

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JEANNE DE SOUZA SILVA LEITE

**Caracterização dos Cografos-(4,0) por Subgrafos
Proibidos com Restrição Externa**

NITERÓI-RJ

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JEANNE DE SOUZA SILVA LEITE

Caracterização dos Cografos-(4,0) por Subgrafos Proibidos com Restrição Externa

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização.

Orientador:
Loana Tito Nogueira, D.Sc

NITERÓI-RJ

2013

Caracterização dos Cografos-(4,0) por Subgrafos Proibidos com Restrição Externa

Jeanne de Souza Silva Leite

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização.

Aprovada por:

Profa. Dra. Loana Tito Nogueira / IC-UFF (Presidente)

Dra. Raquel de Souza Francisco Bravo / COPPE-UFRJ

Prof. Dr. Fábio Protti / IC-UFF

Prof. Dra. Sulamita Klein / COPPE-UFRJ

Niterói, 24 de julho de 2013.

Resumo

Este trabalho considera o problema da M -partição em grafos, problema este que generaliza um grande número de problemas naturais de partição em grafos e tem sido estudado por diversos pesquisadores em várias classes de grafos. No problema da M -partição é dada uma matriz simétrica M de ordem $m \times m$ definida sobre $\{0, 1, *\}$, uma M -partição de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em subconjuntos (também chamados partes) V_1, V_2, \dots, V_m tal que para quaisquer dois vértices $u \in V_i, v \in V_j$, temos $uv \in E(G)$ if $M(i, j) = 1$, e $uv \notin E(G)$ if $M(i, j) = 0$. Admitimos também a possibilidade de $i = j$; em particular, se $M(i, i) = 0$, o conjunto V_i é um conjunto independente em G e se $M(i, i) = 1$, é uma clique. No caso de entradas $M(i, j) = *$ or $M(i, i) = *$, isso significa que não há restrições entre as partes e nem nas partes, respectivamente. Para cada matriz fixa M , o problema da M -partição consiste em decidir se um grafo de entrada G admite uma M -partição. Devido à dificuldade do problema da M -partição, este trabalho considera o problema quando restrito à classe dos cografos e quando a matriz M tem uma estrutura particular, a saber, quando $m = 4$ e $M(i, i) = 0$, para $i = 1, \dots, 4$. Caracterizamos todos os cografos que admitem uma M -partição com respeito à M . Mais precisamente, nosso resultado fornece uma caracterização por subgrafos proibidos (chamadas M -obstruções) para que um dado cografo admita uma M -partição para cada possível matriz M (respeitando nossas restrições). Observe que o problema tratado neste trabalho pode também ser visto como uma variante do problema da k -coloração (para $k = 4$), onde há restrições entre cada um dos conjuntos independentes que definem a coloração.

Palavras-chave: Cografos, Partição em grafos, M -partição, M -obstrução, Cografos-(4,0).

Abstract

This work considers the matrix partition problem which generalizes a number of natural graph partition problems, and have been studied by many researchers in several standard graph classes. In the M -partition problem it is given an $m \times m$ symmetric matrix M defined over $\{0, 1, *\}$. An M -partition of a given graph G is a partition of $V(G)$ into parts V_1, V_2, \dots, V_m such that for distinct vertices $u \in V_i, v \in V_j$, we have $uv \in E(G)$ if $M(i, j) = 1$, and $uv \notin E(G)$ if $M(i, j) = 0$. Note that we admit $i = j$; in particular, if $M(i, i) = 0$, the set V_i is an independent set in G , and if $M(i, i) = 1$, it is a clique. Also note that entries $M(i, j) = *$ or $M(i, i) = *$ means that there is no restriction between parts i and j or in the part i , respectively. For each fixed matrix M , the M -partition problem consists of deciding whether or not an input graph G admits an M -partition. Given the difficulty of the M -partition problem, this work considers the problem when restricted to the class of cograph and when M has a particular structure, given by $m = 4$ and $M(i, i) = 0$, for $i = 1, \dots, 4$. We characterize cographs with admit an M -partition with respect to such matrix M . More specifically, our work gives a characterization for a cograph to admit an M -partition by forbidden subgraphs (also called M -obstructions) for each possible matrix M (respecting our restrictions). Observe that our particular problem can also be viewed as a variant of the k -coloring problem (for $k = 4$), where we can impose some restrictions between each independent set that defines the coloring.

Keywords: Cographs, Graph Partition, M -partition, M -obstruction, Cographs-(4,0)

Palavras-chave

1. Cografos
2. Partição em grafos
3. M -partição
4. M -obstrução
5. Cografos-(4,0)

Sumário

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
1.1 Organização do Trabalho	3
1.2 Definições Básicas	4
2 M-partições em Cografos	7
2.1 Cografos	7
2.2 M-Partição	10
2.3 Alguns resultados de M -partição em Cografos	12
3 Cografos-(4,0) com restrições externas	14
3.1 Casos complementares $(0, 4)^{caso}$	46
3.2 Resumo dos Casos	47
4 Conclusão	52
4.1 Trabalhos Futuros	53
Apêndice A - $M_{3 \times 3}$-obstrução minimal de cografos	54
A.1 Caracterização dos cografos- (k, l) M -particionáveis de ordem no máximo três.	54
A.2 Casos $(3, 0)$ e $(4, 0)$ equivalentes	68

Lista de Figuras

2.1	Todos os cografos com até 4 vértices.	8
2.2	Exemplo de um cografo G e sua co-árvore $T(G)$	10
2.3	Matriz de Blocos.	12
3.1	Casos equivalentes.	15
3.2	Partições que se reduzem ao caso $(2, 0)^1$	15
3.3	Partições que se reduzem ao caso $(2, 0)^*$	16
3.4	Partição que se reduz ao caso $(2, 0)^0$	16
3.5	Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{*,*,*}$	16
3.6	Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{1,1,1}$	16
3.7	Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{1,*,*}$	16
3.8	Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{*,1,1}$	17
3.9	Possíveis M -partições em matrizes de ordem 4 não redutíveis e não equivalentes entre si.	18
3.10	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^1$	18
3.11	M -partição- $(4, 0)^1$	19
3.12	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^2$	19
3.13	M -partição- $(4, 0)^2$	19
3.14	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^3$	20
3.15	M -partição- $(4, 0)^3$	21
3.16	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^4$	22
3.17	M -partição- $(4, 0)^4$	22
3.18	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^5$	23

3.19	M -partição- $(4, 0)^5$	23
3.20	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^6$	24
3.21	M -partição $(4, 0)^6$	24
3.22	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^7$	25
3.23	M -partição- $(4, 0)^7$	25
3.24	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^8$	26
3.25	M -partição- $(4, 0)^8$	27
3.26	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^9$	27
3.27	M -partição- $(4, 0)^9$	27
3.28	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{10}$	28
3.29	M -partição- $(4, 0)^{10}$	28
3.30	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{11}$	29
3.31	M -partição- $(4, 0)^{11}$	29
3.32	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{12}$	30
3.33	M -partição- $(4, 0)^{12}$	30
3.34	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{13}$	31
3.35	M -partição- $(4, 0)^{13}$	31
3.36	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{14}$	33
3.37	M -partição- $(4, 0)^{14}$	33
3.38	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{15}$	33
3.39	M -partição- $(4, 0)^{15}$	34
3.40	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{16}$	35
3.41	M -partição- $(4, 0)^{16}$	35
3.42	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{17}$	37
3.43	M -partição- $(4, 0)^{17}$	37
3.44	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{18}$	38

3.45	M-partição- $(4, 0)^{18}$.	38
3.46	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{19}$.	39
3.47	M-partição- $(4, 0)^{19}$.	39
3.48	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{20}$.	41
3.49	M-partição- $(4, 0)^{20}$.	41
3.50	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{21}$.	43
3.51	M-partição- $(4, 0)^{21}$.	43
3.52	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{22}$.	45
3.53	M-partição- $(4, 0)^{22}$.	45
3.54	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{10}$.	45
3.55	M-partição- $(4, 0)^{23}$.	46
3.56	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{24}$.	46
3.57	M-partição- $(4, 0)^{24}$.	46
3.58	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{25}$.	47
3.59	M-partição- $(4, 0)^{25}$.	47
A.1	Obstrução minimal do caso $(2, 0)^*$.	54
A.2	M-partição- $(2, 0)^*$.	55
A.3	Obstruções minimais do caso $(2, 0)^1$.	55
A.4	M-partição- $(2, 0)^1$.	55
A.5	Obstruções minimais do caso $(1, 1)^*$.	55
A.6	M-partição- $(1, 1)^*$.	56
A.7	Obstruções minimais do caso $(1, 1)^1$.	56
A.8	M-partição- $(1, 1)^1$.	56
A.9	Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,1,1}$.	56
A.10	M-partição- $(3, 0)^{1,1,1}$.	57
A.11	Obstrução minimal do caso $(3, 0)^{*,*,*}$.	57

A.12 M-partição- $(3, 0)^{*,*,*}$	57
A.13 Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{*,1,1}$	57
A.14 M-partição- $(3, 0)^{*,1,1}$	58
A.15 Obstrução minimal do caso $(3, 0)^{1,*,*}$	58
A.16 M-partição- $(3, 0)^{1,*,*}$	58
A.17 Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,0,0}$	58
A.18 M-partição- $(3, 0)^{1,0,0}$	59
A.19 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,*,*}$	59
A.20 M-partição- $(2, 1)^{*,*,*}$	59
A.21 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,1}$	59
A.22 M-partição- $(2, 1)^{*,1,1}$	60
A.23 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,1}$	60
A.24 M-partição- $(2, 1)^{1,1,1}$	60
A.25 M-partição- $(2, 1)^{*,1,0}$	60
A.26 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,0}$	61
A.27 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,*}$	61
A.28 M-partição- $(2, 1)^{1,*,*}$	62
A.29 Obstruções minimais do caso $(1, 2)^{*,*,0}$	62
A.30 M-partição- $(1, 2)^{*,*,0}$	63
A.31 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,0,0}$	63
A.32 M-partição- $(2, 1)^{1,0,0}$	63
A.33 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,0,0}$	64
A.34 M-partição- $(2, 1)^{*,0,0}$	64
A.35 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,0}$	64
A.36 M-partição- $(2, 1)^{1,1,0}$	64
A.37 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,*}$	65

A.38 M-partição- $(2, 1)^{1,1,*}$	65
A.39 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,*}$	65
A.40 M-partição- $(2, 1)^{*,1,*}$	65
A.41 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{0,1,0}$	66
A.42 M-partição- $(2, 1)^{0,1,0}$	66
A.43 M-partição- $(2, 1)^{1,*,0}$	66
A.44 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,0}$	67
A.45 Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,*,0}$	67
A.46 M-partição- $(2, 1)^{*,*,0}$	68

Lista de Tabelas

3.1	Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^1$, $(4, 0)^2$, $(4, 0)^5$, $(4, 0)^9$ e $(4, 0)^{25}$. . .	47
3.2	Subgrafos proibidos para o casos $(4, 0)^3$	48
3.3	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^4$	48
3.4	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^6$	48
3.5	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^7$	48
3.6	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^8$	49
3.7	Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{10}$, $(4, 0)^{23}$ e $(4, 0)^{24}$	49
3.8	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{11}$	49
3.9	Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{12}$ e $(4, 0)^{14}$	49
3.10	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{13}$	50
3.11	Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{15}$, $(4, 0)^{16}$, $(4, 0)^{17}$ e $(4, 0)^{21}$	50
3.12	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{18}$	50
3.13	Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{19}$	50
3.14	Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{20}$ e $(4, 0)^{22}$	51
A.1	Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{1,*,*}$, $(4, 0)^1$, $(4, 0)^2$, $(4, 0)^5$, $(4, 0)^9$ e $(4, 0)^{25}$	68
A.2	Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{1,0,0}$ e $(4, 0)^8$	69
A.3	Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{*,1,1}$, $(4, 0)^{10}$, $(4, 0)^{23}$ e $(4, 0)^{24}$	69
A.4	Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{*,*,*}$, $(4, 0)^{12}$ e $(4, 0)^{14}$	69

Capítulo 1

Introdução

A teoria dos grafos está se tornando cada vez mais importante devido à sua aplicação em diversas áreas da matemática, ciência e tecnologia. Um problema bastante estudado em Teoria dos Grafos e com diversas aplicações práticas é o problema da k -coloração. O estudo de coloração de grafos surgiu do famoso problema das quatro cores e tem sido uma das principais áreas da teoria dos grafos por mais de 50 anos. Neste problema é dado um grafo G e um inteiro positivo k e o objetivo consiste em verificar se os vértices de G podem ser rotulados (coloridos) com no máximo k rótulos (cores) de forma que vértices adjacentes tenham rótulos (cores) distintos. Esse é um problema NP -completo para $k \geq 3$, conforme mostrado em [16] e polinomial, caso contrário.

É fácil ver que o problema da k -coloração pode ser visto como um problema de particionamento em grafos onde, dado um grafo G e um inteiro positivo k , objetiva-se determinar se o conjunto de vértices de G pode ser particionado em (no máximo) k conjuntos independentes (i.e., nenhum vértice no conjunto é adjacente a outro vértice do mesmo conjunto).

Em geral, muitos problemas combinatórios podem ser vistos como um problema de partição em grafos onde, dado um grafo G , deseja-se particionar o conjunto de vértices de G em subconjuntos satisfazendo certas restrições internamente (pode-se, por exemplo, exigir que um determinado conjunto seja um conjunto independente ou uma clique) e externamente (pode-se exigir que dois conjuntos sejam completamente não adjacentes (nenhum vértice de um conjunto é adjacente a qualquer vértice do outro) ou completamente adjacentes (cada vértice de um conjunto é adjacente a todos os vértices do outro)).

Outro problema bastante conhecido de particionamento de grafos é verificar se um dado grafo G é split, ou equivalentemente, verificar se o conjunto dos vértices de G pode

ser particionado em dois subconjuntos, dos quais um é independente e o outro é uma clique. O grafo split foi considerado inicialmente por Földes e Hammer [15], em 1977. O reconhecimento de grafos split pode ser realizado em tempo linear [18].

Brandstädt propôs uma generalização dos grafos split, definindo uma nova classe de grafos, a classe dos *grafos*-(k, ℓ) como sendo aquela formada pelos grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes e ℓ cliques. Brandstädt em [5, 6, 2] considerou em particular as classes de grafos-(2, 1), grafos-(1, 2) e grafos-(2, 2), apresentando algoritmos polinomiais para reconhecê-las. Feder *et al.* em [32] também apresentaram algoritmos polinomiais para o reconhecimento destas classes que surgiram como sub-produto de algoritmos de partição em subgrafos densos e esparsos. Por outro lado, sabe-se que reconhecer grafos-(k, ℓ) para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$ é *NP*-Completo [5, 6]. Como por exemplo, podemos considerar a classe dos grafos-($k, 0$), que corresponde novamente ao problema de reconhecer se um dado grafo é k -colorível.

Com o intuito de reconhecer grafos-(k, ℓ), para $k \geq 3$ ou $\ell \geq 3$, alguns autores estudaram o problema quando restrito à subclasses de grafos. Hell, Klein, Nogueira e Protti, em [25], apresentaram uma caracterização e um algoritmo de reconhecimento com complexidade $O(n(n + m))$ para os grafos cordais-(k, ℓ). Raquel *et al.* em [28, 27, 29] também apresentou uma caracterização, bem como um algoritmo linear, para as classes dos cografos, dos grafos P_4 -esparsos e dos grafos P_4 laden estendidos.

