica pode ser usada para reconhecer grafos cordais conforme o próximo teorema:

**Teorema 2.5** *Um grafo não direcionado  $G$  é cordal se e somente se a ordem  $\sigma$  produzida pelo algoritmo 2.2 é um esquema de eliminação perfeita.*

Vale mencionar que é possível construir um algoritmo para testar se a ordem produzida pelo algoritmo da seção 2.2 é de fato um esquema de eliminação perfeito em tempo linear.

Para finalizar, mostraremos que os grafos cordais são perfeitos.

**Teorema 2.6** *Grafos cordais são perfeitos.*

Demonstraremos esse resultado de duas formas distintas:

**Provando através do teorema forte dos grafos perfeitos:**

**Prova.**

Como  $G$  é um grafo cordal,  $G$  não contém buracos, i.e.,  $C_{2k+1}$ ,  $k \geq 1$  como subgrafo induzido. No entanto, como  $G$  não possui a propriedade,  $G$  é cordal  $\Leftrightarrow \overline{G}$  é cordal, mas com isso não podemos dizer que  $\overline{G}$  não possui buracos.

Neste caso, suponha que  $\overline{G}$  contém um buraco  $C_{2k+1}$ , para algum  $k \geq 1$ .



- Se  $k = 1$ , então  $C_5$  é um subgrafo induzido de  $G$ . Absurdo, pois  $G$  é cordal.
- Se  $k \geq 2$ , então  $P_5$  é um subgrafo induzido de  $\overline{G}$ . Neste caso,  $G$  contém o complemento de um  $P_5$ , que não é cordal. Absurdo. ■

### Provando sem o uso do teorema forte dos grafos perfeitos:

#### Prova.

Uma vez que cada subgrafo induzido de um grafo cordal também é cordal, precisamos apenas verificar se para todo  $G$  cordal,  $\chi(G) = \omega(G)$ .

Temos que  $\chi(G) \geq \omega(G)$ , já que para colorir uma clique precisa-se de uma cor por vértice.

Seja  $G$  um grafo cordal e seja  $\sigma[v_1, \dots, v_n]$  um esquema de eliminação perfeito de  $G$ .

Se colorirmos cada  $v_i$  (de  $v_n$  para  $v_1$ ), de acordo com as cores dos seus vizinhos já coloridos, estes formam uma clique com  $v_i$ . Portanto, há sempre uma cor disponível para  $v_i \leq \omega(n)$ . Logo,  $G$  é  $\omega(G)$ -colorível. Isso significa  $\chi(G) \leq \omega(G)$ .

Desta forma temos então que  $\chi(G) = \omega(G)$ . ■

A seção seguinte aborda uma outra subclasse dos grafos perfeitos: os cografos.

## 2.3 Cografos

Nesta seção, iremos apresentar e definir uma subclasse dos grafos perfeitos: os cografos. Por tanto é relevante relatar que os cografos apareceram originalmente em diversas áreas da Matemática [11] e foram estudados por vários pesquisadores de forma independente. Como consequência deste fato, surgiram vários sinônimos para a classe, dentre os quais podemos citar: grafos  $D^*$  [31], grafos sem  $P_4$ , grafos Dacey [39] e grafos redutíveis por complemento [11].

O termo cografo tal qual conhecemos hoje foi apresentado por H. Lerchs [32, 33], que na ocasião, apresentou a primeira definição da classe baseada no estudo de suas propriedades estruturais e algorítmicas. L. Stewart [38] complementou esse estudo desenvolvendo um algoritmo com complexidade  $O(n^2)$  para o reconhecimento dessa classe. Em seguida, um algoritmo mais eficiente, com complexidade linear, foi introduzido por Corneil *et al.*

[10]. Posteriormente, outros algoritmos para reconhecer cografos com complexidade linear foram apresentados [1, 13].

De acordo com Lerchs [32] cografos são definidos de forma recursiva como segue:

- (i) O grafo trivial ( $K_1$ ) é um cografo;
- (ii) Se  $G_1, \dots, G_k$  são cografos, então a sua união  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$  também é cografo;
- (iii) Se  $G$  é cografo, então  $\overline{G}$  também é cografo.

Como visto pela definição, os cografos podem ser obtidos a partir de um conjunto de grafos triviais, através de um número finito de operações de união e através do complemento (no grafo complementar, a operação de união equivale à operação de junção).

Os cografos são também conhecidos como grafos sem  $P_4$  por não possuírem  $P_4$  como subgrafo induzido, conforme Teorema 2.7.

A Figura 2.3 abaixo mostra a construção de todos os possíveis cografos com até 3 vértices pela definição acima:

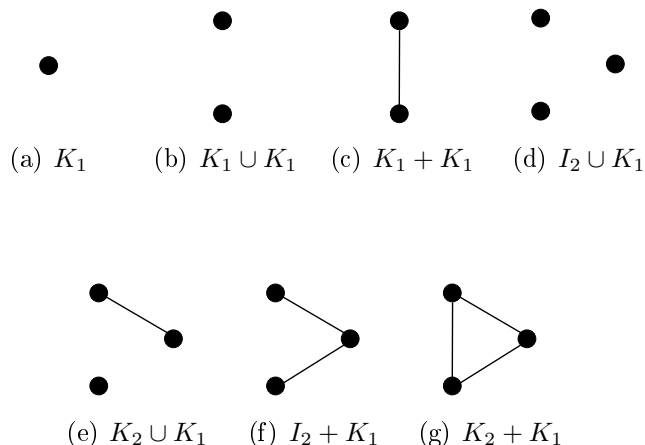


Figura 2.3: Cografos com até 3 vértices.

Os cografos possuem uma única árvore de representação, chamada de *co-árvore* [10]. Nesta, cada folha representa os vértices do cografo correspondente. Cada nó interno representa uma operação de união seguida de uma operação de complemento (junção); estes nós internos são rotulados com  $\cup$  ou  $+$ , de tal forma que esses rótulos se alternam por todo caminho que começa desde a raiz.

Dois vértices  $x$  e  $y$  de um cografo são adjacentes se e somente se o caminho de  $x$  à raiz encontra o caminho de  $y$  à raiz em um nó rotulado  $+$ . A Figura 2.4 mostra um grafo e sua respectiva co-árvore.

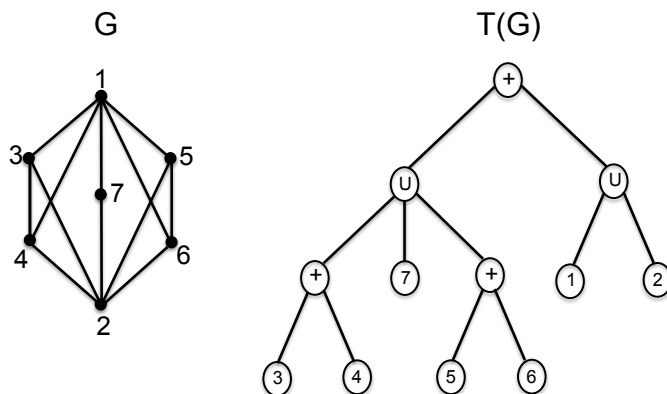


Figura 2.4: Cografo  $G$  e sua co-árvore  $T(G)$ .

Esta representação em forma de árvore é a base para muitos algoritmos polinomiais na resolução de alguns problemas clássicos, como isomorfismo, número cromático, detecção de cliques, entre outros. Em [9], Corneil *et al.* mostram como a co-árvore é utilizada na solução de alguns desses problemas. Na verdade, Corneil *et al.* [10] usam a co-árvore para desenvolver um algoritmo linear de reconhecimento de cografos.

A seguir, caracterizamos a família dos cografos, apresentando alguns resultados obtidos por Corneil *et al.* [9].

**Lema 2.2** *Todo subgrafo induzido de um cografo é um cografo.*

**Teorema 2.7** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é um cografo;
2.  $G$  não contém  $P_4$  induzido;
3. O complemento de qualquer subgrafo conexo não trivial de  $G$  é desconexo.

**Corolário 2.1** *Um grafo  $G$  é um cografo se e somente se para todo subgrafo  $H$  de  $G$  com pelo menos dois vértices, exatamente uma das condições abaixo é satisfeita:*

1.  $H$  é desconexo;
2.  $\overline{H}$  é desconexo.

Além destas características, a co-árvore  $T(G)$  de um cografo  $G$  ajuda a reconhecer em tempo linear algum grafo da família (verifica se  $G$  é um cografo). A idéia inicial do algoritmo para reconhecer se um grafo é cografo parte do Lema 2.2. Dado que todo subgrafo induzido de um cografo também é cografo, os pesquisadores de [10] assumem um cografo  $G$  e sua co-árvore  $T(G)$  e verificam se  $G + x$  é cografo, onde  $x$  é um vértice. Para isso, analisam as relações de adjacências de  $x$  com os vértices de  $G$  usando  $T(G)$ . Os autores mostram que tal algoritmo de reconhecimento pode ser feito em tempo linear.

O seguinte resultado estabelece que a classe dos cografos é perfeita.

**Teorema 2.8** *Os cografos são perfeitos.*

**Prova.** O resultado segue diretamente do Teorema Forte dos Grafos Perfeitos e das observações de que  $G$  é um cografo se e somente se  $\overline{G}$  é cografo e do fato de que cografos não possuem ciclos de tamanho maior ou igual a cinco (consequentemente, não possuem buracos e nem anti-buracos). ■

## 2.4 Grafos $P_4$ -esparso

A classe dos grafos  $P_4$ -esparso foi introduzida por Hoàng na sua dissertação de doutorado [26] como a classe dos grafos para o qual todo conjunto de cinco vértices induz no máximo um  $P_4$ . Hoàng apresentou um número de caracterizações para esses grafos e mostrou que os grafos  $P_4$ -esparso são perfeitos.