Um problema ainda mais geral que o problema da k -coloração e que também generaliza os grafos-(k, ℓ) é o problema da M -partição que foi introduzido por Feder *et al.* e apresentado em [32, 12] como segue: Seja M uma matriz simétrica fixa de ordem $k \times k$ definida sobre $\{0, 1, *\}$. Uma M -partição do grafo G é uma partição do conjunto de vértices $V(G)$ em k subconjuntos (também chamados partes) A_1, A_2, \dots, A_k , tais que A_i é um conjunto independente se $M(i, i) = 0$, ou completo se $M(i, i) = 1$ (sem restrição se $M(i, i) = *$) e tal que A_i e A_j são completamente não adjacentes se $M(i, j) = 0$, ou completamente adjacentes se $M(i, j) = 1$ (sem restrição se $M(i, j) = *$).

O problema da M -partição objetiva determinar se um dado grafo G admite uma M -partição.

Em [31], Feder, Hell e Hochstättler mostraram que todos os problemas de partição (M -partição) quando restritos à classe dos cografos admitem algoritmos polinomiais e caracterizações por subgrafos induzidos proibidos. Em particular, eles limitam o tamanho da maior estrutura proibida minimal para os cografos-(k, ℓ). Em [11], Feder e Hell apresentaram um estudo ainda mais geral sobre problemas de partição (M -partição) quando

restritos à classe dos grafos perfeitos. Alguns outros trabalhos foram considerados nesse problema e podemos citar: [24, 10, 33, 34].

Este trabalho considera o problema da M -partição quando restrito à classe dos cografos e quando M é uma matriz de ordem 4 com diagonal nula. Consideramos todas as possíveis matrizes que satisfaçam a estes critérios. Portanto, M é uma matriz de ordem 4 onde $M(i, i) = 0$, para $i = 1, \dots, 4$ e, para $i \neq j$, $M(i, j) \in \{0, 1, *\}$. Nosso resultado, apresentando no capítulo 3 desta dissertação caracteriza os cografos que podem ser particionados em 4 conjuntos independentes e que respeitam as condições externas impostas pela matriz M . Mais precisamente, nosso resultado fornece uma caracterização por subgrafos proibidos para que um cografo admita tal M -partição. Tais subgrafos proibidos para uma determinada matriz M são também chamados de M -obstruções. Nosso objetivo é encontrar M -obstruções minimais dos cografos para a matriz M (conforme definida anteriormente).

Na literatura [13, 20, 35] é possível encontrar trabalhos que determinam as M -obstruções minimais para algumas subclasses dos grafos perfeitos, quando M também apresenta uma estrutura especial. Em particular, em [13] é apresentada uma caracterização por subgrafos proibidos para matrizes menores que 4. Além disso, em [20, 35] é apresentada uma caracterização dos cografos para matrizes de ordem no máximo três.

A próxima seção apresenta a organização deste trabalho.

1.1 Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. No Capítulo 1, são dadas as definições e notações utilizadas no decorrer da dissertação. No Capítulo 2, descrevemos mais detalhadamente a classe dos cografos e apresentamos algumas de suas características gerais e abordaremos o problema da M -partição. No Capítulo 3, apresentamos uma caracterização por subgrafos proibidos para os Cografos- (k, l) , i.e, caracterizamos os cografos que admitem uma M -partição para todas as matrizes de ordem $k = 4$ e diagonal principal nula. Finalmente, concluímos esse trabalho no Capítulo 4 fazendo algumas reflexões sobre trabalhos futuros.

Na próxima seção são definidos alguns conceitos básicos da teoria dos grafos e notações adotadas ao longo deste trabalho.

1.2 Definições Básicas

Neste capítulo, introduzimos definições básicas e notações que são necessárias para a compreensão desse texto. As definições e notações adotadas nesta seção foram retiradas das seguintes fontes de referência: [16, 17]

Definição 1.1 Um **grafo simples** é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito não-vazio de **vértices**, denotado por $V(G)$ e E é um conjunto de pares não-ordenados de vértices distintos, chamados **arestas**, e denotado por $E(G)$.

A **cardinalidade** do conjunto de vértices é denotada por n , ou $|V|$, e a do conjunto de arestas por m , ou $|E|$.

Um grafo G é dito **trivial** se $|V(G)| = 1$, isto é G possui um único vértice.

Um vértice u é **adjacente** a outro vértice v em G se $(u, v) \in E(G)$. Neste caso, dizemos que u e v são **vizinhos** em G , e que a aresta $e = (u, v)$ é **incidente** a u e a v , ou que tem **extremos** u e v (usamos também a notação uv para expressar que u é adjacente a v). Denotamos por $N(u)$ o conjunto de vértices adjacentes a u em G e tal conjunto é chamado de **vizinhança** de u , e por $N[u]$ o conjunto $N(u) \cup \{u\}$ é chamado de **vizinhança fechada** de u .

O **grau** de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes ao vértice v .

Observação 1.1 Neste trabalho, iremos utilizar a denominação grafos para denotar o que definiremos como grafos simples.

Observação 1.2 Utilizaremos a notação $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$ para denotarmos a cardinalidade de $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente. Definimos as arestas como sendo pares não-ordenados, mas serão indicadas como sendo pares ordenados, isto é, (u, v) ao invés de $\{u, v\}$.

Definição 1.2 Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Dado um conjunto de vértices $Y \subseteq V(G)$, $Y \neq \emptyset$, o **subgrafo induzido** por Y , denotado por $G[Y]$ é o subgrafo H de G tal que $V(H) = Y$ e $E(H)$ é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em Y .

Observação 1.3 Neste trabalho assumiremos que todos os termos subgrafo que usarmos refere-se a noção de subgrafo induzido.

Definição 1.3 Um **caminho** num grafo G é um passeio $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ onde os v_i 's são vértices (dois a dois distintos), e $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, $1 \leq i \leq k-1$.

Definição 1.4 Uma **corda** em P é uma aresta que liga dois vértices não-consecutivos de P . Um **caminho induzido** é um caminho sem cordas, e denotado por P_k o caminho induzido por k vértices. Dizemos que um grafo é **P_k -free** quando não contém um P_k como subgrafo.

Definição 1.5 Um passeio v_1, \dots, v_k, v_{k+1} , é denominado **ciclo** quando v_1, \dots, v_k for um caminho, $k \geq 3$ e $v_1 = v_{k+1}$.

Definição 1.6 Um grafo G é dito **cíclico** quando G contém um ciclo como subgrafo. Caso contrário, dizemos que G é **acíclico**.

Definição 1.7 Um conjunto S é **maximal (minimal)** em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P , e todo conjunto S' que contém propriamente S (que está contido propriamente em S) não satisfaz P .

Definição 1.8 Um grafo G é **completo** se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices.

Definição 1.9 Um conjunto de vértices I de um grafo G é um **conjunto independente** se $G[I]$ é um grafo sem arestas. Um conjunto independente I é dito **maximal** se para qualquer conjunto independente I' tal que $I \subseteq I'$ então $I = I'$. Definimos por $\alpha(G)$ o tamanho do **conjunto independente máximo**, isto é:

$$\alpha(G) = \max \{ |V'| \mid V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é um conjunto independente de } G \}.$$

Definição 1.10 Um conjunto de vértices C de um grafo G é uma **clique** se $G[C]$ é um grafo completo. Denotamos por K_k uma clique de k vértices. Uma clique C é dita **maximal** se para qualquer clique C' tal que $C \subseteq C'$ então $C = C'$. Denotamos por $\omega(G)$ o **tamanho da clique máxima**, isto é:

$$\omega(G) = \max \{ |V'| \mid V' \subseteq V \text{ e } V' \text{ é uma clique de } G \}$$

Definição 1.11 O **complemento** de um grafo G , denotado por \overline{G} , é o grafo que possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices são adjacentes em \overline{G} se e somente se não são adjacentes em G .

Definição 1.12 Uma **coloração** de um grafo G é uma partição de $V(G)$ onde cada classe da partição é um conjunto independente. Uma **k -coloração** é uma partição de $V(G)$ em k classes. O **número cromático** de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual existe uma k -coloração de G . Neste caso, dizemos que o grafo G é **k -cromático** ou **k -colorível**.

Definição 1.13 Um grafo G é **perfeito** quando seu número cromático é igual ao tamanho da clique máxima, isto é, $\chi(G) = \omega(G)$. Temos uma caracterização de extrema importância para os grafos perfeitos conjecturada por Berge [4] em 1961 e provada em 2002[22] por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas e publicada em 2006[23] por eles, na qual diz que G é perfeito se e somente se G é um grafo **berge**, isto é, G e o seu complemento, \overline{G} , não admitem ciclo ímpar induzido maior ou igual a 5.

Definição 1.14 Um grafo é dito **bipartido** quando seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos V_1, V_2 , tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2 , isto é, podemos particionar $V(G)$ em dois conjuntos independentes. Um grafo é dito **bipartido completo** se é bipartido e possui uma aresta para cada par de vértices v_1, v_2 , sendo $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Denotamos por $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo, onde $|V_1| = n$ e $|V_2| = m$.

Definição 1.15 Um grafo G é **conexo** se para todo par de vértices distintos v e w de G existe um caminho de v a w . Caso contrário, G é dito **desconexo**. Uma **componente conexa** de G é um subgrafo maximal conexo de G .

Capítulo 2

M-partições em Cografos

Este capítulo tem como objetivo definir o problema que será abordado neste trabalho: o problema da M -partição em cografos. Em particular, iniciamos definindo a classe dos cografos apresentando algumas de suas características estruturais, essenciais para o desenvolvimento dessa dissertação. Em seguida, definimos o problema da M -partição e apresentamos alguns dos resultados da literatura no que diz respeito ao problema da M -partição em cografos e em outras classes de grafos.

2.1 Cografos

Na década de 70, vários pesquisadores descobriram os cografos de forma independente. Como consequência deste fato, surgiram diferentes definições e nomes para a classe. Jung[19] usou o termo grafos D^* , Seinsche definiu como sendo o grafo que não contém caminho induzido com quatro vértices como subgrafo induzido (P_4), Summer [30] como grafos HD (*ou Hereditary Dacey*) e Corneil[7] considerou como sendo os grafos redutíveis por complemento.

Os cografos são muito pesquisados na literatura, principalmente no que se refere aos problemas de particionamento. O interesse por cografos deve-se ao fato de que, graças às suas propriedades estruturais, muitos problemas podem ser resolvidos mais facilmente para essa classe[7]. Alguns problemas que são difíceis de serem resolvidos para grafos em geral, admitem algoritmos mais simples, e muitas vezes lineares, para cografos. Como exemplo, podemos citar o problema NP -completo da k -coloração. Este pode ser resolvido em tempo linear para a classe dos cografos [9].

Definição 2.1 [21] *Os cografos são definidos recursivamente através da seguinte definição formal:*

- (i) *O grafo trivial (K_1) é um cografo;*
- (ii) *Se G_1, \dots, G_k são cografos, então a sua união $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ também é cografo;*
- (iii) *Se G é cografo, então \overline{G} também é cografo.*

A Figura 2.1 mostra um exemplo de todos os possíveis cografos com até 4 vértices:

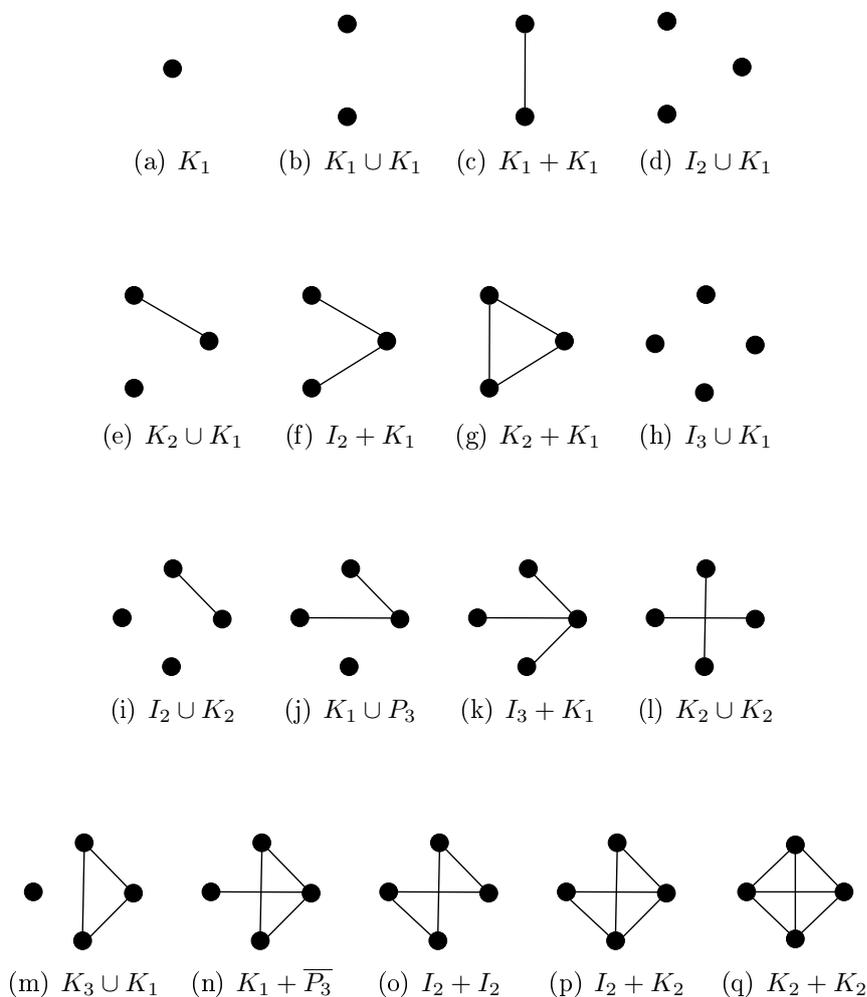


Figura 2.1: Todos os cografos com até 4 vértices.

Observe que na Figura 2.1 estão contemplados todos os cografos com até quatro vértices e que para todo grafo H desta figura, seu complemento \overline{H} também está contemplado nela. Por exemplo, o grafo 2.1(j) é o complemento do grafo 2.1(n).

Além da definição de cografos, o seguinte teorema apresentado por Corneil, Lerchs e Bulingham [8] fornece uma caracterização dos cografos por subgrafos proibidos e estabelece uma característica importante dos cografos com relação à sua conectividade.

Teorema 2.1 [8] *Dado um grafo G , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) G é cografo;
- (ii) G não contém um P_4 como subgrafo induzido;
- (iii) O complemento de todo subgrafo conexo não trivial de G é desconexo.

Corolário 2.1 *Um grafo G é um cografo se e somente se para todo subgrafo H de G com pelo menos dois vértices, exatamente uma das condições abaixo é satisfeita:*

- (i) H é desconexo;
- (ii) \overline{H} é desconexo;

A seguinte definição apresentada em [21] afirma que os cografos podem ser representados por uma árvore de decomposição única, denominada *co-árvore*.

Definição 2.2 *Uma co-árvore $T(G) = (V_{T(G)}, E_{T(G)})$ é uma árvore que representa um grafo $G = (V, E)$, onde os nós internos da co-árvore $T(G)$ são rotulados com \cup ou $+$ e suas folhas são exatamente os vértices de G . Dois vértices u e v de G são adjacentes se e somente se o menor ancestral comum entre u e v em $T(G)$ for rotulado com $+$, caso contrário, está rotulado com \cup .*

Corneil et al. [7] provaram que um grafo G é um cografo se e somente se tem uma representação em uma co-árvore $T(G)$. Um grafo pode ser construído a partir de sua co-árvore em tempo polinomial atribuindo a cada nó $t \in V(G)$ um grafo G_t :

- Para cada folha $v \in V(G)$, o grafo G_v é um grafo de um único vértice $G_v = (v, \emptyset)$ contendo somente o vértice folha em si.
- Para um nó interno $t \in V_{T(G)} \setminus V$ rotulado com \cup , o grafo G_t é a união disjunta $G_{u_1} \cup \dots \cup G_{u_n}$ dos grafos de seus n nós filhos u_1, \dots, u_n em $T(G)$.