O estudo dos grafos  $P_4$ -esparso permitiu caracterizações construtivas que implicaram em vários algoritmos lineares de reconhecimento da classe; tais algoritmos foram apresentados em [28]. Além disso, problemas de otimização, tais como, coloração, clique máxima e outros, podem ser resolvidos em tempo linear [30, 23], tal como na classe dos cografos. A classe dos grafos  $P_4$ -esparso generalizam tanto os cografos (visto na seção anterior)

como os grafos  $P_4$ -reduzíveis: aqueles em que nenhum vértice pertence a mais do que um  $P_4$  induzido [27].

A seguir, revisaremos algumas propriedades dos grafos  $P_4$ -esparcos, úteis para apresentação dos nossos resultados no Capítulo seguinte.

Um grafo  $G$  é chamado *aranha* se o conjunto de vértices  $V(G)$  do grafo  $G$  admite uma partição em conjuntos  $S$ ,  $K$  e  $R$  tais que:

- $S_1$ :  $|S| = |K| \geq 2$ ,  $S$  é um conjunto independente e  $K$  é uma clique;
- $S_2$ : todos os vértices em  $R$  são adjacentes a todos os vértices em  $K$  e a nenhum vértice em  $S$ ;
- $S_3$ : existe uma função bijetora  $f : S \rightarrow K$  tal que exatamente uma das seguintes sentenças se verifica:
  - (a) para cada vértice  $v \in S$ ,  $N(v) \cap K = \{f(v)\}$ ;
  - (b) para cada vértice  $v \in S$ ,  $N(v) \cap K = K - \{f(v)\}$ .

A tripla  $(S, K, R)$  é chamada uma *partição aranha*. Uma aranha é dita *sem cabeça* se  $R = \emptyset$ . Se a condição do caso  $S_3(a)$  for verificada então a aranha  $G$  é chamada *aranha magra*, caso contrário, é chamada *aranha gorda*; observe que o complemento de uma aranha magra é uma aranha gorda e vice-versa. A Figura 2.5 mostra duas aranhas com partição  $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $K = \{y_1, y_2, y_3\}$  e  $R = \{z\}$ , onde a aranha da esquerda é uma aranha magra, enquanto a da direita é uma aranha gorda.

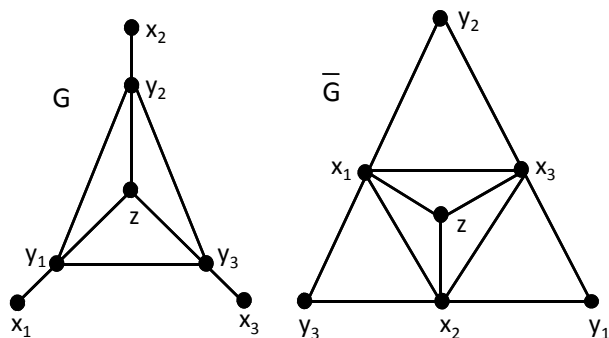


Figura 2.5: Aranha magra e aranha gorda.

**Observação 2.1** (Jamison e Olariu [29]) *Se um grafo  $G$  é uma aranha, então exatamente uma das afirmações se verifica:*

- (a) *para todo  $v \in S$  e  $u \in K$ ,  $d(v) = 1$  e  $d(u) = |V(G)| - |S|$ ;*
- (b) *para todo  $v \in S$  e  $u \in K$ ,  $d(v) = |K| - 1$  e  $d(u) = |V(G)| - 2$ .*

Novamente, os itens (a) e (b) correspondem aos casos de uma aranha magra e uma aranha gorda, respectivamente.

**Observação 2.2** (Jamison e Olariu [29]) *Se um grafo  $G$  é uma aranha com partição  $(S, K, R)$  e  $R$  é não vazio, então para todo  $v \in S$ ,  $u \in K$  e  $r \in R$ ,  $d(v) < d(r) < d(u)$ .*

Uma outra observação importante que pode ser feita a partir da definição de aranha e das duas observações anteriores é que se  $G$  é uma aranha, então os conjuntos  $S$ ,  $K$  e  $R$  são únicos [29]. Além disso, das propriedades da aranha e pela definição de grafos  $P_4$ -esparso,  $G$  é  $P_4$ -esparso se e somente se  $G[R]$  é  $P_4$ -esparso.

Para grafos  $P_4$ -esparso, o seguinte resultado se verifica:

**Lema 2.3** (Jamison e Olariu [29]) *Para um grafo  $G$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  *$G$  é um grafo  $P_4$ -esparso;*
- (ii) *para todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$  com pelo menos dois vértices, exatamente uma das seguintes afirmações é satisfeita:*
  - (1)  *$H$  é desconexo;*
  - (2)  *$\overline{H}$  é desconexo;*
  - (3)  *$H$  é uma aranha.*

Por fim, vale mencionar que os grafos  $P_4$ -esparso também podem ser representados por uma árvore de decomposição que é única a menos de isomorfismo. Além disso, através dessa árvore, é possível reconhecer os grafos  $P_4$ -esparso em tempo linear.

Por fim, ressaltamos que a classes dos grafos  $P_4$ -esparso corresponde a uma subclasse dos grafos perfeitos.

**Teorema 2.9** *Os grafos  $P_4$ -esparsos são perfeitos.*

**Prova.** O resultado segue diretamente do fato que grafos  $P_4$ -esparsos não possuem ciclo de tamanho maior que 4 e do fato de que o complemento de grafos  $P_4$ -esparsos são também grafos  $P_4$ -esparsos. ■

# Capítulo 3

## $M$ -partições

O problema da  $M$ -partição foi introduzido em 1999 num artigo de Feder, Hell, Klein e Motwani [17]. O problema consiste em determinar se o conjunto de vértices de um dado grafo admite uma partição em certas partes, onde adjacências entre as partes são fornecidas através de uma matriz fixa  $M$ . A matriz possui três entradas diferentes, representando adjacências completas, adjacências arbitrárias, ou nenhuma adjacência nas partes correspondentes.

A seguir, a definição formal do problema da  $M$ -partição:

Seja  $M$  uma matrix fixa (simétrica) de ordem  $m \times m$  com entradas  $\{0, 1, *\}$ . Para um dado grafo  $G$ , uma  $M$ -partição de  $G$  é uma partição dos vértices de  $G$  em partes  $V_1, V_2, \dots, V_m$  tal que se  $M(i, j) = 0$ , então cada vértice em  $V_i$  é não adjacente a cada vértice em  $V_j$ , se  $M(i, j) = 1$ , então cada vértice em  $V_i$  é adjacente a todos vértices em  $V_j$ , e se  $M(i, j) = *$ , então não há nenhuma restrição quanto a adjacência entre vértices em  $V_i$  e  $V_j$ . Observe que quando  $i = j$ , a definição descreve a adjacência de um vértice a todos os outros vértices de sua parte, i.e., as entradas na diagonal principal de  $M$  fornece as restrições nas partes individuais. Se  $M(i, i) = 0$ , então  $V_i$  é um conjunto independente, se  $M(i, i) = 1$ , então  $V_i$  é uma clique, e se  $M(i, i) = *$ , então  $V_i$  é um conjunto de vértices com adjacências abritrárias (cada vértice em  $V_i$  é adjacente a alguns, possivelmente todos ou nenhum outro vértice em  $V_i$ ).

Para facilitar a visualização de um problema de partição, usamos figuras simbólicas para a estrutura do grafo particioando. Nesta visualização, um círculo vazio representa um conjunto independente (um elemento nulo na diagonal principal da matriz), um círculo listrado representa uma parte com adjacências arbitrárias (equivale a um asterisco na diagonal principal da matriz) e um círculo cruzado representa uma clique (equivale a um



elemento 1 na diagonal principal da matriz). Além disso, partes são ligadas com uma linha, se a adjacência entre as partes for arbitrária (\* fora da diagonal principal da matriz); duas partes são unidas por uma linha dupla se elas forem completamente adjacentes (equivale a um elemento 1 fora da diagonal principal). No caso em que as partes são completamente não adjacentes, nenhuma linha é utilizada (equivale a um elemento nulo fora da diagonal principal da matriz). No que segue, um exemplo é dado.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

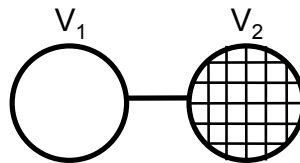


Figura 3.1: Estrutura de um grafo split.

Este problema de  $M$ -partição corresponde a partição do grafo em um conjunto independente ( $M(1,1) = 0$ ) e uma clique ( $M(2,2) = 1$ ), sem restrição externa entre as partes ( $M(1,2) = M(2,1) = *$ ). Na verdade, um grafo  $G$  é particionado de acordo com  $M$ , se e somente se  $G$  é um grafo split.

O problema da  $M$ -partição generaliza o problema da  $k$ -coloração, já que se  $M$  for uma matriz de ordem  $k$  com diagonal principal nula, temos que verificar se um dado grafo  $G$  admite uma  $M$ -partição, ou seja, verificar se  $G$  admite uma  $k$ -coloração (Figura 3.2).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

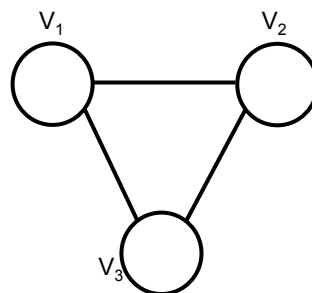


Figura 3.2: Problema da 3-coloração.