- Para um nó interno $t \in V_{T(G)} \setminus V$ rotulado com $+$, o grafo G_t é a junção $G_{u_1} + \dots + G_{u_n} := (V_{u_1} \cup \dots \cup V_{u_n}, E_{u_1} \cup \dots \cup E_{u_n} \cup \{x \bar{x} y \mid 1 \leq i, j \leq n \text{ com } i \neq j \text{ e } x \in V_{u_i}, y \in V_{u_j}\})$ dos grafos de seus n nós filhos u_1, \dots, u_n em $T(G)$.

A figura 2.2 mostra um cografo e sua co-árvore.

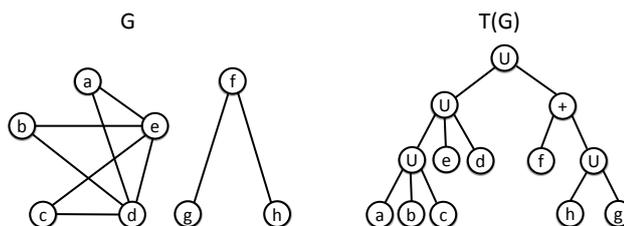


Figura 2.2: Exemplo de um cografo G e sua co-árvore $T(G)$.

O grafo G_r com raiz $r \in V_{T(G)}$ de $T(G)$ é o cografo que $T(G)$ representa. Corneil et al. [9] provaram que uma co-árvore única de um cografo pode ser construída em tempo linear. Bretscher et al. [3] desenvolveram um algoritmo de reconhecimento de cografos mais fácil que é executado em tempo linear.

Como referência clássica para cografos, sugerimos o paper de Corneil et. al [8], e o livro de Brandstädt et al. [1] para mais detalhes e referências atualizadas.

2.2 M-Partição

Esta seção considera um problema bastante estudado atualmente: o problema da M -partição, que generaliza diversos problemas. Como exemplo, podemos citar o famoso problema da k -coloração que consiste em verificar se o conjunto de vértices de um dado grafo G pode ser particionado em k conjuntos independentes (permitimos que alguns desses conjuntos sejam vazios), ou equivalentemente, verificar se o conjunto de vértices de G pode ser colorido com no máximo k cores de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes. Um outra generalização deste último problema e um caso particular do primeiro, é o problema dos grafos- (k, l) que consiste em verificar se o conjunto de vértices de G pode ser particionado em no máximo k conjuntos independentes e no máximo l cliques (não necessariamente maximais). É fácil ver o caso em que $l = 0$ correspondente ao problema da k -coloração.

O problema da M -partição foi inicialmente definido por Feder et.al [32] e desde então, vários outros trabalhos tem sido desenvolvidos nesse tema [28, 27, 29, 31, 12, 13, 14, 33,

11, 25].

Ao discutir classes de problemas de partição, padrões são usados para descrever as exigências de uma partição. Em particular, os padrões que examinaremos especificam problemas de partição em que o conjunto de vértices de um dado grafo são particionados em conjuntos independentes, ou clique, ou alguma combinação de conjuntos independentes e cliques. Além disso, podemos exigir que duas partes de vértices na partição sejam completamente adjacentes, ou completamente não-adjacentes. Formalmente, utilizam-se matrizes para descrever tais padrões.

Definição 2.3 [32] *Seja M uma matriz simétrica fixa de ordem $k \times k$ definida sobre $\{0, 1, *\}$. Uma M -partição do grafo G é uma partição do conjunto de vértices $V(G)$ em m subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_m , tais que:*

- se $M(i, i) = 0$, então, V_i é um conjunto independente,
- se $M(i, i) = 1$, então, V_i é uma clique,
- Se $M(i, i) = *$, então, não há nenhuma restrição sobre as arestas entre os vértices,
- se $M(i, j) = 0$, então, V_i e V_j são completamente não adjacentes,
- se $M(i, j) = 1$, então, V_i e V_j são completamente adjacentes, e
- Se $M(i, j) = *$, então, não há nenhuma restrição sobre as arestas entre V_i e V_j .

Para uma dada matriz fixa M , o problema da M -partição consiste em determinar se um dado grafo G admite uma M -partição.

Um grafo G não admite uma M -partição é também chamado de uma M -obstrução. Além disso, se G é uma M -obstrução mas ao apagar qualquer vértice de G resulta num grafo M -particionável, então G é uma M -obstrução minimal.

Observe que podemos assumir que nenhum elemento na diagonal principal é asterisco, caso contrário o problema seria trivial. Toda matriz sem $*$ na diagonal pode ser escrita na forma de blocos. É possível permutarmos linhas e colunas da matriz de forma que as k primeiras linhas tenham 0 na diagonal principal e as l últimas linhas tenham 1 na diagonal principal. Neste caso, a matriz pode ser considerada como tendo quatro blocos: uma matriz diagonal A de ordem $k \times k$ com diagonal nula, uma matriz B de ordem $l \times l$ com diagonal de 1's, e uma matriz C de ordem $k \times l$ de elementos fora da diagonal de M e sua transposta. A Figura 2.3 representa uma matriz de bloco.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \dots \\ k \end{array} \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & C \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{c} k+1 \\ k+2 \\ \dots \\ k+l \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \\ \hline C^T & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{array} \end{array} \right. \\ \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right) \end{array}$$

Figura 2.3: Matriz de Blocos.

Dizemos que uma matriz M é uma *matriz constante* se os elementos fora da diagonal principal de A são todos iguais, digamos a , os elementos fora da diagonal principal de B são todos iguais, digamos b , e todas as entradas de C são iguais, digamos c . Neste caso, também dizemos que M é uma matriz bloco- (a, b, c) . Observe que podemos assumir que $a \neq 0$ e $b \neq 1$, caso contrário, poderíamos diminuir k ou l .

Se a matriz M é uma matriz de bloco- $(*, *, *)$, então uma M -partição de G consiste numa partição de G em k conjuntos independentes e l cliques. Tais partições foram introduzidas por Brandstädt em [5]. Grafos que admitem tal partição são chamados *grafos- (k, l)* . Observe que nesse tipo de partição, nenhuma restrição é feita entre as partes, apenas nas partes. Grafos- (k, l) foram estudados em [25, 26] para a classe dos grafos cordais, em [11] para a classe dos grafos perfeitos, em [27, 24] para a classe dos cografos e P_4 -esparsos e em [28] para a classe dos grafos P_4 -laden estendidos.

A seguir, apresentamos alguns resultados no que diz respeito ao problema da M -partição quando restrito à classe dos cografos.

2.3 Alguns resultados de M -partição em Cografos

Em [31], Feder *et al.* mostraram que todos os problemas de M -partição para cografos admitem algoritmo polinomial, além de algumas caracterizações por subgrafos proibidos. Na verdade, eles apresentaram um limite no tamanho do maior cografo que é uma M -obstrução minimal.

Teorema 2.2 [31] *Seja M uma matriz de bloco- $(*, *, *)$. Então cada M -obstrução minimal de um cografo é $(k + 1)$ -colorível e particionável em $l + 1$ cliques.*

Corolário 2.2 [31] *Seja M uma matriz de bloco- $(*,*,*)$. Então cada M -obstrução minimal de um cografo possui exatamente $(k+1)(l+1)$ vértices.*

Corolário 2.3 [31] *Se M é uma matriz constante e G uma M -obstrução minimal que é cografo, então G possui, no máximo, $(k+1)(l+1)$ vértices.*

Um resultado bem interessante é a classe de uniões de cliques, já que a mesma é uma subclasse dos cografos (enquanto os cografos são os grafos que não contém P_4 como subgrafo induzido, a classe de uniões de cliques são os que não contém P_3 como subgrafo induzido). Ainda considerando o problema da M -partição sem listas, Feder *et al.* [31] apresentaram uma caracterização por subgrafos proibidos para a classe de uniões de cliques.

Teorema 2.3 [31] *Seja M uma matriz $m \times m$, que possui apenas 0's na diagonal principal, apenas um 1 fora da diagonal e * em qualquer outra posição fora da diagonal. Então M possui apenas duas obstruções minimais que são cografos, isto é, K_{m+1} e $K_m \cup K_{m-1}$.*

No próximo Capítulo apresentamos uma prova alternativa desse resultado quando $m = 4$. Vale ainda mencionar que os resultados do próximo Capítulo caracterizam exatamente os cografos em termos de M -obstruções minimais quando M é uma matriz de ordem 4 com diagonal nula e constituem os resultados desse trabalho.

Capítulo 3

Cografos-(4,0) com restrições externas

Neste capítulo, consideramos o problema da M -partição para matrizes quadradas M de ordem $m = 4$ com diagonal nula e apresentamos uma caracterização dos cografos M -particionáveis em termos de M -obstruções, i.e., dado um cografo G e uma matriz simétrica M de ordem quatro com diagonal nula, nosso resultado exprime quando um cografo G admite uma M -partição.

Em [35] foram apresentadas as M -obstruções para os cografos para matrizes M de ordem no máximo três. Neste trabalho consideramos o problema da 4-coloração com restrições externas, ou no contexto de M -partição, dados um cografo e uma matriz M de ordem 4 com diagonal nula desejamos verificar se o dado cografo admite uma M -partição, ou equivalentemente, se pode ser particionado em quatro conjuntos independentes. Observe que permitimos a possibilidade de restrições externa entre as partes (conjuntos independentes). Neste caso, os elementos fora da diagonal principal podem ser *, 0 ou 1. Lembremos que se $M_{i,j} = 0$ então as partes i e j devem ser completamente não adjacentes. Se $M_{i,j} = 1$ então as partes i e j devem ser completamente adjacentes. E, por fim, se a parte $M_{i,j} = *$, não há restrições entre as partes. A seguir, consideramos as partições oriundas de todas possíveis matrizes de ordem quatro com diagonal nula.

Nosso problema de M -partição também pode ser visto no contexto de grafos-(k, l). Um grafo é dito (k, l) se seu conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes e l cliques (não há restrições entre as partes). No caso da nossa matriz M , teremos que reconhecer grafos (4, 0) com possíveis restrições externas. Usaremos a notação $(k, l)^{\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^k, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^k\}}$, $i = 1, \dots, k - 1$ para representar uma M -partição em que M é uma matriz com k elementos nulos na diagonal principal, ou seja, uma partição em k conjuntos independentes: X_1, X_2, \dots, X_k , onde cada a_i^j representa a restrição externa

entre os conjuntos X_i e X_j . No caso particular em que temos apenas duas partes, por exemplo, $(2,0)$, usamos a notação $(2,0)^i$, $i = 0, 1, *$ para representar nenhuma aresta entre as duas partes, todas as arestas entre as duas partes ou sem restrição entre as duas partes, respectivamente.

Observe que algumas matrizes são equivalentes, i.e., correspondem a um mesmo problema de partição. Figura 3.1 contempla esta situação.

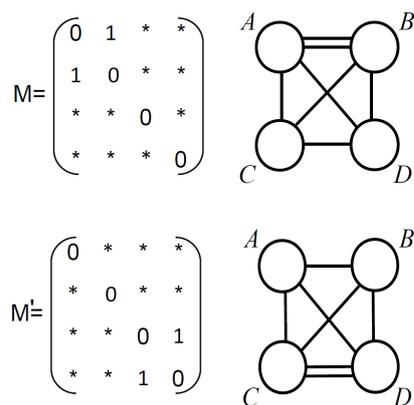


Figura 3.1: Casos equivalentes.

Observe ainda que algumas matrizes representam problemas de partição que podem ser reduzidos a casos menores, i.e., a problemas de partição de matrizes de ordem menor que quatro. Esses casos são ilustrados nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 e não serão considerados aqui. Caracterizações desses casos para cografos podem ser encontradas em [35].

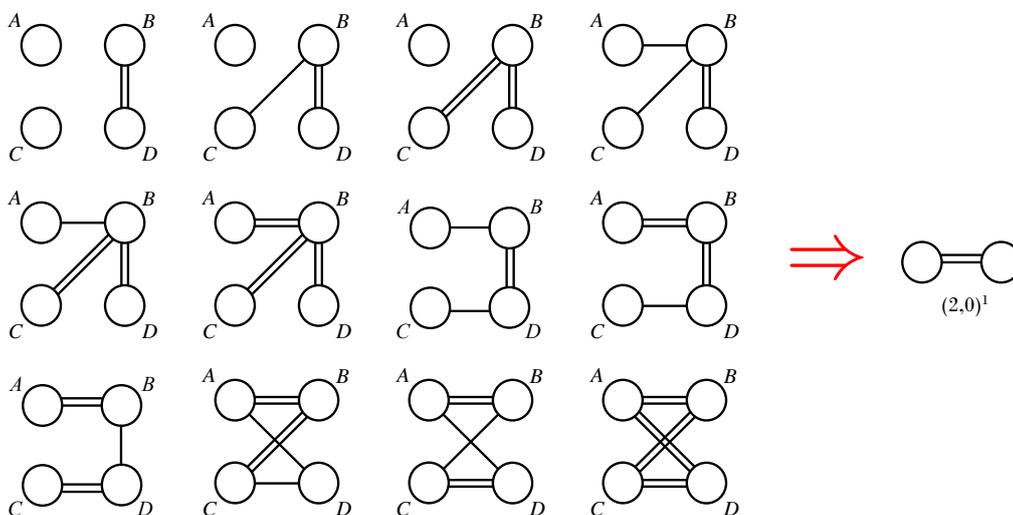


Figura 3.2: Partições que se reduzem ao caso $(2,0)^1$.

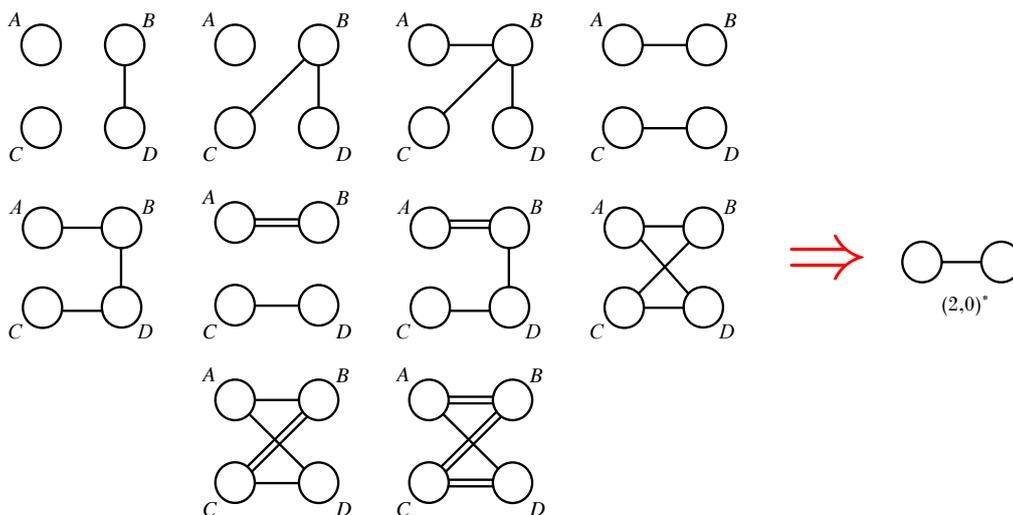


Figura 3.3: Partições que se reduzem ao caso $(2, 0)^*$.

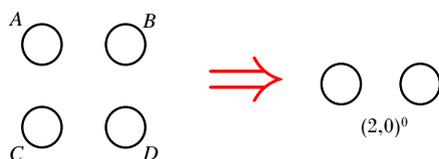


Figura 3.4: Partição que se reduz ao caso $(2, 0)^0$.

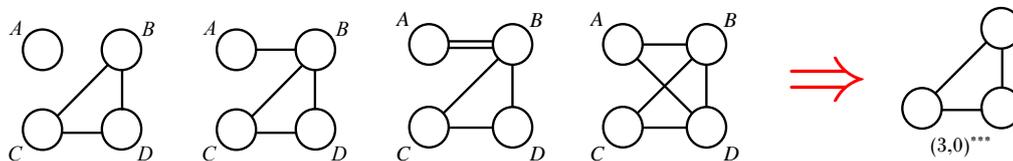


Figura 3.5: Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{*,*,*}$.

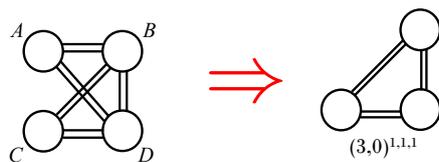


Figura 3.6: Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{1,1,1}$.

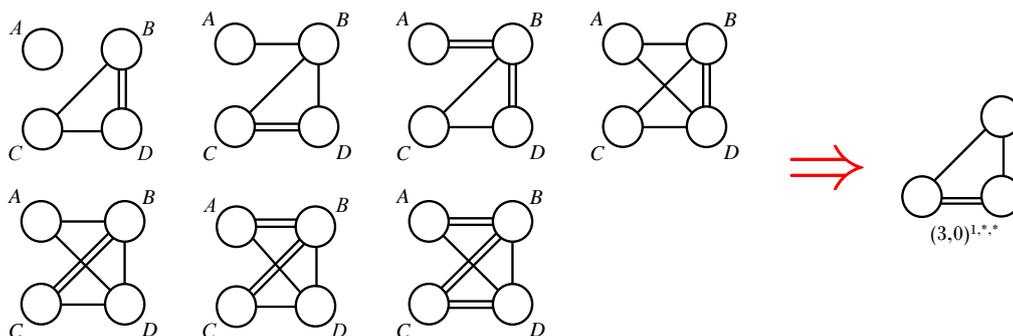


Figura 3.7: Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{1,*,*}$.

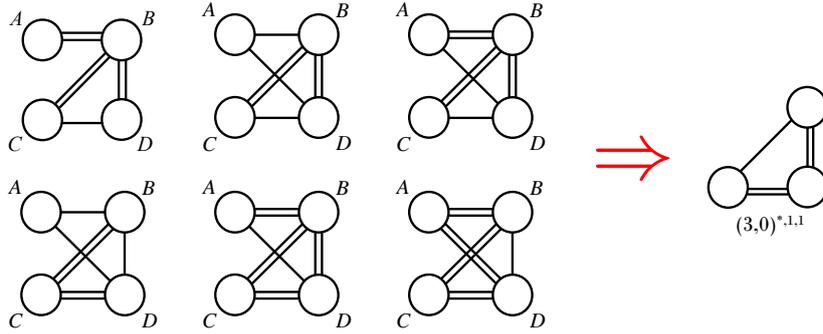


Figura 3.8: Partições que se reduzem ao caso $(3, 0)^{*,1,1}$.

Por fim, a Figura 3.9 representa todos os casos de matrizes de ordem quatro a menos de reduções e equivalências. Os resultados seguintes, caracterizam cada um dos casos apresentados na Figura 3.9 através de obstruções minimais.

Teorema 3.1 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^1$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.10 como subgrafo induzido.*

Prova.

Figura 3.11 representa a M -partição $(4, 0)^1$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.10 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4, 0)^1$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4, 0)^1$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4, 0)^1$, ou seja, para todo vértice $v \in V(G)$, $G - v$ é um grafo $(4, 0)^1$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.10 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Se algum G_i for trivial, pela minimalidade de G , temos que $G' = G - G_i$ é $(4, 0)^1$, assim $G = G' - G_i$ também é $(4, 0)^1$, uma contradição. Portanto, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, G_i contém K_2 . Além disso, G deve conter K_3 , caso contrário, G seria bipartido e, conseqüentemente, G seria $(4, 0)^1$, o que seria uma contradição. Neste caso, G contém $K_3 \cup K_2$ como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Se existir algum G_i tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente então

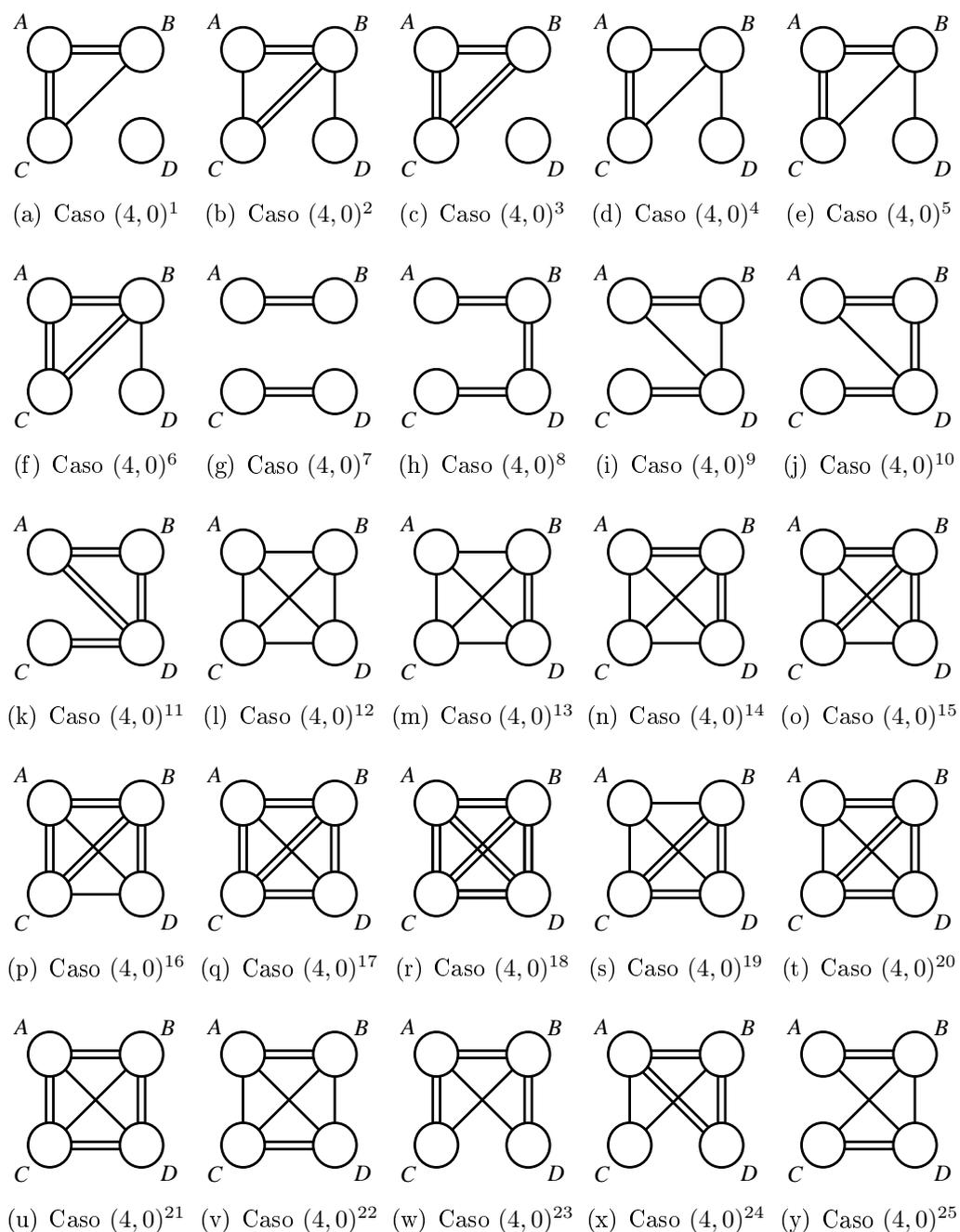


Figura 3.9: Possíveis M -partições em matrizes de ordem 4 não redutíveis e não equivalentes entre si.

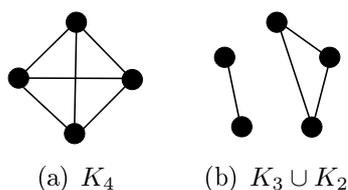
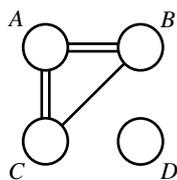


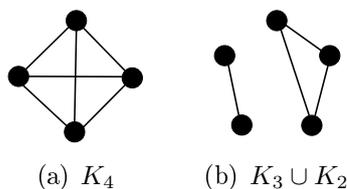
Figura 3.10: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^1$.

Figura 3.11: M-partição-(4, 0)¹.

$G' = G - G_i$ deve conter K_3 como subgrafo induzido, caso contrário G' seria bipartido e $(4, 0)^1$, o que é um absurdo. Logo, $G' = G - G_i$ contém K_3 . Mas, neste caso, obtemos novamente uma contradição já que G contém K_4 como subgrafo induzido. Portanto, para todo $i = 1, \dots, k$, G_i contém K_2 , implicando em G conter K_4 como subgrafo induzido. Absurdo. ■

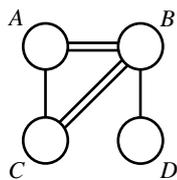
Para simplificar e não se tornar muito repetitiva, nas provas das recíprocas dos teoremas que seguem, consideraremos que G é um grafo minimalmente não $(4, 0)$, i.e, a retirada de qualquer vértice de G torna-o $(4, 0)$.

Teorema 3.2 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^2$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.12 como subgrafo induzido.*

Figura 3.12: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^2$.

Prova.

Figura 3.12 representa a M -partição $(4, 0)^2$.

Figura 3.13: M-partição-(4, 0)².

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.12 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4, 0)^2$. Pode-se também verificar

que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^2$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^2$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.10 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Se algum G_i for trivial, pela minimalidade de G , temos que $G' = G - G_i$ é $(4,0)^2$, assim como o próprio $G = G' \cup G_i$, uma contradição. Portanto, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, G_i contém K_2 . Além disso, G deve conter K_3 , caso contrário, G seria bipartido e conseqüentemente $(4,0)^2$, o que seria uma contradição. Neste caso, G contém $K_3 \cup K_2$ como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Se existir algum G_i tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente então $G' = G - G_i$ deve conter K_3 como sugrafo induzido, caso contrário G' seria bipartido e, conseqüentemente, G seria $(4,0)^2$, o que é um absurdo. Logo, $G' = G - G_i$ deve conter K_3 . Mas, neste caso, obtemos novamente uma contradição, já que G contém K_4 como subgrafo induzido. Portanto, para todo $i = 1, \dots, k$, G_i contém K_2 , implicando em G conter K_4 como subgrafo induzido. Absurdo. ■

Pode-se observar que as provas dos Teoremas 3.1 e 3.2 são análogas, implicando nas partições $(4,0)^1$ e $(4,0)^2$ serem equivalentes. O mesmo ocorre para os casos $(4,0)^5$, $(4,0)^9$ e $(4,0)^{25}$, cujas demonstrações são análogas à demonstração do caso $(4,0)^1$, e não serão repetidas aqui.

Teorema 3.3 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^3$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.14 como subgrafo induzido.*

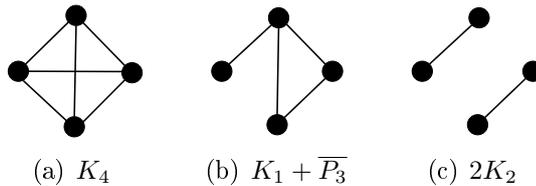


Figura 3.14: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^3$.

Prova.

Figura 3.15 representa a M -partição $(4,0)^3$.

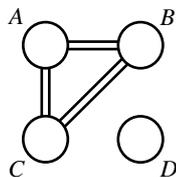


Figura 3.15: M -partição- $(4,0)^3$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.14 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^3$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^3$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^3$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.14 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Se algum G_i for trivial, pela minimalidade de G , temos que $G' = G - G_i$ é $(4,0)^3$, assim como o próprio $G = G' \cup G_i$, uma contradição. Portanto, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, G_i contém K_2 . Logo, G contém $2K_2$ como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.
 - $k \geq 4$: Neste caso, G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
 - $k = 3$: Se, para todo $i = 1, \dots, 3$, G_i for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente então G é $(3,0)^{1,1,1}$ (Veja Apêndice A) e conseqüentemente G é $(4,0)^3$. Absurdo. Portanto, ao menos um G_i deve conter K_2 , implicando em G conter K_4 , novamente um absurdo.
 - $k = 2$: $G = G_1 + G_2$. Se ambos G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes então obtemos um contradição já que G é $(4,0)^3$. Se ambos G_1 e G_2 contiverem K_2 , obtemos uma contradição do fato de G conter um K_4 . Sem perda de generalidade, assumamos que G_1 contém aresta e G_2 é tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente. Se G_1 contiver K_3 então G contém K_4 , o que é um absurdo. Portanto, G_1 não contém K_3 . Se, além disso, G_1

não contiver $\overline{P_3}$ então G_1 é um grafo bipartido completo, implicando em G ser $(4,0)^3$, uma absurdo. Logo, G_1 contém $\overline{P_3}$ e conseqüentemente G contém $K_1 + \overline{P_3}$, contradição. ■

Teorema 3.4 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^4$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.16 como subgrafo induzido.*

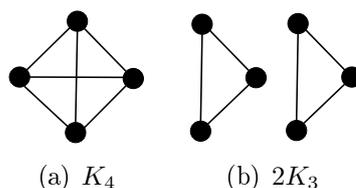


Figura 3.16: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^4$.

Prova.

Figura 3.17 representa a M -partição $(4,0)^4$.

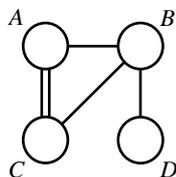


Figura 3.17: M -partição- $(4,0)^4$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.16 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^4$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^4$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^4$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.16 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

(i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo.

Se algum G_i for trivial, pela minimalidade de G , temos que $G' = G - G_i$ é $(4,0)^4$, assim como o próprio $G = G' \cup G_i$, uma contradição. Portanto, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, G_i contém K_2 . Além disso, se algum G_i não contiver K_3 então G_i é

bipartido. Temos também, por minimalidade, que $G' = G - G_i$ é $(4,0)^4$. Logo, G também é $(4,0)^4$, absurdo. Assim, todo G_i contém K_3 e G contém $2K_3$, contradição.

(ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

- $k \geq 4$: Neste caso, G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- $k = 3$: $G = G_1 + G_2 + G_3$. Se, para todo $i = 1, 2, 3$, $V(G_i)$ é um conjunto independente então G é $(4,0)^4$. Portanto, ao menos um G_i deve conter K_2 , implicando em G conter K_4 , novamente um absurdo.
- $k = 2$: $G = G_1 + G_2$. Observe que se ambos G_1 e G_2 são tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes então G é $(4,0)^4$, o que é um absurdo. Se ambos G_1 e G_2 contém aresta então G contém K_4 , o que também é um absurdo. Logo, apenas um contém aresta e o outro é um conjunto independente. Sem perda de generalidade, suponhamos que G_1 contém uma aresta e G_2 é tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente. Por minimalidade, temos que G_1 é $(4,0)^4$ e como $V(G_2)$ é um conjunto independente temos que G é $(4,0)^4$. Contradição. ■

Teorema 3.5 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^5$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.18 como subgrafo induzido.*

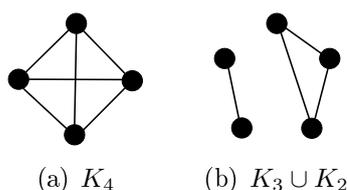


Figura 3.18: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^5$.

Figura 3.19 representa a M -partição $(4,0)^5$.

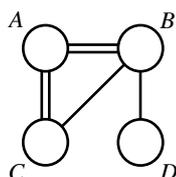


Figura 3.19: M -partição- $(4,0)^5$.

A prova deste Teorema é análoga a prova do Teorema 3.1.

Teorema 3.6 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^6$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.20 como subgrafo induzido.*

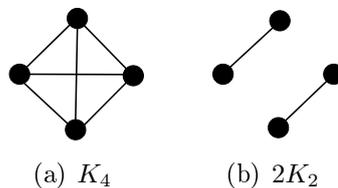


Figura 3.20: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^6$.