Outro caso particular do problema da  $M$ -partição e bastante estudado na literatura são os grafos- $(k, l)$ , que são grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $l$  cliques. No contexto de  $M$ -partição, os grafos que admitem uma  $M$ -partição têm uma matriz  $M$  de ordem  $(k + l) \times (k + l)$  com  $k$  elementos nulos na diagonal principal,  $l$  elementos 1's na diagonal principal e \*'s em todas as outras entradas da matriz. Os grafos- $(k, l)$  foram introduzidos por Brandstädt em [5]. Brandstädt provou que para  $k \geq 3$  ou  $l \geq 3$ , decidir se um grafo é  $(k, l)$  é um problema  $NP$ -completo. No caso contrário, o problema pode ser resolvido em tempo polinomial. Diversos pesquisadores consideram o reconhecimento dos grafos- $(k, l)$  em subclasses de grafos perfeitos, como a classe dos cografos, dos grafos cordais,  $P_4$ -esparsos e distância hereditária, por exemplo. Para essas classes, foram mostradas caracterizações por subgrafos proibidos e algoritmos lineares para reconhecer se um dado grafo (pertencente a uma dessas classes) é  $(k, l)$ .

Definiremos a seguir um outro conceito útil para nossos resultados.

No problema da  $M$ -partição, uma  $M$ -obstrução refere-se a um grafo que não admite uma  $M$ -partição. Em particular, uma  $M$ -obstrução *minimal* é uma  $M$ -obstrução tal que qualquer subgrafo induzido próprio da obstrução admite uma  $M$ -partição. Como exemplo, considere a matriz  $M$  abaixo que representa a partição em dois conjuntos independentes que são arbitrariamente conectados entre si.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

Qualquer grafo que é particionado de acordo com a matriz  $M$  acima é bipartido. Qualquer ciclo ímpar é uma obstrução minimal para este problema de  $M$ -partição, já que ciclos ímpares não são bipartidos enquanto qualquer subgrafo induzido o é. Como pode-se verificar, o número de obstruções minimais para o problema da  $M$ -partição anterior é infinito. Se restringirmos a matriz anterior à classe dos grafos cordais, então a única obstrução é o triângulo ( $C_3$ ).

Observe que podemos considerar matrizes  $M$  sem \* na diagonal principal, caso contrário, qualquer grafo  $G$  admitiria uma  $M$ -partição. Neste caso, se a matriz  $M$  não possui \*'s na diagonal principal, então podemos escrevê-la na forma de blocos (veja Figura 3.3), inicialmente listando as linhas e colunas com diagonal 0's e posteriormente aquelas com diagonal 1's. A matriz se divide em 4 blocos, a saber, uma matriz  $A$  de ordem  $k \times k$  com diagonal nula, uma matriz  $B$  de ordem  $l \times l$  com diagonal de 1's, uma matriz  $C$  de elementos fora da diagonal e sua transposta. Dizemos que  $M$  é uma matriz *constante* se

os elementos fora da diagonal principal de  $A$  forem todos iguais a  $a$ , os elementos fora da diagonal principal de  $B$  forem todos iguais a  $b$ , e os elementos de  $C$  forem todos iguais a  $c$ . Neste caso, também dizemos que  $M$  é uma matriz de *bloco*-( $a, b, c$ ). Podemos assumir que  $a \neq 0$  e  $b \neq 1$ , caso contrário, podemos diminuir  $k$  ou  $l$ .

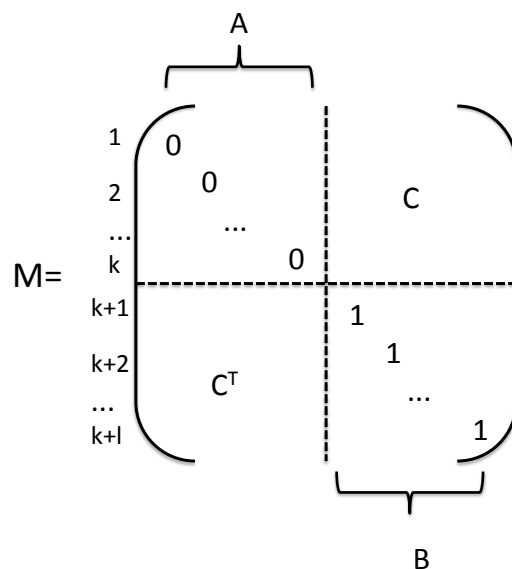


Figura 3.3: Matriz amigável.

Na próxima seção fazemos uma breve discussão sobre os resultados na literatura.

## 3.1 Resultados na Literatura

### 3.1.1 Grafos Gerais

Nesta seção apresentamos alguns resultados do problema da  $M$ -partição para grafos em geral.

Iniciamos observando que o *complemento* de uma matriz  $M$ , denotada por  $\overline{M}$ , é a matriz  $M$  com 1's substituídos por 0's, e 0's substituídos por 1's. Os asteriscos de  $M$  são mantidos em  $\overline{M}$ . Ainda, podemos rearranjar as partes de forma a termos primeiros os 0's e depois os 1's na diagonal principal.

**Teorema 3.1** *Uma grafo  $G$  é  $M$ -particionável se e somente se  $\overline{G}$  é  $\overline{M}$ -particionável.*

Para matrizes de ordem baixa (quando  $M$  tem ordem no máximo  $4 \times 4$ ) existem resultados que classificam os problemas de  $M$ -partição.

**Teorema 3.2** *Se  $M$  é uma matriz de ordem  $2 \times 2$ , então o problema da  $M$ -partição pode ser resolvido em tempo polinomial.*

**Teorema 3.3** [18] *Seja  $M$  uma matriz de ordem  $3 \times 3$  ou  $4 \times 4$ , então o problema da  $M$ -partição é NP-completo se  $M$  contém a matriz correspondente ao problema da 3-coloração (ou seu complemento); caso contrário, é polinomial.*

**Teorema 3.4** [15] *Se  $M$  é uma matriz sem qualquer entrada  $*$ , então o problema da  $M$ -partição possui um número finito de obstruções minimais.*

Este teorema implica que tais problemas de  $M$ -partições admitem um número finito de obstruções minimais em qualquer classe de grafos.

Em [20], Feder *et al.* definiram uma classe de matrizes ainda mais geral, chamadas matrizes amigáveis. Uma matriz *amigável* é uma matriz sem qualquer  $*$  em  $A$  e em  $B$ , de acordo com a Figura 3.3. Uma matriz é não amigável se ela não for amigável, i.e, se possuir alguma entrada  $*$  em  $A$  ou em  $B$ . Os seguintes resultados foram mostrados para tais classes de matrizes:

**Teorema 3.5** [20] *Se  $M$  é uma matriz não amigável, então o problema da  $M$ -partição possui infinitas  $M$ -obstruções minimais.*

Para matrizes pequenas temos a recíproca:

**Teorema 3.6** [20] *Se  $M$  é uma matriz amigável de ordem  $k \times k$  com  $k \leq 5$ , então o problema da  $M$ -partição possui apenas um número finito de  $M$ -obstruções minimais.*

### 3.1.2 Grafos Perfeitos

Muitos resultados relacionados ao problema da  $M$ -partição foram encontrados quando restritos à classe dos grafos perfeitos.

**Teorema 3.7** [14] *Seja  $M$  uma matriz de bloco- $(a, b, c)$ . Se  $c \neq *$ , então cada  $M$ -obstrução minimal perfeita possui no máximo  $(k + 1)(l + 1)$  vértices.*

**Teorema 3.8** [14] *Seja  $M$  uma matriz de bloco- $(a, b, *)$ . Então todo problema de  $M$ -partição possui finitas  $M$ -obstruções minimais perfeitas.*

### 3.1.2.1 Grafos Cordais

No caso particular dos grafos cordais, Feder, Hell e Rizi [19] classificaram todas as matrizes  $M$  pequenas quanto a possuírem obstruções cordais minimais finitas ou infinitas (para todas as matrizes de tamanho menor que 4) e se admitem algoritmo de reconhecimento polinomial ou  $NP$ -completo (para as todas matrizes de tamanho menor que 5).

Vale mencionar que neste trabalho de Feder *et al.*, eles não fornecem explicitamente todas as obstruções minimais (para alguns casos, mencionam apenas se estas são finitas ou não).

Seguem alguns Teoremas provados por Feder, Hell e Rizi [19] que serão do nosso interesse.

**Teorema 3.9** [19] *Se  $M$  é uma matriz de tamanho  $m < 4$ , então  $M$  possui obstruções minimais cordais finitas, exceto para as duas seguintes matrizes abaixo que possuem obstruções minimais cordais infinitas.*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lema 3.1** [19] *A matriz  $M_1$  possui infinitas obstruções minimais cordais.*

**Prova.** A prova é dada apresentando uma família de grafos minimais cordais que não admitem uma  $M_1$ -partição. Seja essa família representada pelo grafo da Figura 3.4 abaixo:

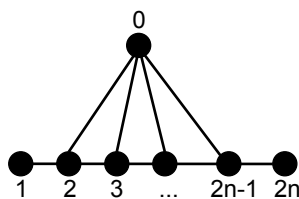


Figura 3.4: Obstrução infinita.

É fácil ver que os grafos oriundos da Figura 3.4 são cordais. Vamos mostrar que tais grafos não admitem uma  $M_1$ -partição para  $n > 2$ .