Prova.

Figura 3.21 representa a M -partição $(4,0)^6$.

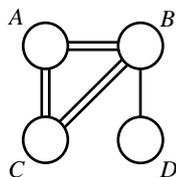


Figura 3.21: M -partição $(4,0)^6$

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.20 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^6$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^6$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^6$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.20 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

(i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo.

Se algum G_i for trivial, pela minimalidade de G , temos que $G' = G - G_i$ é $(4,0)^6$, assim como o próprio $G = G' \cup G_i$, uma contradição. Portanto, para todo $i = 1, 2, \dots, k$, G_i contém K_2 . Logo, G contém $2K_2$ como subgrafo induzido, o que é um absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

– $k \geq 4$: Neste caso, G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo.

- $k = 3$: $G = G_1 + G_2 + G_3$. Observe que deve existir algum G_i , com $i = 1, 2, 3$ contendo K_2 , caso contrário, $V(G_i)$ seria um conjunto independente para todo $i = 1, 2, 3$ e, portanto G seria $(4, 0)^6$. Nesse caso, G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- $k = 2$: $G = G_1 + G_2$. Se ambos G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes então obtemos uma contradição já que G é $(4, 0)^6$. Se ambos $V(G_1)$ e $V(G_2)$ não são conjuntos independentes então obtemos uma contradição do fato de G conter um K_4 . Logo, sem perda de generalidade $V(G_1)$ é um conjunto independente e $V(G_2)$ não é um conjunto independente. Se G_2 contiver K_3 então obtemos uma contradição do fato de G conter um K_4 . Portanto, G_2 não contém K_3 e se G_2 contiver um $2K_2$ obtemos uma contradição do fato de G conter um $2K_2$. Logo G_2 não contém $2K_2$ e K_3 como subgrafos induzidos o que implica em G_2 ser bipartido completo. Desta forma, concluímos que G é $(4, 0)^6$, absurdo. ■

Teorema 3.7 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^7$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.22 como subgrafo induzido.*

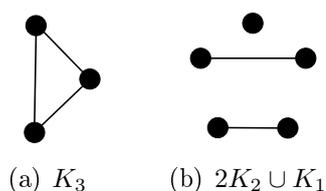


Figura 3.22: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^7$.

Prova.

Figura 3.23 representa a M -partição $(4, 0)^7$.

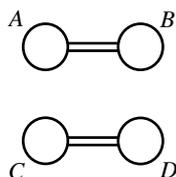


Figura 3.23: M -partição- $(4, 0)^7$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.22 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^7$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^7$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^7$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.22 como subgrafo induzido. Observe que se G não contiver K_3 ou $2K_2$ como subgrafo induzido, G seria $(3,0)^{1,*,*}$ (Veja Apêndice A), e portanto, $(4,0)^7$. Se G contém K_3 temos uma contradição, logo G contém $2K_2$. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

(i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo.

- $k \geq 3$: Como G contém $2K_2$ e $k \geq 3$ obtemos uma contradição do fato de G conter $2K_2 \cup K_1$ como subgrafo induzido.
- $k = 2$: $G = G_1 \cup G_2$. Por minimalidade, G_1 é $(4,0)^7$ e como G_1 é conexo, G_1 é $(2,0)^1$ (Veja Apêndice A). O mesmo ocorre para G_2 . Logo, $G_1 \cup G_2$ é $(4,0)^7$, absurdo.

(ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

- $k \geq 3$: Neste caso, G contém K_3 como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- $k = 2$: $G = G_1 + G_2$. Se ambos $V(G_1)$ e $V(G_2)$ forem conjuntos independentes, então G é $(4,0)^7$. Absurdo. Portanto, algum G_i para $i = 1, 2$ contém K_2 , sem perda de generalidade, G_1 , isso implica que G contém K_3 . Absurdo. ■

Teorema 3.8 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^8$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.24 como subgrafo induzido.*

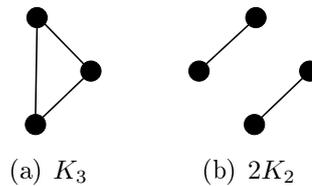


Figura 3.24: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^8$.

Prova.

Figura 3.25 representa a M -partição $(4,0)^8$.

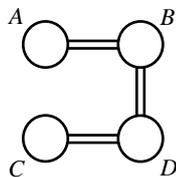


Figura 3.25: M -partição- $(4,0)^8$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.24 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^8$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^8$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^8$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.24 como subgrafo induzido. Podemos verificar que G deve conter K_3 ou $2K_2$, caso contrário G seria $(3,0)^{1,0,0}$ (Veja Apêndice A) e, conseqüentemente $(4,0)^8$, o que é uma contradição. ■

Teorema 3.9 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^9$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.26 como subgrafo induzido.*

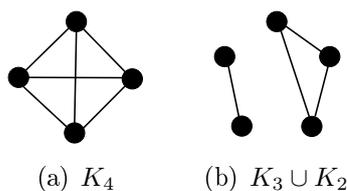


Figura 3.26: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^9$.

Figura 3.27 representa a M -partição $(4,0)^9$.

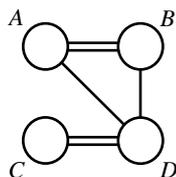


Figura 3.27: M -partição- $(4,0)^9$.

A prova deste Teorema é análoga à prova do Teorema 3.1.

Teorema 3.10 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{10}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.28 como subgrafo induzido.*

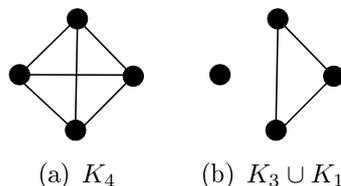


Figura 3.28: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{10}$.

Prova.

Figura 3.29 representa a M -partição $(4,0)^{10}$.

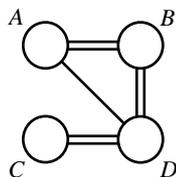


Figura 3.29: M -partição- $(4,0)^{10}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.24 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{10}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{10}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{10}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.28 como subgrafo induzido. Podemos verificar que G deve conter K_4 ou $K_3 \cup K_1$, caso contrário G seria $(3,0)^{*,1,1}$ (Veja Apêndice A) e, conseqüentemente $(4,0)^{10}$, o que é uma contradição. ■

Teorema 3.11 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{11}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.30 como subgrafo induzido.*

Prova.

Figura 3.31 representa a M -partição $(4,0)^{11}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.30 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{11}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{11}$.

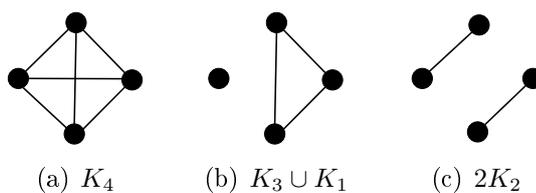


Figura 3.30: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{11}$.

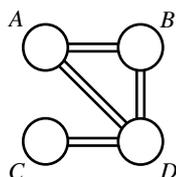


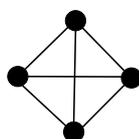
Figura 3.31: M-partição-(4,0)¹¹.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{11}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.30 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Se todos os G_i forem triviais temos que $V(G)$ forma um conjunto independente, logo G é $(4,0)^{11}$, uma contradição. Portanto, existe pelo menos um G_i para $i = 1, 2, \dots, k$, tal que $|G_i| > 1$. Observe que G deve conter $2K_2$ ou K_3 como subgrafo induzido, caso contrário, G seria $(3,0)^{1,*}$ (Veja Apêndice A). Se G contém $2K_2$ temos uma contradição da suposição inicial. Se G contém K_3 então G contém $K_3 \cup K_1$, já que G é desconexo. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.
- $k \geq 4$: Neste caso, G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
 - $k = 3$: $G = G_1 + G_2 + G_3$. Observe que nenhum G_i para $i = 1, 2, 3$ deve conter aresta, caso contrário, obtemos uma contradição do fato de G conter K_4 como subgrafo induzido. Neste caso, para cada G_i temos que $V(G_i)$ é um conjunto independente, conseqüentemente G é $(4,0)^{11}$. Absurdo.
 - $k = 2$: $G = G_1 + G_2$. Se ambos G_1 e G_2 contiverem aresta, então G contém K_4 como subgrafo induzido, o que é um absurdo. Se ambos G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes, então obteríamos uma contradição do fato de G ser $(4,0)^{11}$. Logo, apenas um $V(G_i)$ para $i = 1, 2$ é

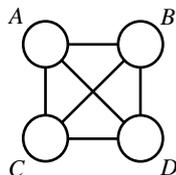
independente, sem perda de generalidade, G_1 . Note que G_2 deve conter K_3 ou $2K_2$ como subgrafo induzido, caso contrário, G_2 seria $(3,0)^{1,*}$ (vide Apêndice A) e conseqüentemente G seria $(4,0)^{11}$, o que nos levaria a uma contradição. Se G_2 contém $2K_2$ temos novamente uma contradição do fato de G conter $2K_2$. Se G_2 contém K_3 então G contém K_4 . Absurdo. ■

Teorema 3.12 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{12}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.32 como subgrafo induzido.*

(a) K_4 Figura 3.32: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{12}$.

Prova.

Figura 3.33 representa a M -partição $(4,0)^{12}$.

Figura 3.33: M -partição- $(4,0)^{12}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.32 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{12}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{12}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{12}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.32 como subgrafo induzido. Neste caso, o resultado segue imediatamente do fato de cografos serem perfeitos, portanto, G é 4-colorível, isso nos remete a uma contradição do fato de G conter um K_5 . ■

Em [27] uma prova alternativa para o Teorema 3.33 acima é dada.

Teorema 3.13 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{13}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.34 como subgrafo induzido.*

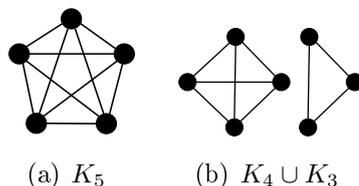


Figura 3.34: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{13}$.

Prova.

Figura 3.35 representa a M -partição $(4,0)^{13}$.

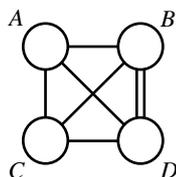


Figura 3.35: M -partição- $(4,0)^{13}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.34 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{13}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{13}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{13}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.34 como subgrafo induzido. Observe que G deve conter K_4 como subgrafo induzido, caso contrário G seria $(3,0)^*$ (Veja Apêndice A), o que é uma contradição. Sabemos que G é cografo, então, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Sabemos que G contém K_4 , suponha, sem perda de generalidade, que a componente conexa G_i contém K_4 . Observe que se $G - G_i$ for bipartido, i.e., $(2,0)^*$ (Veja Apêndice A), obtemos uma contradição, pois G_i é $(4,0)^{13}$, por minimalidade e, conseqüentemente, G também o é. Logo $G - G_i$ deve conter K_3 . Como G é a união de componentes conexas então G contém $K_4 \cup K_3$, o que é um absurdo.

- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.
- Se $k \geq 5$ então: Neste caso, G contém K_5 como subgrafo induzido. Absurdo.
 - Se $k = 4$ então, temos $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$. Se todo G_i , $i = 1, \dots, 4$ for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então G é $(4, 0)^{13}$. Absurdo. Logo, algum G_i contém aresta, e portanto, G contém K_5 , o que também é um absurdo.
 - Se $k = 3$, temos $G = G_1 + G_2 + G_3$. Se algum G_i contém K_3 como subgrafo induzido, então G contém K_5 , uma contradição. Por outro lado, se todo G_i , $i = 1, 2, 3$ é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então G é $(4, 0)^{13}$. Absurdo. Se dois dos G_i 's, sem perda de generalidade, G_1 e G_2 , contiverem aresta, então G contém K_5 , absurdo. Assim, nos resta analisar o caso em que G_1 e G_2 são tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes. Como todo G_i é $(2, 0)^*$ (Veja Apêndice A) então G é $(4, 0)^{13}$. Contradição.
 - Se $k = 2$, temos $G = G_1 + G_2$, então: Se apenas um G_i é bipartido, sem perda de generalidade G_1 e este contiver K_2 como subgrafo induzido então, G contém K_5 , o que nos leva a uma contradição. Logo G_1 é tal que $V(G_1)$ é um conjunto independente. Neste caso:
 - * Se G_2 for $(3, 0)^{*,*,*}$ (Veja Apêndice A) então obtemos uma contradição do fato de G ser $(4, 0)^{13}$.
 - * Se G_2 não for $(3, 0)^{*,*,*}$ (Veja Apêndice A) então obtemos outra contradição do fato de G_2 conter K_4 e, conseqüentemente, G contém K_5 . ■

A prova deste Teorema 3.13 constitui uma prova alternativa do resultado de Feder *et al.* para o caso do Teorema 2.3 quando $m = 4$.

Teorema 3.14 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^{14}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.36 como subgrafo induzido.*

Figura 3.37 representa a M -partição $(4, 0)^{14}$.

A prova deste Teorema é análoga à prova do Teorema 3.12.

Teorema 3.15 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^{15}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.38 como subgrafo induzido.*

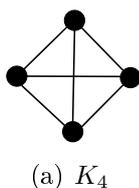


Figura 3.36: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{14}$.

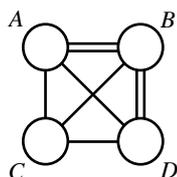


Figura 3.37: M -partição- $(4,0)^{14}$.

Prova.

Figura 3.39 representa a M -partição $(4,0)^{15}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.38 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{15}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{15}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{15}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.38 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Observe que G deve conter K_3 como subgrafo induzido, caso contrário, G seria bipartido e conseqüentemente $(4,0)^{15}$, o que seria uma contradição. Neste caso, G contém $K_3 \cup K_1$ como subgrafo induzido, já que G é desconexo, o que é um absurdo.

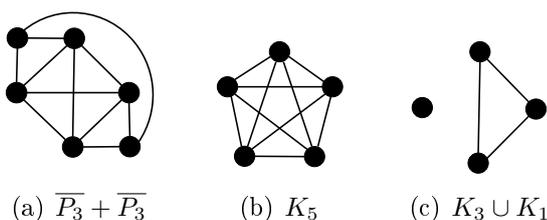
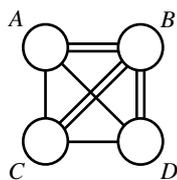


Figura 3.38: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{15}$.

Figura 3.39: M-partição-(4,0)¹⁵.

(ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

- $k \geq 5$: Neste caso, G contém K_5 como subgrafo induzido. Absurdo.
- $k = 4$, temos $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$. Observe que nenhum G_i para $i = 1, 2, 3, 4$ deve conter aresta, caso contrário, obtemos uma contradição do fato de G conter K_5 como subgrafo induzido. Logo, para todo G_i temos que $V(G_i)$ é um conjunto independente, e desta forma G é $(4,0)^{15}$. Absurdo.
- $k = 3$, temos $G = G_1 + G_2 + G_3$. Se algum G_i contém K_3 como subgrafo induzido, então G contém K_5 , o que é uma contradição. Logo G_i não contém K_3 e todo G_i é bipartido. Se existir algum G_i tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente então $G - G_i$ não pode ser $(3,0)^{***}$ (Veja Apêndice A), caso contrário G seria $(4,0)^{15}$, o que é uma contradição. Desta forma, $G - G_i$ contém K_4 , e conseqüentemente, G contém K_5 . Assim, cada G_i contém aresta, o que implica em G conter K_5 . Absurdo!
- $k = 2$, temos $G = G_1 + G_2$. Se algum G_i contiver K_3 como subgrafo induzido então, como G_i é desconexo, $\forall i = 1, 2$, G_i contém $K_3 \cup K_1$ e, conseqüentemente, G também. Absurdo. Logo, G_1 e G_2 são bipartidos. Observe que se algum G_i for bipartido completo então G é $(4,0)^{15}$. Absurdo. Logo, G_1 e G_2 contém \overline{P}_3 , e assim G contém $\overline{P}_3 + \overline{P}_3$. ■

Teorema 3.16 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{16}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.40 como subgrafo induzido.*

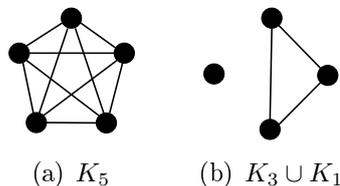


Figura 3.40: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{16}$.