Suponhamos que tal partição exista. Podemos observar que o vértice 0 não pode ser alocado na primeira parte (correspondente a primeira entrada da diagonal principal de  $M_1$ , já que isso implicaria que todos os vértices de 2 a  $2n$  fossem para as duas outras partes, que são conectadas por todas as arestas possíveis, o que resultaria num  $C_4$  (pois  $n > 2$ ).

Desta forma, sem perda de generalidade, suponha que 0 seja alocado na segunda parte. Então 2 e  $2n - 1$  devem ser alocados na primeira parte e na terceira, em alguma ordem; observe que eles não podem ser alocados na mesma parte devido à paridade. Suponha que 2 seja alocado na primeira parte e  $2n - 1$  na terceira parte. Segue que 1 não pode ser alocado em nenhuma parte, uma contradição.

Resta mostrarmos que essas obstruções são minimais, i.e., se algum vértice do grafo da Figura 3.4 é apagado, então  $G$  admite uma  $M^{*,*,1}$ -partição.

É fácil ver que ao apagarmos o vértice 0, é possível particionar o grafo da Figura 3.4. Nos demais casos o resultado segue do fato de que com um vértice removido, a paridade deixa de ser um problema e se 0 for alocado na segunda parte, ambos 1 e  $2n$  (se não tiverem sido apagados) podem ser alocados na primeira parte. ■

Seja a matriz  $M_3$  dada abaixo:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.10** [19] *Se  $M$  tem tamanho  $m = 3$  e uma diagonal constante, e se  $M \neq M_3$ , então  $M$  possui obstruções minimais cordais finitas.*

O Teorema 3.10 não fornece tais obstruções minimais cordais, apenas prova que são finitas. No capítulo seguinte, apresentaremos tais obstruções. Tal resultado constitui uma das contribuições deste trabalho.

### 3.1.2.2 Cografos

Em [16], Feder *et. al* mostraram que todos os problemas de  $M$ -partição para cografos admitem algoritmo polinomial, além de uma caracterização por subgrafos proibidos.

Na verdade, eles apresentaram um limite no tamanho do maior cografo que é uma  $M$ -obstrução minimal, e mostraram também que todos os problemas de  $M$ -partição quando restritos à classe dos cografos possuem obstruções minimais finitas.

### 3.1.2.3 Grafos $P_4$ -esparsos

Por fim, apresentamos os resultados na classe dos grafos  $P_4$ -esparsos. Em [24] resultados ‘semelhantes’ aos apresentados no trabalho de Feder, Hell e Rizi [19] são apresentados para a classe do grafos  $P_4$ -esparsos. Na verdade, limites superiores para o tamanho de uma  $M$ -obstrução minimal são dados. A seguir, um resultado deste gênero.

**Teorema 3.11** *Qualquer  $M$ -obstrução minimal de um grafo  $P_4$ -esparso tem no máximo  $O(16^m)$  vértices.*

Outros resultados que mostram limites no número de vértices de uma  $M$ -obstrução de um grafo- $P_4$ -esparso são apresentados quando  $M$  possui certas características, como por exemplo, ser uma matriz-bloco, dentre outras.

Aqui neste trabalho (Capítulo 4), discutiremos o problema da  $M$ -partição quando  $M$  é uma matriz de ordem  $k \geq 3$  e diagonal nula, considerando todas as entradas possíveis para elementos fora da diagonal principal. Restringiremos esse problema à duas subclasses dos grafos perfeitos: os grafos cordais e os grafos  $P_4$ -esparsos. Para essas classes, mostraremos que o número de obstruções minimais para as matrizes consideradas é finito, comprovando os resultados já mencionados anteriormente. Na verdade, nosso resultado apresenta explicitamente tais obstruções minimais.

# Capítulo 4

## $M$ -obstruções minimais em subclasses de grafos perfeitos

Este capítulo considera o problema da  $M$ -partição quando restrito à duas classes de grafos perfeitos: a classe dos grafos cordais e a classe dos grafos  $P_4$ -esparços.

Em particular, consideramos o problema da  $M$ -partição para matrizes quadradas  $M$  de ordem  $m \leq 3$  com diagonal nula e apresentamos uma caracterização dos grafos cordais (grafos  $P_4$ -esparços)  $M$ -particionáveis em termos de  $M$ -obstruções, i.e., dado um grafo cordal ( $P_4$ -esparço)  $G$  e uma matriz simétrica  $M$  de ordem no máximo três, nosso resultado exprime quando um grafo cordal ( $P_4$ -esparço)  $G$  admite uma  $M$ -partição.

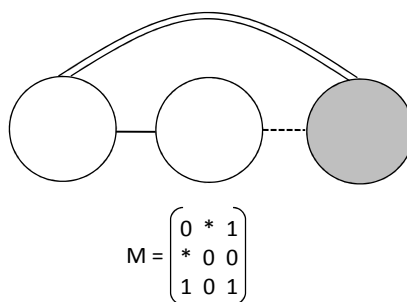
É fácil ver que para  $m = 1$  o problema é trivial já que corresponde a verificar se  $G$  é um conjunto independente.

Sendo assim, no que segue, consideramos os casos  $m = 2$  e  $m = 3$ .

Para simplificar, usaremos a notação  $(k, l)^{\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^k, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^k\}}$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$  para representar uma  $M$ -partição em que  $M$  é uma matriz com  $k$  elementos nulos na diagonal principal, ou seja, uma partição em  $k$  conjuntos independentes:  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , onde cada  $a_i^j$  representa a restrição externa entre os conjuntos  $X_i$  e  $X_j$ . Como exemplo, o grafo  $(3, 0)^{*,1,0}$ , que corresponde ao grafo da Figura 4.1.

Iniciamos apresentando os resultados para o caso em que  $M$  é uma matriz de ordem 2. Neste caso, os resultados apresentados já são conhecidos na literatura e valem para grafos gerais.



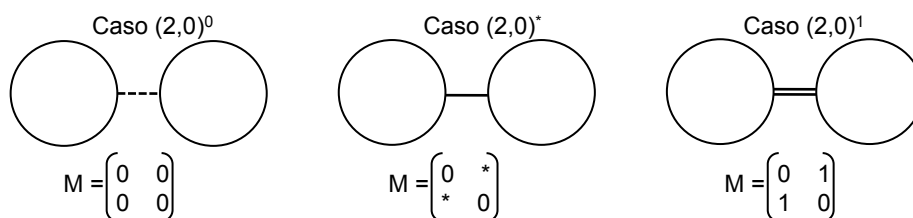
Figura 4.1: Grafo  $(3, 0)^{*,1,0}$ .

## 4.1 2-Coloração com restrição externa em grafos gerais

Nesta seção consideramos o problema de verificar se um dado grafo cordal pode ter seu conjunto de vértices particionado em dois conjuntos independentes  $I_1$  e  $I_2$  com todas as possíveis restrições externas, a saber, o caso  $(2, 0)^*$ , que corresponde ao caso em que não há nenhuma restrição quanto as arestas entre os conjuntos  $I_1$  e  $I_2$ ; o caso  $(2, 0)^1$ , que corresponde ao caso em que exigimos que haja todas as arestas entre os conjuntos  $I_1$  e  $I_2$  e, por fim, o caso  $(2, 0)^0$ , que corresponde ao caso em que exigimos que não haja arestas entre os conjuntos  $I_1$  e  $I_2$ .

Na Figura 4.2 são listadas todas as matrizes e suas respectivas partições correspondentes para o problema da 2-coloração.

Observe que o caso  $(2, 0)^0$  corresponde ao caso trivial de se verificar se um dado grafo é um conjunto independente. Portanto, analisaremos apenas os casos  $(2, 0)^*$  e  $(2, 0)^1$ .

Figura 4.2: Matrizes de ordem  $2 \times 2$ .

Na verdade, para o problema da 2-coloração com restrições externas, nossos resultados não se restringem a grafos cordais ( $P_4$ -esparsos), mas a grafos gerais. No caso dos grafos cordais e  $P_4$ -esparsos, nosso teorema de caracterização é um corolário desses resultados.

**Teorema 4.1** [4] *Seja  $G$  um grafo.  $G$  é um grafo  $(2,0)^*$  se e somente se  $G$  não contém ciclos ímpares como subgrafo induzido.*

**Corolário 4.1** *Seja  $G$  um grafo cordal ( $P_4$ -esparso).  $G$  é um grafo  $(2,0)^*$  se e somente se  $G$  não contém o grafo da Figura 4.3 como subgrafo induzido.*

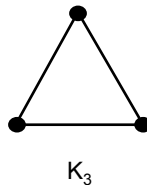


Figura 4.3: Obstrução minimal do caso  $(2,0)^*$ .

**Prova.** Um grafo  $G$  é bipartido se e somente se não contém ciclo induzido de comprimento  $2k + 1, k \geq 2$ . Como grafos cordais ( $P_4$ -esparso) não admitem ciclos ímpares de comprimento maior que 3, o resultado segue. ■

**Teorema 4.2** *Seja  $G$  um grafo.  $G$  é um grafo  $(2,0)^1$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 4.4 como subgrafo induzido.*

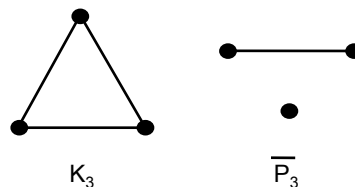


Figura 4.4: Obstruções minimais do caso  $(2,0)^1$ .