Prova. Figura 3.41 representa a M -partição $(4,0)^{16}$.

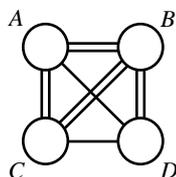


Figura 3.41: M -partição- $(4,0)^{16}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.40 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{16}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{16}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{16}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.40 como subgrafo induzido. Observe que G deve conter K_3 como subgrafo induzido, caso contrário G seria $(2,0)^*$ (Veja Apêndice A) e, portanto, $(4,0)^{16}$, o que é uma contradição. Sabemos que G é cografo, então, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Sabemos que G contém K_4 , suponha, sem perda de generalidade, que a componente conexa G_i contém K_3 . Como G é a união de componentes conexas então $G - G_i$ deve conter K_1 e, portanto, G contém $K_3 \cup K_1$, o que é um absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Observe que G deve conter \overline{P}_3 ou K_4 como subgrafo induzido, caso contrário G seria $(3,0)^{1,1,1}$ (Veja Apêndice A) e, portanto, $(4,0)^{16}$, o que seria uma contradição.

- Se $k \geq 5$ então: Neste caso, G contém K_5 como subgrafo induzido. Absurdo.
- Se $k = 4$ então, temos $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$. Se algum G_i , $i = 1, \dots, 4$ contiver aresta então G contém K_5 , uma contradição. Logo todo G_i é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, desta forma temos que G é $(4, 0)^{16}$. Absurdo.
- Se $k = 3$, temos $G = G_1 + G_2 + G_3$. Se todo G_i for tal $V(G_i)$ é um conjunto independente então G é $(3, 0)$ (Veja Apêndice A) e portanto $(4, 0)^{16}$. Absurdo. Logo existe algum G_i que possui aresta. Se ambos G_1 e G_2 contiverem aresta então G contém K_5 . Absurdo. Logo no máximo uma componente deve conter aresta, sem perda de generalidade, G_1 e G_2 são tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes. Além disso G_1 deve ser bipartido, caso contrário G_1 conteria K_3 e portanto K_5 como subgrafo induzido, mas nesse caso, G_1 sendo $(2, 0)^1$ (Veja Apêndice A) temos que G é $(4, 0)^{16}$. Contradição.
- Se $k = 2$, temos $G = G_1 + G_2$, então:
 - * Se ambos G_1 e G_2 forem tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ forem conjuntos independentes, então G é $(4, 0)^{16}$. Absurdo. Logo ao menos um G_i é tal que $V(G_i)$ não forma um conjunto independente.
 - * Se apenas um G_i for tal que $V(G_i)$ não forma um conjunto independente, sem perda de generalidade G_1 , temos que G_2 não $\supseteq K_4$, caso contrário, teremos uma contradição do fato de G conter K_5 . Se além disso, G não contiver $K_3 \cup K_2$ então G é $(3, 0)^{*,*,*}$ (Veja Apêndice A) e, portanto, G é $(4, 0)^{16}$. Se G contiver $K_3 \cup K_2$ então G contém $K_3 \cup K_1$. Absurdo. Logo ambos são não independentes. Portanto, ambos G_1 e G_2 não contém K_3 , caso contrário, G conteria K_5 , outro absurdo.
 - * Se algum G_i contém $\overline{P_3}$ então G_i contém $K_3 \cup K_1$. Absurdo. Logo G_i não $\supseteq \overline{P_3}$ nem K_3 , então G_i é bipartido completo (Veja Apêndice A) e, portanto, G é $(4, 0)^{16}$. Absurdo. ■

Teorema 3.17 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^{17}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.42 como subgrafo induzido.*

Figura 3.43 representa a M -partição $(4, 0)^{17}$.

Prova.(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.38 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4, 0)^{17}$. Pode-se também

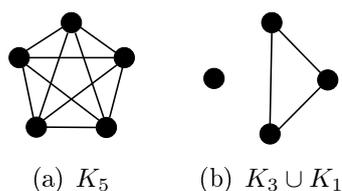


Figura 3.42: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{17}$.

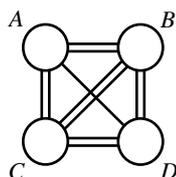


Figura 3.43: M-partição- $(4, 0)^{17}$.

verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4, 0)^{17}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4, 0)^{17}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.42 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Observe que G deve conter $K_3 \cup K_1$ ou K_4 como subgrafo induzido, caso contrário, G seria $(3, 0)^{1,*,1}$ (vide Apêndice A) e conseqüentemente $(4, 0)^{17}$, o que nos levaria a uma contradição. Se G contém $K_3 \cup K_1$ temos uma contradição da suposição inicial. Se G contém K_4 então G contém $K_3 \cup K_1$. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Se existir algum G_i tal que $G - G_i$ possa ser $(3, 0)^{1,*,1}$ (Veja Apêndice A), teremos uma contradição do fato de G ser $(4, 0)^{17}$. Desta forma, $G - G_i$, para todo $i = 1 \dots k$, contém $K_3 \cup K_1$ ou K_4 como subgrafo induzido. Assim, se $G - G_i$ contém $K_3 \cup K_1$ temos uma contradição da suposição inicial. Se $G - G_i$ contém K_4 , implica em G conter K_5 . Absurdo! ■

Teorema 3.18 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{18}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.44 como subgrafo induzido.*

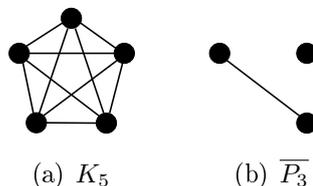


Figura 3.44: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{18}$.

Prova.

Figura 3.45 representa a M -partição $(4,0)^{18}$.

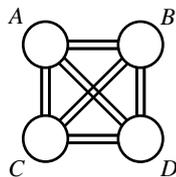


Figura 3.45: M -partição- $(4,0)^{18}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.10 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{18}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{18}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{18}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.10 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Se todos os G_i 's forem triviais, então G é $(4,0)^{18}$, contradição. Logo, existe algum G_i para $i = 1, 2, \dots, k$, tal que $|G_i| > 1$. Desta forma, G contém $K_2 \cup K_1$ como subgrafo induzido, o que é um absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo. Se $k \geq 5$ então G contém K_5 , um absurdo. Se $k \geq 4$ e algum G_i contiver K_2 , para $i = 1, \dots, k$ então G contém \overline{P}_3 . Portanto, para todo $i = 1, \dots, 4$, $V(G_i)$ é um conjunto independente, implicando em G ser $(4,0)^{18}$. Absurdo. ■

Teorema 3.19 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{19}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.46 como subgrafo induzido.*

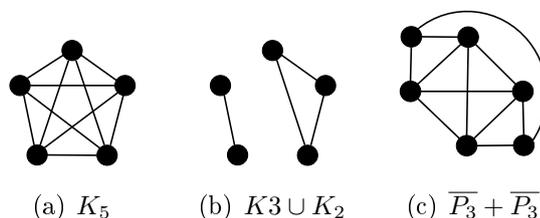


Figura 3.46: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{19}$.

Prova.

Figura 3.47 representa a M -partição $(4,0)^{19}$.

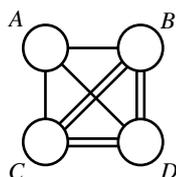


Figura 3.47: M -partição- $(4,0)^{19}$.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.46 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{19}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{19}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{19}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.46 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Se algum G_i for trivial então por minimalidade de G , $G - G_i$ é $(4,0)^{19}$ e por conseguinte G também o é, o que é um absurdo! Logo, todo G_i contém aresta, para $i = 1, 2, \dots, k$. Se algum G_i contiver K_3 então G contém $K_3 \cup K_1$, absurdo! Assim, todo G_i é bipartido, e consequentemente G também o é, o que implica em G ser $(4,0)^{19}$. Contradição.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

- Se $k \geq 5$, então G contém K_5 como subgrafo induzido. Absurdo.
- Se $k = 4$, então temos $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$. Se todo G_i for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente então, G é $(4, 0)^{19}$, o que é uma contradição. Logo, existe algum G_i para $i = 1, 2, 3, 4$ que contém K_2 e desta forma, G contém K_5 como subgrafo induzido. Absurdo.
- Se $k = 3$, temos $G = G_1 + G_2 + G_3$, então:
 - * Se existir algum G_i tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente então, $G - G_i$ não pode ser $(3, 0)^{*,*,1}$ (Veja Apêndice A), caso contrário, G seria $(4, 0)^{19}$. Absurdo. Logo, $G - G_i$ contém $K_3 \cup K_2$ ou $G - G_i$ contém K_4 como subgrafo induzido. Se $G - G_i$ contém K_4 então G contém K_5 , o que é um absurdo. E, se $G - G_i$ contém $K_3 \cup K_2$ então G também o contém, o que também é um absurdo. Assim, todo G_i , para $i = 1, 2, \dots, k$, $V(G_i)$, contém aresta, logo G contém K_5 , o que é uma contradição.
 - * Se todo G_i for tal que $V(G_i)$ não é um conjunto independente então, G contém K_5 o que é uma contradição.
- Se $k = 2$, temos $G = G_1 + G_2$, então:
 - * Se G_1 e G_2 contiverem aresta: como G_1 e G_2 são desconexos então G_1 e G_2 contém $\overline{P_3}$, e desta forma, G contém $\overline{P_3} + \overline{P_3}$, absurdo.
 - * Se apenas um G_i contém aresta, digamos G_1 : assim G_2 é tal que $V(G_2)$ é um conjunto independente então G_1 não pode ser $(3, 0)^{*,*,1}$ (Veja Apêndice A), caso contrário, G é $(4, 0)^{19}$. Desta forma, G_2 contém K_4 ou G_2 contém $K_3 \cup K_2$. Se G_2 contém K_4 então G contém K_5 , absurdo. E, se G_2 contém $K_3 \cup K_2$ então G também o contém, o que também é uma contradição.
 - * Se G_1 e G_2 não contém aresta então $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são ambos conjuntos independentes, isto é, G é bipartido. Desta forma, G é $(4, 0)^{19}$, uma contradição. ■

Teorema 3.20 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^{20}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.48 como subgrafo induzido.*

Prova.

Figura 3.49 representa a M -partição $(4, 0)^{20}$.

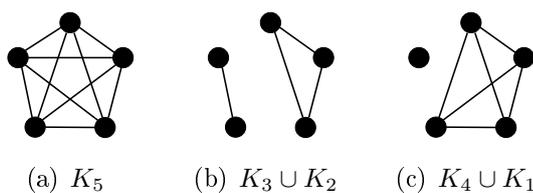


Figura 3.48: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{20}$.

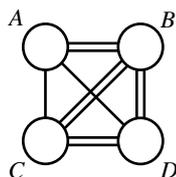


Figura 3.49: M-partição-(4, 0)²⁰.

(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.48 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4, 0)^{20}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4, 0)^{20}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4, 0)^{20}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.48 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

(i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Observe que G deve conter $K_3 \cup K_2$ ou K_4 como subgrafo induzido, caso contrário, G seria $(3, 0)^{*,*,1}$ (Veja Apêndice A) e, conseqüentemente $(4, 0)^{20}$, o que seria uma contradição. Neste caso:

- Se G contém $K_3 \cup K_2$ como subgrafo induzido temos um absurdo.
- Se G contém K_4 como subgrafo induzido, então como G é desconexo, temos que G contém $K_4 \cup K_1$, o que é contradição.

(ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

- Se $k \geq 5$, então: Neste caso, G contém K_5 como subgrafo induzido. Absurdo.
- Se $k = 4$, então temos $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$. Se todo G_i for tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente então, G é $(4, 0)^{20}$, o que é uma contradição. Logo, algum G_i para $i = 1, 2, 3, 4$ deve conter aresta, neste caso, obtemos uma contradição do fato de G conter K_5 como subgrafo induzido.

- Se $k = 3$, temos $G = G_1 + G_2 + G_3$. Se algum G_i contém K_3 como subgrafo induzido, então G contém K_5 , uma contradição. Por outro lado, se todo G_i , $i = 1, 2, 3$ é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, então G é $(4, 0)^{20}$. Absurdo. Se dois dos G_i 's, sem perda de generalidade, G_1 e G_2 , contiverem aresta, então G contém K_5 , absurdo. Assim, nos resta analisar o caso em que G_1 e G_2 são tais que $V(G_1)$ e $V(G_2)$ são conjuntos independentes. Como todo G_i é $(2, 0)^*$ (Veja Apêndice A) então G é $(4, 0)^{20}$. Contradição.
- Se $k = 2$, temos $G = G_1 + G_2$, então:
 - * Se ambos G_1 e G_2 contém K_3 como subgrafo induzido então, G contém K_5 , o que nos leva a uma contradição.
 - * Se apenas um, sem perda de generalidade, G_1 contém K_3 como subgrafo induzido. Então neste caso, se G_2 for tal que $V(G_2)$ forma um conjunto independente temos que G_1 não pode ser $(3, 0)^{*,*,1}$ (Veja Apêndice A) , caso contrário, G seria $(4, 0)^{20}$, e teríamos uma nova contradição. Logo, G_1 contém $K_3 \cup K_2$ ou K_4 como subgrafo induzido. Portanto, se G_1 contém $K_3 \cup K_2$ temos um absurdo e se G_1 contém K_4 temos que G contém K_5 , um outro absurdo.
 - * Se ambos G_1 e G_2 não contém K_3 como subgrafo induzido então, G_1 e G_2 são bipartidos, e conseqüentemente G é $(4, 0)^{20}$, outra contradição. ■

Teorema 3.21 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{21}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.50 como subgrafo induzido.*

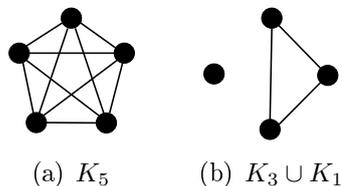


Figura 3.50: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{21}$.

Figura 3.51 representa à M -partição $(4,0)^{21}$.

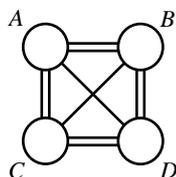


Figura 3.51: M -partição- $(4,0)^{21}$.

Prova.(\Rightarrow) Podemos verificar facilmente que se G contém qualquer um dos grafos da Figura 3.38 como subgrafo induzido, então G não é um cografo $(4,0)^{21}$. Pode-se também verificar que cada um desses grafos é minimal, já que a retirada de qualquer um de seus vértices torna-o $(4,0)^{21}$.

(\Leftarrow) Seja G um cografo que é minimalmente não $(4,0)^{21}$. Suponha, por contradição, que G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.50 como subgrafo induzido. Como G é cografo, temos que G ou \overline{G} é desconexo. No que segue, analisamos os dois casos:

- (i) G é desconexo: $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou conexo. Observe que G deve conter $K_3 \cup K_1$ ou K_4 como subgrafo induzido, caso contrário, G seria $(3,0)^{1,*,1}$ (vide Apêndice A) e consequentemente $(4,0)^{21}$, o que nos levaria a uma contradição. Se G contém $K_3 \cup K_1$ temos uma contradição da suposição inicial. Se G contém K_4 então G contém $K_4 \cup K_1$ e, como é desconexo, G contém $K_3 \cup K_1$. Absurdo.
- (ii) \overline{G} é desconexo: $G = G_1 + G_2 + \dots + G_k$, com $k \geq 2$, onde cada G_i é trivial ou desconexo.