**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar facilmente que se  $G$  contém qualquer um dos subgrafos acima, então  $G$  não é um grafo  $(2,0)^1$ . Pode-se também verificar que cada grafo da Figura 4.4 é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o  $(2,0)^1$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo minimal que não é  $(2,0)^1$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo  $(2,0)^1$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.4 como subgrafo induzido. Iniciamos observando que  $G$  deve ser um cografo, caso contrário,  $G$  conteria um  $P_4$  e, conseqüentemente,  $\overline{P_3}$  como subgrafo induzido. Portanto, podemos assumir que  $G$  ou  $\overline{G}$  é desconexo:

- (i)  $G$  é desconexo: Seja  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é trivial ou conexo. Se todos  $G_i$  forem triviais, então  $G$  é  $(2, 0)^1$ , o que seria um absurdo. Logo, deve existir algum  $G_i$  tal que  $|G_i| > 1$ . Neste caso,  $G$  contém  $\overline{P}_3$ . Absurdo.
- (ii)  $\overline{G}$  é desconexo:  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é trivial ou contém um par de vértices não adjacentes. Dois casos são considerados:
- $k \geq 3$ : Neste caso,  $G$  contém  $K_3$  como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
  - $k = 2$ : Se ambos  $G_1$  e  $G_2$  forem tais que  $V(G_1)$  e  $V(G_2)$  são conjuntos independentes, então  $G$  é  $(2, 0)^1$ , o que é um absurdo. Portanto, sem perda de generalidade, suponha que  $V(G_1)$  não é um conjunto independente, isto é,  $G_1$  contém  $\overline{P}_3$ , e conseqüentemente,  $G$  contém  $\overline{P}_3$ , o que absurdo. ■

Observemos que o Teorema 4.2 se aplica diretamente a grafos cordais ( $P_4$ -esparsos), uma vez que os subgrafos proibidos também são cordais ( $P_4$ -esparsos).

As seções seguintes consideram o problema da 3-coloração com restrições externas para grafos cordais e  $P_4$ -esparsos. A Figura 4.5 retrata todos os Casos da 3-coloração com as possíveis restrições externas.

Observe que o Caso  $(3, 0)^{0,0,0}$  corresponde ao caso trivial de verificar se um dado grafo é um grafo vazio, i.e, seu conjunto de vértices é um conjunto independente. Note também que os Casos  $(3, 0)^{*,0,0}$ ,  $(3, 0)^{*,*,0}$  e  $(3, 0)^{*,0,1}$  são equivalentes ao Caso  $(2, 0)^*$  e, da mesma forma, o Caso  $(3, 0)^{0,1,1}$  equivale ao Caso  $(2, 0)^1$ .

Portanto, analisaremos apenas os Casos  $(3, 0)^{*,*,*}$ ,  $(3, 0)^{1,1,1}$ ,  $(3, 0)^{1,0,0}$ ,  $(3, 0)^{*,1,1}$  e  $(3, 0)^{*,*,1}$ , já que os demais podem ser reduzidos à problemas de 2-coloração, já demonstrados na seção 4.1.

## 4.2 3-Coloração com restrição externa em grafos cordais

Ao contrário da seção anterior, onde o problema foi resolvido para grafos gerais, nesta seção, restringimos o problema à classe dos grafos cordais, já que o problema da 3-coloração é sabidamente  $NP$ -completo [22] para grafos gerais, mesmo no caso sem restrição externa.

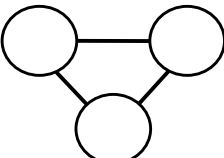
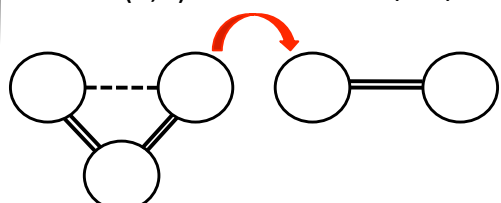
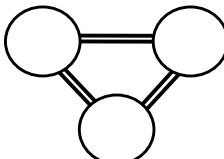
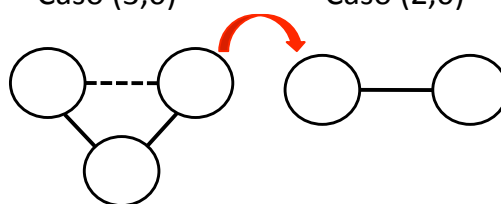
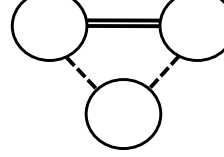
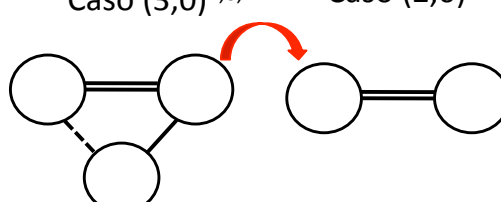
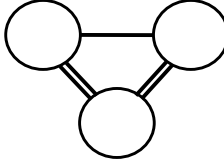
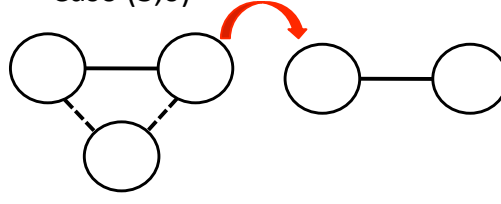
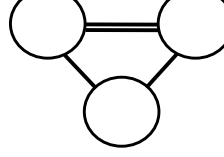
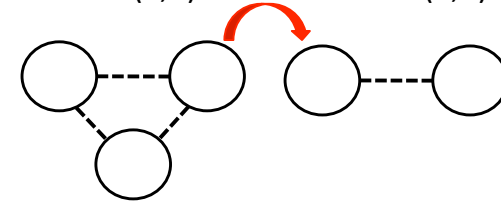
$M = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$ 	<p>Caso <math>(3,0)^{*,*,*}</math></p> <p>Caso <math>(3,0)^{0,1,1}</math>      Caso <math>(2,0)^1</math></p> 
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 	<p>Caso <math>(3,0)^{1,1,1}</math></p> <p>Caso <math>(3,0)^{0,*,*}</math>      Caso <math>(2,0)^*</math></p> 
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 	<p>Caso <math>(3,0)^{1,0,0}</math></p> <p>Caso <math>(3,0)^{1,0,*}</math>      Caso <math>(2,0)^1</math></p> 
$M = \begin{pmatrix} 0 & * & 1 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 	<p>Caso <math>(3,0)^{*,1,1}</math></p> <p>Caso <math>(3,0)^{*,0,0}</math>      Caso <math>(2,0)^*</math></p> 
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$ 	<p>Caso <math>(3,0)^{1,*,*}</math></p> <p>Caso <math>(3,0)^{0,0,0}</math>      Caso <math>(2,0)^0</math></p> 

Figura 4.5: Matrizes de ordem  $3 \times 3$ .

**Teorema 4.3** *Seja  $G$  um grafo cordal.  $G$  é um grafo  $(3,0)^{*,*,*}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 4.6 como subgrafo induzido.*

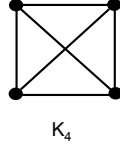


Figura 4.6: Obstrução minimal do caso  $(3,0)^{*,*,*}$ .

**Prova.**

O resultado segue diretamente do fato de que grafos cordais são perfeitos. Logo,  $G$  cordal é  $(3,0)^{*,*,*}$  se e somente se  $G$  não contém  $K_4$  como subgrafo induzido. ■

O Teorema 4.2 também foi provado independentemente em [25].

**Teorema 4.4** *Seja  $G$  um grafo cordal.  $G$  é um grafo  $(3,0)^{1,1,1}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 4.7 como subgrafo induzido.*

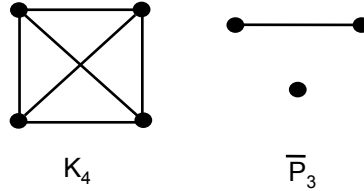


Figura 4.7: Obstruções minimais do caso  $(3,0)^{1,1,1}$ .

**Prova.** ( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar facilmente que se  $G$  contém  $K_4$  ou  $\overline{P}_3$  como subgrafo induzido, então  $G$  não é um grafo cordal  $(3,0)^{1,1,1}$ . Além disso, os subgrafos da Figura 4.7 são minimais, pois a retirada de qualquer um de seus vértices torna o grafo  $(3,0)^{1,1,1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo cordal minimalmente não  $(3,0)^{1,1,1}$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo cordal  $(3,0)^{1,1,1}$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.7 como subgrafo induzido. Iniciamos observando que  $G$  deve ser um grafo cordal, caso contrário,  $G$  conteria um  $P_4$  e, conseqüentemente,  $\overline{P}_3$  como subgrafo induzido. Portanto, podemos assumir que  $G$  ou  $\overline{G}$  é desconexo:

(i)  $G$  é desconexo: Seja  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é trivial ou conexo.

Se todos  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  forem triviais, então  $G$  é  $(3,0)^{1,1,1}$ , o que seria um absurdo.

Logo, deve existir algum  $G_i$  tal que  $|G_i| > 1$ . Neste caso,  $G$  contém  $\overline{P}_3$ . Absurdo.

(ii)  $\overline{G}$  é desconexo:  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é trivial ou contém um par de vértices não adjacentes. Dois casos são considerados:

- $k \geq 4$ : Neste caso,  $G$  contém  $K_4$  como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- $k = 3$ : Algum  $G_i$  deve conter aresta, caso contrário,  $G$  seria  $(3, 0)^{1,1,1}$ . Mas neste caso,  $G$  contém  $K_4$  como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- $k = 2$ : Neste caso, exatamente um  $G_i$  deve ser tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente, caso contrário,  $G$  conteria  $K_4$  como subgrafo induzido ou  $G$  seria  $(3, 0)^{1,1,1}$ . Sem perda de generalidade, assumamos que  $V(G_1)$  é um conjunto independente e  $V(G_2)$  não o é. Isto implica que  $G_2$  contém  $\overline{P}_3$  como subgrafo induzido, assim  $G$  também contém, absurdo. ■

**Teorema 4.5** *Seja  $G$  um grafo cordal.  $G$  é um grafo  $(3, 0)^{1,0,0}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.8 como subgrafo induzido.*

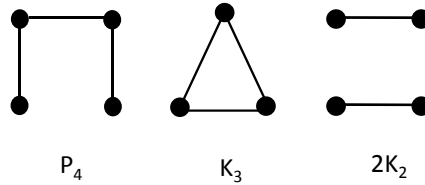


Figura 4.8: Obstruções minimais do caso  $(3, 0)^{1,0,0}$ .

**Prova.** ( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar facilmente que se  $G$  contém qualquer um dos subgrafos acima, então  $G$  não é um grafo cordal  $(3, 0)^{1,0,0}$ . Pode-se também verificar que cada grafo da Figura 4.8 é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o  $(3, 0)^{1,0,0}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo cordal minimal que não é  $(3, 0)^{1,0,0}$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo  $(3, 0)^{1,0,0}$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.8 como subgrafo induzido. Podemos assumir que  $G$  é um cografo, caso contrário,  $G$  conteria  $P_4$  como subgrafo induzido, o que seria um absurdo. Portanto,  $G$  ou  $\overline{G}$  é desconexo.

- (i) Se  $G$  é desconexo, então  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é um grafo trivial ou conexo. Por minimalidade de  $G$ , se algum  $G_i$  for tal que  $V(G_i)$  é um independente, então  $G$  é  $(3, 0)^{1,0,0}$ . Logo, todo  $G_i$  deve conter aresta. Mas neste caso,  $G$  contém  $2K_2$  como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- (ii) Se  $\overline{G}$  é desconexo então  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é um grafo trivial ou desconexo.
- $k \geq 3$ : Neste caso,  $G$  contém  $K_3$  como subgrafo induzido, um absurdo.
  - $k = 2$ : Observe que algum  $G_i$  deve conter aresta, caso contrário,  $G$  seria  $(3, 0)^{1,0,0}$ . Mas neste caso,  $G$  contém  $K_3$  como subgrafo induzido, o que também é um absurdo. ■

O teorema a seguir foi provado em [19] e sua prova é apresentada aqui tal como está no artigo.

**Teorema 4.6** [19] *Seja  $G$  um grafo cordal.  $G$  é um grafo  $(3, 0)^{*1,1}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.9 como subgrafo induzido.*

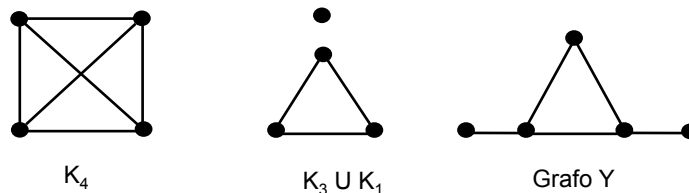


Figura 4.9: Obstruções minimais do caso  $(3, 0)^{*1,1}$ .

**Prova.** ( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar facilmente que se  $G$  contém os grafos da Figura 4.9 como subgrafo induzido, então  $G$  não é um grafo cordal  $(3, 0)^{*1,1}$ . Além disso, os subgrafos da Figura 4.9 são minimais, pois a retirada de qualquer um de seus vértices torna o grafo  $(3, 0)^{*1,1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo cordal minimalmente não  $(3, 0)^{*1,1}$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo cordal  $(3, 0)^{*1,1}$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.9 como subgrafo induzido. Se  $G$  é bipartido então  $G$  é  $(3, 0)^{*1,1}$ . Contradição. Assim,  $G$  contém triângulo (já que  $G$  é cordal) A ausência dos três subgrafos induzidos da Figura 4.9 implicam que as seguintes três afirmações se verificam para qualquer triângulo  $abc$ :

1. todo vértice de  $G - \{a, b, c\}$  é adjacente a pelo menos um vértice dentre  $a, b, c$ ;
2. dois vértices distintos de  $G - \{a, b, c\}$  que são adjacentes a apenas um vértice dentre  $a, b, c$ , devem ser não-adjacentes entre eles e adjacentes ao mesmo vértice dentre  $a, b, c$ ;
3. nenhum vértice de  $G - \{a, b, c\}$  é adjacente a todos três vértices  $a, b, c$ .

Observe inicialmente que para qualquer triângulo  $abc$  em  $G$ , dois vértices de  $G - \{a, b, c\}$  devem possuir um vizinho comum em  $abc$ . Caso contrário, digamos que, para algum triângulo  $abc$ , um vértice  $u$  é adjacente a  $a$  mas não a  $b$ , e  $v$  é adjacente a  $b$  mas não a  $a$ . Como  $G$  é cordal,  $u$  e  $v$  são não adjacentes. Pela afirmação (2), concluímos que  $u$  ou  $v$  é adjacente a  $c$ ; suponha que  $u$  seja adjacente a  $c$ . Então  $a, u, c$  formam um triângulo, e  $v$  é não adjacente a  $a$  e a  $u$ ; logo pela afirmação (1) aplicada ao triângulo  $auc$  devemos ter  $v$  também adjacente a  $c$ , e  $u$  e  $v$  possuem um vizinho comum  $c$ .

Agora, suponhamos que  $G$  contém um vértice  $a$  adjacente a todos outros vértices. Como  $G$  é cordal e não contém  $K_4$ , por hipótese, então o número cromático de  $G$  é menor que 4, e portanto, 3-colorível. Assim,  $G - a$  deve ser bipartido e então admite uma  $M_3$ -partição onde  $a$  é o único vértice na segunda parte (aquela que vê todos os vértices das outras partes).

Finalmente, mostraremos que se  $G$  não possui vértice adjacente a todos os outros vértices então  $G$  é 3-partido, isto é,  $(3, 0)^{*,*,*}$ . Considere um triângulo  $abc$  em  $G$ , e vértices  $a', b', c'$  não-adjacentes a  $a, b, c$  respectivamente. É fácil ver que  $a', b', c'$  devem ser distintos, pela afirmação (3) e pelo fato de que dois vértices de  $G - \{a, b, c\}$  devem ter um vizinho comum no triângulo  $abc$ . O último fato agora implica que todo vértice de  $G - \{a, b, c\}$  tem exatamente dois vizinhos em  $abc$  para qualquer triângulo  $abc$ . Se  $G$  não fosse 3-partido completo  $((3, 0)^{1,1,1})$ , então algum  $a''$  adjacente a  $b$  e  $c$  e algum  $b''$  adjacente a  $a$  e  $c$  seriam adjacentes entre eles. Contudo, isso contradiz o fato de  $b'$  ter dois vizinhos em  $abc'$ . Logo,  $G$  é um grafo 3-partido completo, e a 3-partição é também uma  $M_3$ -partição. ■

Seja  $M^{*,*,1}$  a matriz definida por

$$M^{*,*,1} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Diferentemente dos teoremas anteriores, não somos capazes de caracterizar os grafos cordais  $(3,0)^{*,*,1}$  através de subgrafos finitos. Conforme apresentado em [19] e provado no Capítulo anterior (Lema 3.1), o seguinte resultado expressa tal situação.

**Teorema 4.7** [19] *Seja  $G$  um grafo cordal. A matrix  $M^{*,*,1}$  admite várias obstruções cordais minimais, conforme mostra a Figura 4.10.*

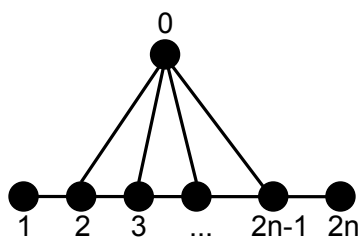


Figura 4.10: Obstrução infinita.

Vale mencionar que os teoremas 4.4 e 4.5 foram demonstrados nesta dissertação utilizando uma técnica diferente da apresentada em Feder *et al* [19]. Além disso, nesse mesmo artigo, não são apresentadas as obstruções minimais correspondentes aos teoremas 4.4 e 4.5, estas são duas das contribuições deste trabalho.

### 4.3 3-Coloração com restrição externa em grafos $P_4$ -esparsos

Esta seção consiste em apresentar caracterizações por subgrafos proibidos para os problemas da 3-coloração com restrições externas para grafos  $P_4$ -esparsos. Ao contrário dos grafos cordais, todos os problemas de 3-coloração em grafos  $P_4$ -esparsos admitem caracterizações finitas por subgrafos proibidos, conforme poderá ser verificado a seguir. Além disso, tais caracterizações constituem as contribuições deste trabalho.

**Teorema 4.8** *Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso.  $G$  é um grafo  $(3, 0)^{*,*,1}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 4.11 como subgrafo induzido.*

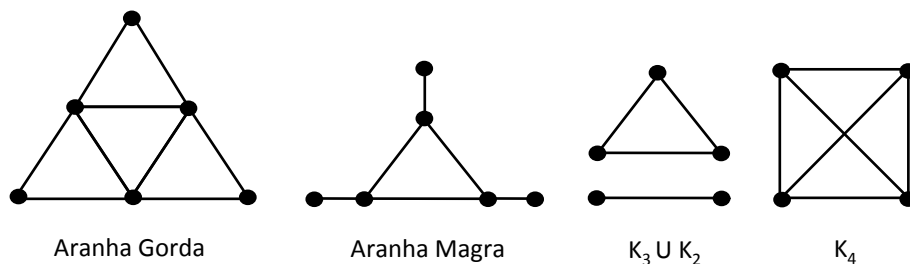


Figura 4.11: Obstruções minimais do caso  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{*,*,1}$ .