– Se $k \geq 5$ então: Neste caso, G contém K_5 como subgrafo induzido. Absurdo.

- Se $k = 4$ então, temos $G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$. Se algum G_i , $i = 1, \dots, 4$ contém K_2 , então G contém K_5 . Absurdo. Logo, todo G_i , $i = 1, 2, 3, 4$, é tal que $V(G_i)$ é um conjunto independente, e portanto, G é $(4, 0)^{21}$, o que também é um absurdo.
- Se $k = 3$, temos $G = G_1 + G_2 + G_3$. Se algum G_i contém K_3 como subgrafo induzido, então G contém K_5 , uma contradição. Logo, G_i é bipartido e, desta forma, G é $(4, 0)^{21}$.
- Se $k = 2$, temos $G = G_1 + G_2$, então: Se algum um G_i contém K_3 , então G_1 contém $K_3 \cup K_1$, o que nos leva a uma contradição do fato de G conter $K_3 \cup K_1$. Logo todo G_i , $i = 1, 2$ contém K_3 , i.e., G_i é bipartido e, desta forma, G é G é $(4, 0)^{21}$. Absurdo. ■

Teorema 3.22 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{22}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.52 como subgrafo induzido.*

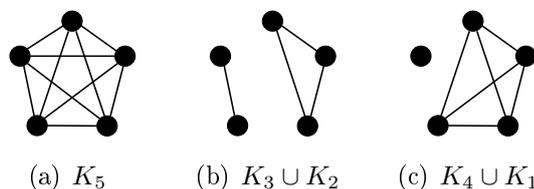


Figura 3.52: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{22}$.

Figura 3.53 representa a M -partição $(4,0)^{22}$.

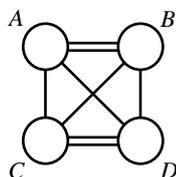


Figura 3.53: M -partição- $(4,0)^{22}$.

A prova deste Teorema é análoga à prova do Teorema 3.22.

Teorema 3.23 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{23}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.54 como subgrafo induzido.*

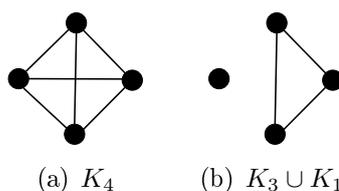


Figura 3.54: Subgrafos proibidos para o caso $(4,0)^{10}$.

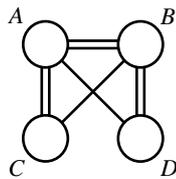
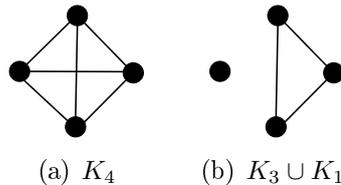
Figura 3.55 representa a M -partição $(4,0)^{23}$.

A prova deste Teorema é análoga à prova do Teorema 3.10.

Teorema 3.24 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4,0)^{24}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.56 como subgrafo induzido.*

Figura 3.57 representa a M -partição $(4,0)^{24}$.

A prova deste Teorema é análoga à prova do Teorema 3.10.

Figura 3.55: M -partição- $(4, 0)^{23}$.Figura 3.56: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{24}$.

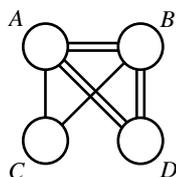
Teorema 3.25 *Seja G um cografo. G é um grafo $(4, 0)^{25}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura 3.58 como subgrafo induzido.*

Figura 3.59 representa a M -partição $(4, 0)^{25}$.

A prova deste Teorema é análoga à prova do Teorema 3.1.

3.1 Casos complementares $(0, 4)^{caso}$

Observe que a prova dos casos complementares foi omitida por ser análogas ao complemento.

Figura 3.57: M -partição- $(4, 0)^{24}$.

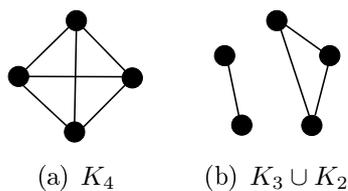


Figura 3.58: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{25}$.

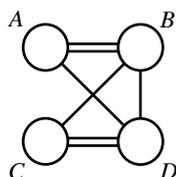


Figura 3.59: M -partição- $(4, 0)^{25}$.

3.2 Resumo dos Casos

Nas tabelas de 3.1 à 3.14 temos uma listagem geral dos 25 casos analisados e seus respectivos subgrafos proibidos.

Tabela 3.1: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^1$, $(4, 0)^2$, $(4, 0)^5$, $(4, 0)^9$ e $(4, 0)^{25}$.

M -Partição			Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^1$	Caso $(4, 0)^2$	Caso $(4, 0)^5$	K_4	$K_3 \cup K_2$
Caso $(4, 0)^9$	Caso $(4, 0)^{25}$			

Tabela 3.2: Subgrafos proibidos para o casos $(4, 0)^3$.

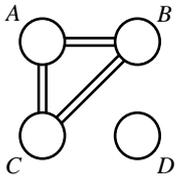
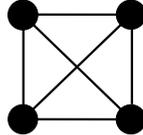
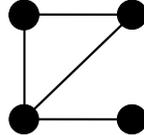
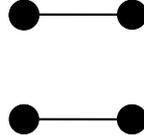
M -Partição	Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)^3$	K_4	$K_1 + \overline{P_3}$	$2K_2$
			

Tabela 3.3: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^4$.

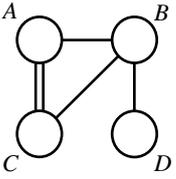
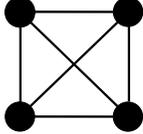
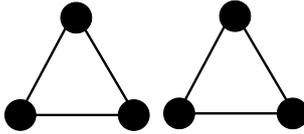
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^4$	K_4	$2K_3$
		

Tabela 3.4: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^6$.

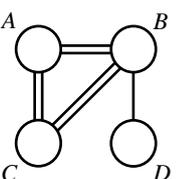
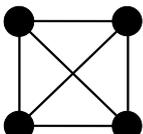
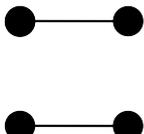
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^6$	K_4	$2K_2$
		

Tabela 3.5: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^7$.

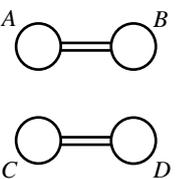
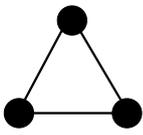
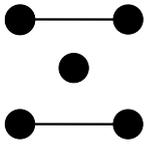
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^7$	K_3	$2K_2 \cup K_1$
		

Tabela 3.6: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^8$.

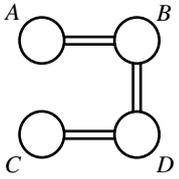
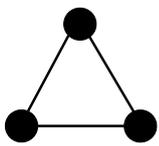
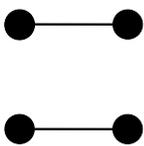
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^8$ 	K_3 	$2K_2$ 

Tabela 3.7: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{10}$, $(4, 0)^{23}$ e $(4, 0)^{24}$.

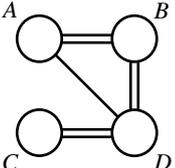
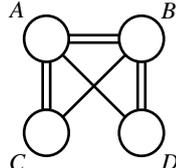
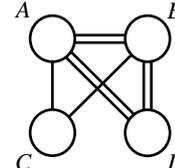
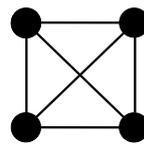
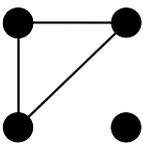
M -Partição			Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^{10}$ 	Caso $(4, 0)^{23}$ 	Caso $(4, 0)^{24}$ 	K_4 	$K_3 \cup K_1$ 

Tabela 3.8: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{11}$.

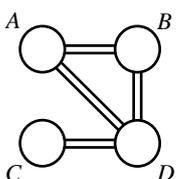
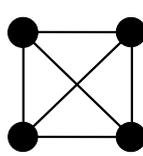
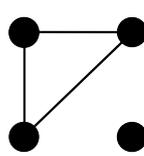
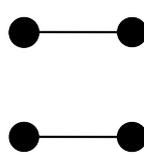
M -Partição	Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)^{11}$ 	K_4 	$K_3 + \overline{P}_3$ 	$2K_2$ 

Tabela 3.9: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{12}$ e $(4, 0)^{14}$.

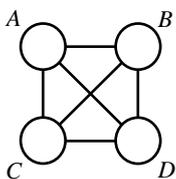
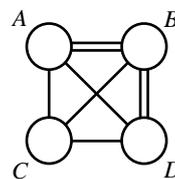
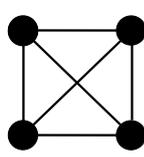
M -Partição		Subgrafo Proibido
Caso $(4, 0)^{12}$ 	Caso $(4, 0)^{14}$ 	K_4 

Tabela 3.10: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{13}$.

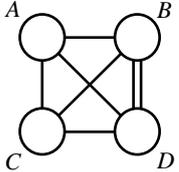
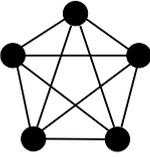
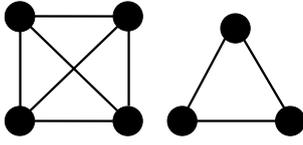
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^{13}$ 	K_5 	$K_4 \cup K_3$ 

Tabela 3.11: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{15}, (4, 0)^{16}, (4, 0)^{17}$ e $(4, 0)^{21}$.

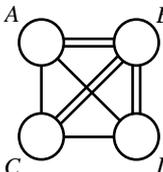
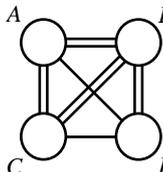
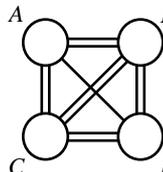
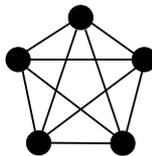
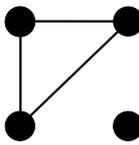
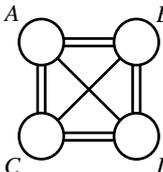
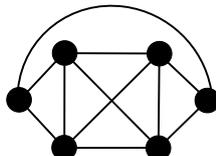
M -Partição			Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^{15}$ 	Caso $(4, 0)^{16}$ 	Caso $(4, 0)^{17}$ 	K_5 	$K_3 \cup K_1$ 
Caso $(4, 0)^{21}$ 			$\overline{P_3} + \overline{P_3}$ 	

Tabela 3.12: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{18}$.

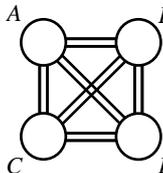
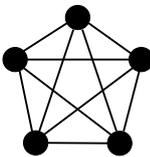
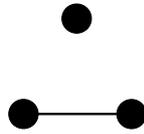
M -Partição	Subgrafos Proibidos	
Caso $(4, 0)^{18}$ 	K_5 	$\overline{P_3}$ 

Tabela 3.13: Subgrafos proibidos para o caso $(4, 0)^{19}$.

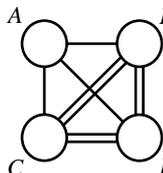
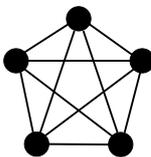
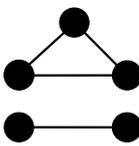
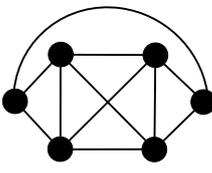
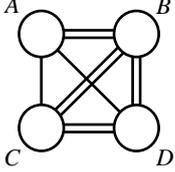
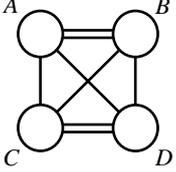
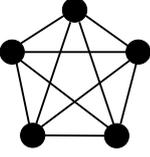
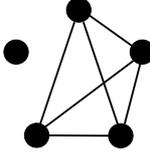
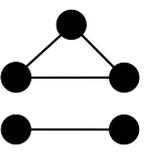
M -Partição	Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)^{19}$ 	K_4 	$K_3 \cup K_2$ 	$\overline{P_3} + \overline{P_3}$ 

Tabela 3.14: Subgrafos proibidos para os casos $(4, 0)^{20}$ e $(4, 0)^{22}$.

M -partição		Subgrafos Proibidos		
Caso $(4, 0)^{20}$	Caso $(4, 0)^{22}$	K_5	$K_4 \cup K_1$	$K_3 \cup K_2$
				

Capítulo 4

Conclusão

Este trabalho considerou o problema da M -partição quando restrito à classe dos cografos para matrizes M de ordem 4 com diagonal nula. Consideramos todas as possíveis matrizes que satisfaçam a estes critérios. Portanto, M é uma matriz de ordem 4 onde $M(i, i) = 0$, para $i = 1, \dots, 4$ e, para $i \neq j$, $M(i, j) \in \{0, 1, *\}$. Nosso trabalho é um refinamento dos estudos de Feder, Hell e Hochsttler [31] em que consideraram todos os problemas de partição (M -partição) quando restritos a classe dos cografos e provaram que estes admitem algoritmos polinomiais e caracterizações por subgrafos induzidos proibidos. Em particular, eles apresentam um limite no tamanho da maior estrutura proibida minimal para os cografos- (k, ℓ) , e não fornecem a caracterização completa por subgrafos proibidos. Neste trabalho apresentamos tal caracterização para o problema da M -partição, descrevendo todas as M -obstruções minimais com respeito à matriz M e para essa classe de grafo. Também como consequência, estendemos os resultados apresentados em [35] (em que M tem ordem no máximo 3).

No que segue, alguns problemas em aberto no contexto deste trabalho.

4.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, propomos os seguintes problemas:

- Estudar porque algumas M -obstruções são as mesmas para matrizes M diferentes e demonstrar que tais casos são equivalentes;
- Encontrar M -obstruções minimais para outras classes dos grafos perfeitos, e até mesmo não perfeitos;
- Investigar a possibilidade de inferirmos a partir das M -obstruções para matrizes de tamanho m as M -obstruções para matrizes de tamanho $m + 1$ em determinadas classes de grafos.

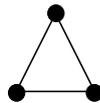
APÊNDICE A - M_{3X_3} -obstrução minimal de cografos

No Capítulo 3 mencionamos que algumas matrizes representam problemas de partição que podem ser reduzidos a casos menores, i.e., a problemas de partição de matrizes de ordem menor que quatro. Esses casos foram estudados em [35], o resultado desse trabalho foi a caracterização dos cografos- (k, l) em termos de obstruções minimais, ou seja, verificar se um dado Cografo G pode ser particionado em k conjuntos independentes e l cliques com base nas matrizes de ordem no máximo três. Neste apêndice fornecemos os resultados obtidos no referido trabalho.

A.1 Caracterização dos cografos- (k, l) M -particionáveis de ordem no máximo três.

A seguinte notação: $(k, l)_{\{a_1^2, a_1^3, \dots, a_1^{k+l}, \dots, a_i^{i+1}, \dots, a_i^{k+l}\}}$, $i := 1, \dots, k+l-1$ foi utilizada para representar uma partição em k conjuntos independentes: X_1, X_2, \dots, X_k e l cliques: X_{k+1}, \dots, X_{k+l} , onde cada a_i^j representa a restrição externa entre os conjuntos X_i e X_j .

Teorema A.1 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 0)^*$ se e somente G não contém o grafo da Figura A.1 como subgrafo induzido.*



(a) K_3

Figura A.1: Obstrução minimal do caso $(2, 0)^*$.

Figura A.2 representa a M -partição $(2, 0)^*$.

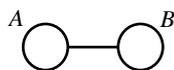


Figura A.2: M -partição- $(2, 0)^*$.

Teorema A.2 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 0)^1$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.3 como subgrafo induzido.*

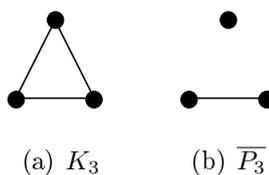


Figura A.3: Obstruções minimais do caso $(2, 0)^1$.