**Prova.** ( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar facilmente que se  $G$  contém os grafos da Figura 4.11 como subgrafo induzido, então  $G$  não é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{*,*,1}$ . Além disso, os subgrafos da Figura 4.11 são minimais, pois a retirada de qualquer um de seus vértices torna o grafo  $(3, 0)^{*,*,1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso minimalmente não  $(3, 0)^{*,*,1}$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{*,*,1}$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 4.11 como subgrafo induzido. Como  $G$  é um grafo  $P_4$ -esparso, podemos assumir que  $G$  é desconexo,  $\overline{G}$  é desconexo ou  $G$  é aranha:

- (i)  $G$  é desconexo: Seja  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ . Se algum  $G_i$  for trivial, ou seja,  $|G_i| = 1$ , então, por minimalidade de  $G$ ,  $G - G_i$  é  $(3, 0)^{*,*,1}$ , assim como  $G$  também é  $(3, 0)^{*,*,1}$ , o que é um absurdo. Logo, para todo  $G_i$ ,  $|G_i| \geq 2$ . Além disso,  $G$  não pode ser bipartido, caso contrário,  $G$  seria  $(3, 0)^{*,*,1}$ . Desta forma, podemos concluir que  $G$  contém triângulo, e o mesmo está contido propriamente em algum  $G_i$ , logo  $G$  contém  $K_3 \cup K_2$ , o que é um absurdo.
- (ii)  $\overline{G}$  é desconexo:  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ . Desta forma consideraremos três casos:

- $k \geq 4$ : Neste caso,  $G$  contém  $K_4$  como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- $k = 3$ : Se existir algum  $G_i$  que contenha aresta, então  $G$  contém  $K_4$ , que é um absurdo. Desta forma, todo  $G_i$  é tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente, o que implica em  $G$  ser  $(3, 0)^{*,*,1}$ , que também é um absurdo.
- $k = 2$ : Se  $G_1$  e  $G_2$  contiverem aresta, então  $G$  contém  $K_4$ , que é um absurdo. Desta forma, no máximo um deles possui aresta. Se nenhum possuir aresta, então  $G$  é  $(3, 0)^{*,*,1}$ . Se exatamente um possuir aresta e o outro não, neste caso  $G_i$  deve conter triângulo, caso contrário seria  $(3, 0)^{*,*,1}$ , mas neste caso  $G$  contém  $K_4$ , que é um absurdo.

(iii)  $G$  é aranha:  $G = (S, K, R)$ . Analisaremos dois casos:

(a)  $|S| = |K| > 2$ : Então,  $G$  contém a aranha gorda ou  $G$  contém a aranha magra da Figura 4.11 como subgrafo induzido. Absurdo.

(b)  $|S| = |K| = 2$ : Analisaremos dois casos:

Se  $|R| \leq 1$  então  $G$  é  $(3, 0)^{*,*,1}$ , absurdo.

Se  $|R| \geq 2$  então ou  $G$  contém  $K_4$  como subgrafo induzido (caso  $G[R]$  não seja um conjunto independente) ou  $G$  é  $(3, 0)^{*,*,1}$  (caso  $G[R]$  seja um conjunto independente). ■

**Teorema 4.9** *Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso.  $G$  é um grafo  $(3, 0)^{*,1,1}$  se e somente se,  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 4.12 como subgrafo induzido.*

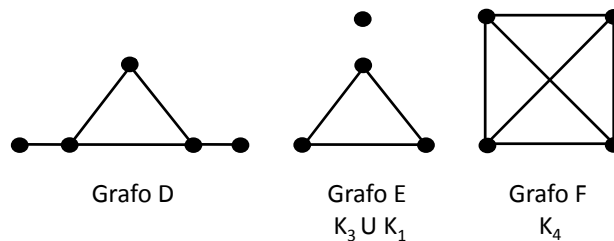


Figura 4.12: Obstruções mínimas do caso  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{*,1,1}$ .

**Prova.** ( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar facilmente que se  $G$  contém os grafos da Figura 4.12 como subgrafo induzido, então  $G$  não é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{*,1,1}$ . Podemos afirmar também que os subgrafos da Figura 4.12 são minimais, pois se retirarmos pelo menos um de seus vértices, o grafo passa a ser  $(3, 0)^{*,1,1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso minimalmente não  $(3, 0)^{*,1,1}$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{*,1,1}$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.11 como subgrafo induzido. Pela decomposição dos grafos  $P_4$ -esparso, podemos assumir que  $G$  é desconexo,  $\overline{G}$  é desconexo ou  $G$  é aranha:

- (i)  $G$  é desconexo: Seja  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ . O grafo  $G$  não pode ser bipartido, pois caso contrário,  $G$  seria  $(3, 0)^{*,1,1}$ , absurdo. Desta forma,  $G$  contém triângulo e, assim,  $G$  contém  $K_3 \cup K_1$ , o que é uma contradição.
- (ii)  $\overline{G}$  é desconexo:  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ . Se existir pelo menos um  $G_i$  tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente, então  $G - G_i$  não pode ser bipartido, isto é,  $(2, 0)^*$ , pois senão  $G$  seria  $(3, 0)^{*,1,1}$ . Absurdo! Assim,  $G - G_i$  contém triângulo e  $G$  contém  $K_4$ , o que também é uma contradição. Assim não existe nenhum  $G_i$  tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente, então para todo  $G_i$ ,  $G_i$  contém aresta, e como  $k \geq 2$ ,  $G$  contém  $K_4$ , absurdo!
- (iii)  $G$  é aranha: Analisaremos dois casos:
  - (a)  $|S| = |K| \geq 2$ : Neste caso,  $G$  contém  $D$  como subgrafo induzido.
  - (b)  $|S| = |K| < 2$ : Neste caso,  $S \cup K$  induz um  $P_4$ . Assim, analisaremos dois subcasos:

Se  $|R| \geq 1$  então  $G$  contém  $D$  como subgrafo induzido, o que é uma contradição.

Se  $R = \emptyset$  então  $G$  é  $(3, 0)^{*,1,1}$ , o que também é um absurdo. ■

**Teorema 4.10** *Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso.  $G$  é um grafo  $(3, 0)^{1,0,0}$  se e somente se  $G$  não contém nenhum dos grafos da Figura 4.13 como subgrafo induzido.*

**Prova.**

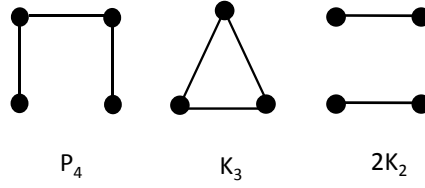


Figura 4.13: Obstruções minimais do caso  $(3, 0)^{1,0,0}$ .

( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar que se  $G$  contém os grafos Figura 4.13 como subgrafo induzido, então  $G$  não é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{1,0,0}$ . Podemos afirmar também que os subgrafos da Figura 4.13 são minimais, pois se retirarmos pelo menos um de seus vértices, o grafo passa a ser  $(3, 0)^{1,0,0}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso minimalmente não  $(3, 0)^{1,0,0}$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3, 0)^{1,0,0}$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.13 como subgrafo induzido. Pela decomposição dos grafos  $P_4$ -esparso, podemos assumir que  $G$  é desconexo,  $\overline{G}$  é desconexo ou  $G$  é aranha:

(i)  $G$  é desconexo.  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é conexo. Se algum  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , for tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente, então, por minimalidade de  $G$ ,  $G - G_i$  é  $(3, 0)^{1,0,0}$ , e por consequência,  $G$  é  $(3, 0)^{1,0,0}$ , contradição. Logo, todo  $G_i$  contém um  $K_2$ , e neste caso,  $G$  contém um  $2K_2$ . Absurdo.

(ii)  $\overline{G}$  é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular,  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é trivial ou desconexo.

Se  $k \geq 3$ , então  $G$  contém  $K_3$  como subgrafo induzido, contradição.

Se  $k = 2$  então  $G = G_1 + G_2$ . Se algum  $G_i$  contiver  $K_2$  então  $G$  contém  $K_2 + K_1 \cong K_3$ , absurdo. Logo, cada  $G_i$  é tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente e, neste caso,  $G$  é  $(2, 0)^1$ , e por consequência,  $G$  é  $(3, 0)^{1,0,0}$ . Absurdo!

(iii)  $G$  é aranha, isto é,  $G$  contém  $P_4$ , o que é um absurdo.

Concluimos que o grafo  $P_4$ -esparso  $G$  é  $(3, 0)^{1,0,0}$  se e somente se não contém nenhum dos grafos  $P_4$ ,  $K_3$  e  $2K_2$  como subgrafo induzido. ■

**Teorema 4.11** *Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso.  $G$  é  $(3,0)^{1,1,1}$ , se e somente se,  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.14 como subgrafo induzido.*

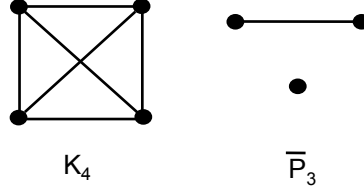


Figura 4.14: Obstruções minimais do caso  $(3,0)^{1,1,1}$ .

**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) Podemos verificar que se  $G$  contém os grafos Figura 4.14 como subgrafo induzido, então  $G$  não é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3,0)^{1,1,1}$ . Podemos afirmar também que os subgrafos da Figura 4.14 são minimais, pois se retirarmos pelo menos um de seus vértices, o grafo passa a ser  $(3,0)^{1,1,1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso minimalmente não  $(3,0)^{1,1,1}$ , ou seja, para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $G - v$  é um grafo  $P_4$ -esparso  $(3,0)^{1,1,1}$ . Suponha, por contradição que  $G$  não contém nenhum dos subgrafos da Figura 4.14 como subgrafo induzido. Pela decomposição dos grafos  $P_4$ -esparso, podemos assumir que  $G$  é desconexo,  $\overline{G}$  é desconexo ou  $G$  é aranha:

(i)  $G$  é desconexo.  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é conexo. Se todo  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $|G_i| = 1$ , então  $G$  é  $(3,0)^{1,1,1}$ . Contradição. Logo, deve existir algum  $G_i$ , tal que  $|G_i| \geq 2$ , ou seja,  $G_i$  contém um  $K_2$ . Neste caso,  $G$  contém  $\overline{P}_3$ . Absurdo.

(ii)  $\overline{G}$  é desconexo. Pela propriedade da decomposição modular,  $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$ ,  $k \geq 2$ , onde cada  $G_i$  é trivial ou desconexo. Se existir algum  $G_i$  tal que  $V(G_i)$  é um conjunto independente, então  $G - G_i$  não pode ser  $(2,0)^1$ , caso contrário,  $G$  seria  $(3,0)^{1,1,1}$ . Contradição. Logo, pelo Teorema 4.2,  $G - G_i$  não deve conter  $\overline{P}_3$  ou  $K_3$  como subgrafo induzido. Em qualquer um dos casos, obtemos um absurdo pela existência de um  $\overline{P}_3$  ou  $K_3 + K_1 \cong K_4$  em  $G$  como subgrafo induzido.

Temos que todo  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $G_i$  contém aresta. Como  $k \geq 2$ ,  $G$  contém  $K_4$ . Absurdo.

(iii)  $G$  é aranha, isto é,  $G$  contém  $\overline{P}_3$ , o que é um absurdo.

Concluimos que o grafo  $P_4$ -esparso  $G$  é  $(3,0)^{1,1,1}$ , se e somente se, não contém nenhum dos grafos  $K_4$  e  $\overline{P}_3$  como subgrafo induzido. ■

**Teorema 4.12** *Seja  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso.  $G$  é um grafo  $(3, 0)^{*,*,*}$  se e somente se,  $G$  não contém o grafo da Figura 4.15 como subgrafo induzido.*

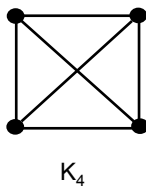


Figura 4.15: Obstrução minimal do caso  $(3, 0)^{*,*,*}$ .

**Prova.**

Este resultado segue diretamente do fato de que os grafos  $P_4$ -esparsos são grafos perfeitos. ■

Independentemente, este resultado foi provado em [7].

O capítulo seguinte sintetiza as contribuições deste trabalho e apresenta alguns problemas que sugerimos como trabalhos futuros.

# Capítulo 5

## Conclusão

Este trabalho considerou o problema da  $M$ -partição quando restrito à duas subclasses de grafos perfeitos: a classes do grafos cordais e a classe dos grafos  $P_4$ -esparsos. Consideramos todos os casos de matrizes  $M$  com dimensão no máximo 3 e diagonal nula. Particularmente, descrevemos todas as  $M$ -obstruções minimais com respeito à matriz  $M$  e a essas classes de grafos. Vale mencionar que no caso das  $M$ -obstruções dos grafos cordais, apresentamos uma prova alternativa para alguns casos já estudados na literatura [19]. Além disso, ainda para a classe dos grafos cordais, algumas matrizes  $M$  não possuíam suas  $M$ -obstruções explícitas, apenas informava que eram finitas. Por fim, estendemos os resultados apresentados em [40] para a classe dos cografos e matrizes  $M$  de tamanho máximo três e diagonal nula para a classe dos grafos  $P_4$ -esparsos.

### 5.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, propomos as seguintes diretrizes:

- Encontrar  $M$ -obstruções minimais para outras matrizes  $M$ ;
- Encontrar  $M$ -obstruções minimais para outras classes dos grafos perfeitos, e até mesmo não perfeitos;
- Investigar a possibilidade de criarmos uma forma de inferirmos as  $M$ -obstruções de Matrizes de tamanho  $m$  a partir de matrizes menores para uma determinada classe de grafos.



# Referências

- [1] M. Habib e C. Paul A. Bretscher, D. G. Corneil. A simple linear time lexbfs cograph recognition algorithm. 2003.
- [2] Claude Berge. Färbung von graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade kreise starr sind. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, pages 10 – 114, 1961.
- [3] Claude Berge. Perfect graphs. *Six Papers on Graph Theory. Calcutta: Indian Statistical Institute*, pages 1–21, 1963.
- [4] Bélla Bollobás. *Modern Graph Theory*. Springer-Verlag, 1998.
- [5] Andreas Brandstädt. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics*, 152(1-3):47–54, 1996.
- [6] Andreas Brandstädt. Corrigendum. *Discrete Mathematics*, 186(1-3):295, 1998.
- [7] Raquel S. F. Bravo, Sulamita Klein, Loana Tito Nogueira, and Fábio Protti. Characterization and recognition of  $p_4$ -sparse graphs partitionable into  $k$  independent sets and  $l$  cliques. *Discrete Appl. Math.*, 159(4):165–173, February 2011.
- [8] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [9] D. G. Corneil, H. Lerchs, and L. Stewart Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3):163–174, 1981.
- [10] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart. A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM J. Comput.*, 14(4):926–934, 1985.
- [11] D.G. Corneil, H. Lerchs, and L. Stewart Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3):163 – 174, 1981.
- [12] Gabriel A. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 25, Universität Hamburg, 1961.
- [13] M. Habib e C. Paul. A simple linear time algorithm for cograph recognition. 2005.
- [14] Tomás Feder and Pavol Hell. Matrix partitions of perfect graphs. 2006.
- [15] Tomás Feder and Pavol Hell. On realizations of point determining graphs, and obstructions to full homomorphisms. *Discrete Mathematics*, 308(9):1639–1652, 2008.
- [16] Tomás Feder, Pavol Hell, and Winfried Hochstättler. *Generalized colouring (matrix partitions) of cographs.*, pages 149–167. Basel: Birkhäuser, 2007.

- 
- [17] Tomas Feder, Pavol Hell, Sulamita Klein, and Rajeev Motwani. Complexity of graph partition problems. In *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '99, pages 464–472, New York, NY, USA, 1999. ACM.
- [18] Tomas Feder, Pavol Hell, Sulamita Klein, and Rajeev Motwani. List partitions. *Proc. 31st Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, 16:464–472, 2003.
- [19] Tomas Feder, Pavol Hell, and Shekoofeh Nekooei Rizi. Chordal obstructions to m-partitions, 2005.
- [20] Tomás Feder, Pavol Hell, and Wing Xie. Matrix partitions with finitely many obstructions. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 28:371–378, 2007.
- [21] Delbert Ray Fulkerson and O. A. Gross. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific Journal of Mathematics*, 15(15):835–855, 1965.
- [22] M. R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [23] Vassilis Giakoumakis and Jean-Marie Vanherpe. On extended p4-reducible and extended p4-sparse graphs. *Theoretical Computer Science*, 180(1):269–286, 1997.
- [24] Christoph Hannebauer. *Matrix Colorings of  $P_4$ -sparse Graphs*. PhD thesis, FernUniversität in Hagen, 2010.
- [25] P. Hell, S. Klein, L. T. Nogueira, and F. Protti. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 141:185–194, 2004.
- [26] C. Hoàng. Perfect graphs. Ph.D. Thesis, McGill University (Montreal, Canadá, 1985).
- [27] Beverly Jamison and Stephan Olariu. P4-reducible graphs, a class of uniquely tree representable graphs. *Stud. Appl. Math*, 81(1):79–87, 1989.
- [28] Beverly Jamison and Stephan Olariu. Recognizing p4-sparse graphs in linear time. *SIAM Journal on Computing*, 21(2):381–406, 1992.
- [29] Beverly Jamison and Stephan Olariu. A tree representation for p4-sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 35(2):115–129, 1992.
- [30] Beverly Jamison and Stephan Olariu. Linear time optimization algorithms for p4-sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 61(2):155–175, 1995.
- [31] H. A. Jung. On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 24(2):125–133, 1978.
- [32] H. Lerchs. On cliques and kernels. 1971.
- [33] H. Lerchs. On the clique-kernel structure of graphs. 1972.
- [34] George S. Leuker. Structured breadth first search and chordal graphs. Technical report.

- 
- [35] L. Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, 2(3):253 – 267, 1972.
- [36] L Lovász. A characterization of perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 13(2):95 – 98, 1972.
- [37] Donald J. Rose and R. Endre Tarjan. Algorithmic aspects of vertex elimination. In *Proceedings of seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC '75, pages 245–254, 1975.
- [38] L. Stewart. *Cographs, a class of tree representable graphs*. Dissertation, University of Toronto, Toronto, Ontario, 1978.
- [39] D. P. Sumner. Dacey graphs. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 18:492–502, 1974.
- [40] Cláutenis Carvalho Viana.  $M_{3 \times 3}$ -obstrução minimal de cografos. Dissertation, Universidade Federal Fluminense, 2013.