Figura A.4 representa a M -partição $(2, 0)^1$.

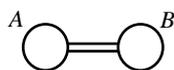


Figura A.4: M -partição- $(2, 0)^1$.

Teorema A.3 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 1)^*$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.5 como subgrafo induzido.*

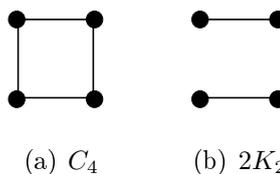


Figura A.5: Obstruções minimais do caso $(1, 1)^*$.

Figura A.6 representa a M -partição $(1, 1)^*$.

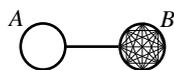


Figura A.6: M -partição- $(1, 1)^*$.

Teorema A.4 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 1)^1$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.7 como subgrafo induzido.*

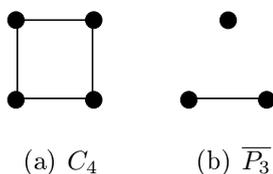


Figura A.7: Obstruções minimais do caso $(1, 1)^1$.

Figura A.8 representa a M -partição $(1, 1)^1$.

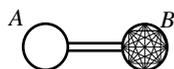


Figura A.8: M -partição- $(1, 1)^1$.

Teorema A.5 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{1,1,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.9 como subgrafo induzido.*

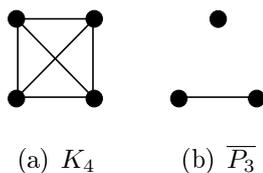


Figura A.9: Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,1,1}$.

Figura A.10 representa a M -partição $(3, 0)^{1,1,1}$.

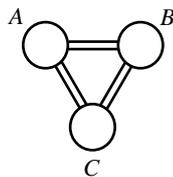
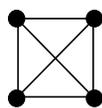


Figura A.10: M -partição- $(3, 0)^{1,1,1}$.

Teorema A.6 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{*,*,*}$ se e somente se G não contém o grafo da Figura A.11 como subgrafo induzido.*



(a) K_4

Figura A.11: Obstrução minimal do caso $(3, 0)^{*,*,*}$.

Figura A.12 representa a M -partição $(3, 0)^{*,*,*}$.

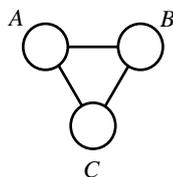
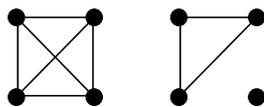


Figura A.12: M -partição- $(3, 0)^{*,*,*}$.

Teorema A.7 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{*,1,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.13 como subgrafo induzido.*



(a) K_4 (b) $K_3 \cup K_1$

Figura A.13: Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{*,1,1}$.

Figura A.14 representa a M -partição $(3, 0)^{*,1,1}$.

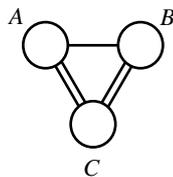


Figura A.14: M -partição- $(3, 0)^{*,1,1}$.

Teorema A.8 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{1,*,*}$ se e somente se G não contém o grafo da Figura A.15 como subgrafo induzido.*

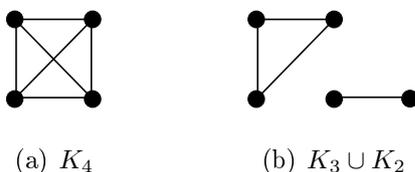


Figura A.15: Obstrução minimal do caso $(3, 0)^{1,*,*}$

Figura A.16 representa a M -partição $(3, 0)^{1,*,*}$.

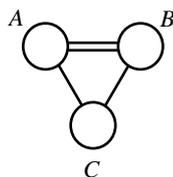


Figura A.16: M -partição- $(3, 0)^{1,*,*}$.

Teorema A.9 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(3, 0)^{1,0,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.17 como subgrafo induzido.*

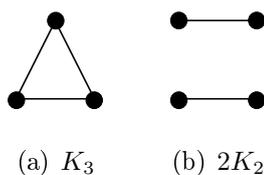


Figura A.17: Obstruções minimais do caso $(3, 0)^{1,0,0}$.

Figura A.18 representa a M -partição $(3, 0)^{1,0,0}$.

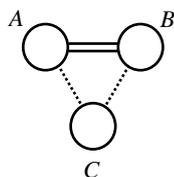


Figura A.18: M -partição- $(3, 0)^{1,0,0}$.

Teorema A.10 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,*,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.19 como subgrafo induzido.*

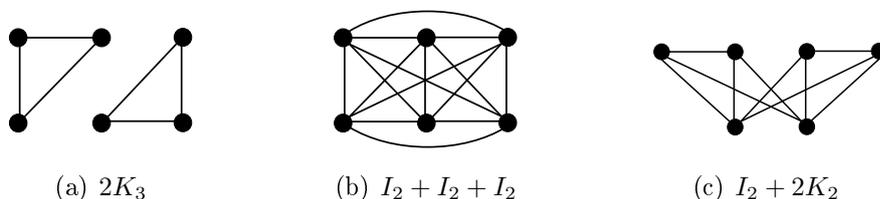


Figura A.19: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,*,*}$.

Figura A.20 representa a M -partição $(2, 1)^{*,*,*}$.

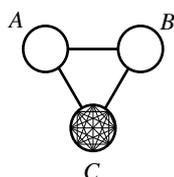


Figura A.20: M -partição- $(2, 1)^{*,*,*}$.

Teorema A.11 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,1,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.21 como subgrafo induzido.*

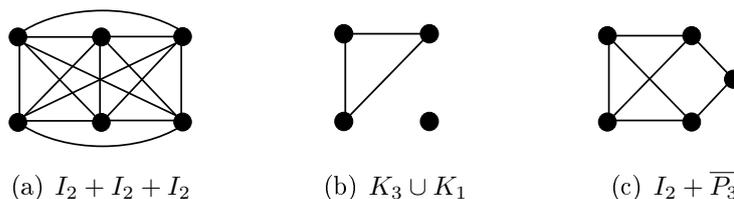


Figura A.21: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,1}$.

Figura A.22 representa a M -partição $(2, 1)^{*,1,1}$.

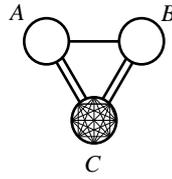


Figura A.22: M -partição- $(2, 1)^{*,1,1}$.

Teorema A.12 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,1,1}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.23 como subgrafo induzido.*

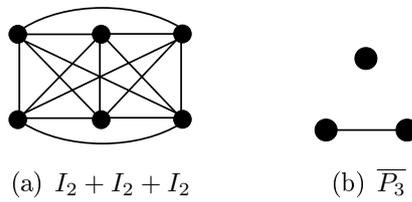


Figura A.23: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{1,1,1}$.

Figura A.24 representa a M -partição $(2, 1)^{1,1,1}$.

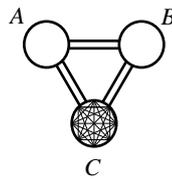


Figura A.24: M -partição- $(2, 1)^{1,1,1}$.

Teorema A.13 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.26 como subgrafo induzido. Figura A.25 representa a M -partição $(2, 1)^{*,1,0}$.*

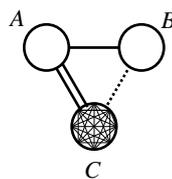


Figura A.25: M -partição- $(2, 1)^{*,1,0}$.

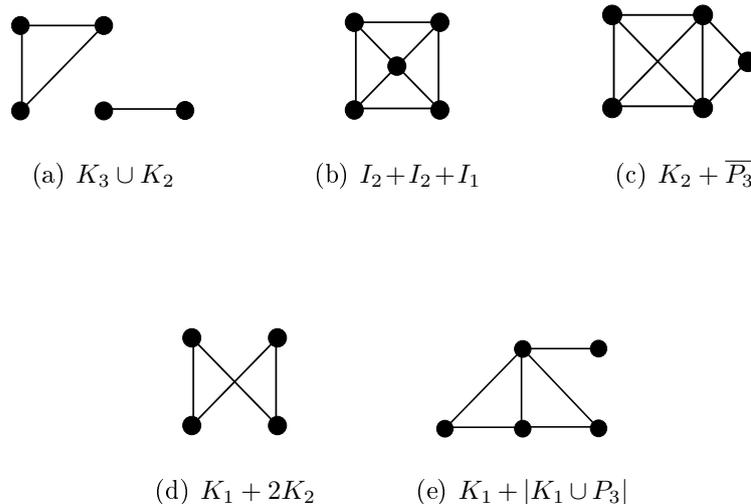


Figura A.26: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,0}$.

Teorema A.14 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,*,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.27 como subgrafo induzido.*

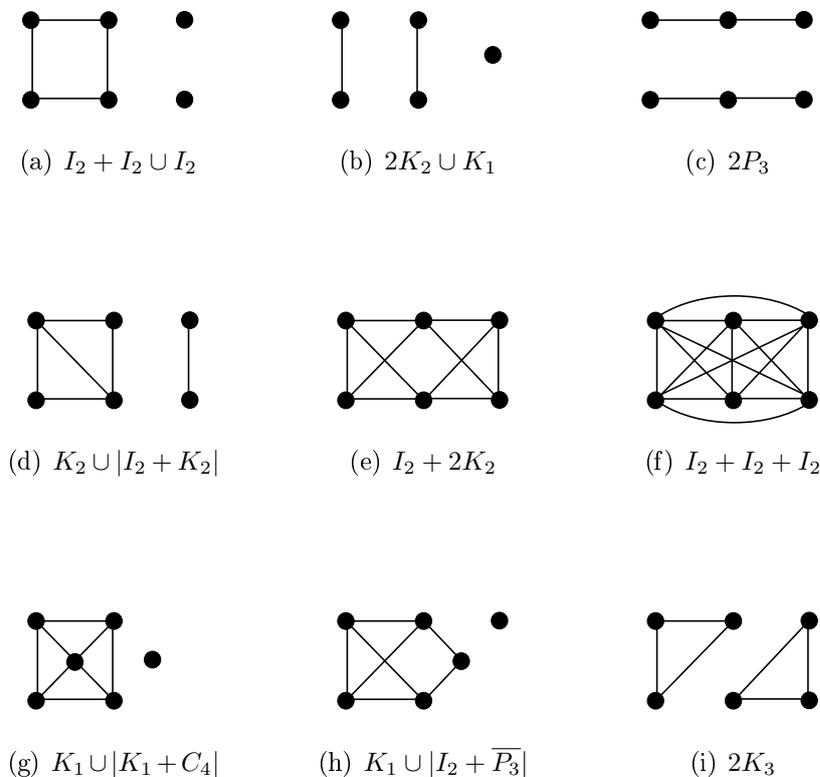


Figura A.27: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,*}$.

Figura A.28 representa a M -partição $(2, 1)^{1,*,*}$.

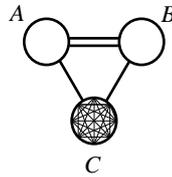
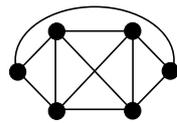
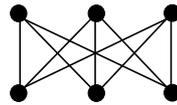


Figura A.28: M -partição- $(2, 1)^{1,*,*}$.

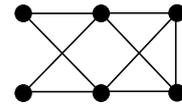
Teorema A.15 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(1, 2)^{*,*,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.29 como subgrafo induzido.*



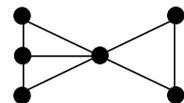
(a) $\overline{P_3} + \overline{P_3}$



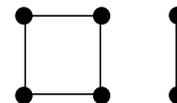
(b) $I_3 + I_3$



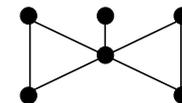
(c) $I_2 + |I_2 + K_2|$



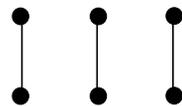
(d) $I_1 + |K_2 + P_3|$



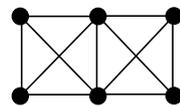
(e) $C_4 \cup K_2$



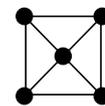
(f) $K_1 + |K_1 \cup 2K_2|$



(g) $3K_2$



(h) $2K_2 + K_2$



(i) $K_1 + C_4$

Figura A.29: Obstruções minimais do caso $(1, 2)^{*,*,0}$.

Figura A.30 representa a M -partição $(1, 2)^{*,*,0}$.

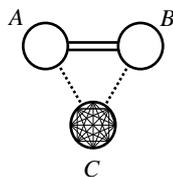


Figura A.30: M -partição- $(1, 2)^{*,*,0}$.

Teorema A.16 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,0,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.31 como subgrafo induzido.*

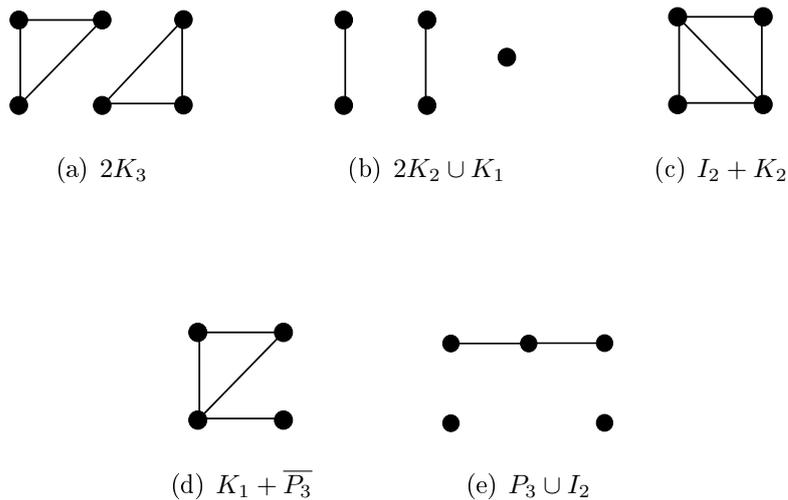


Figura A.31: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{1,0,0}$.

Figura A.32 representa a M -partição $(2, 1)^{1,0,0}$.

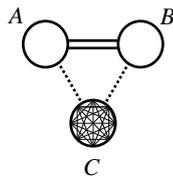


Figura A.32: M -partição- $(2, 1)^{1,0,0}$.

Teorema A.17 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,0,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.33 como subgrafo induzido.*

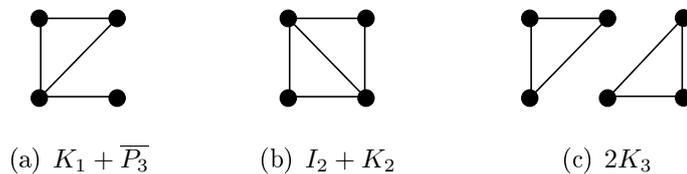


Figura A.33: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{*,0,0}$.

Figura A.34 representa a M -partição $(2, 1)^{*,0,0}$.

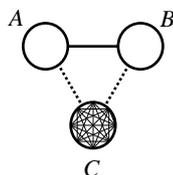


Figura A.34: M -partição- $(2, 1)^{*,0,0}$.

Teorema A.18 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.35 como subgrafo induzido.*

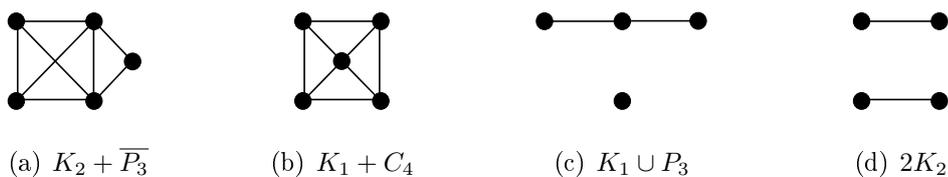


Figura A.35: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{1,1,0}$.

Figura A.36 representa a M -partição $(2, 1)^{1,1,0}$.

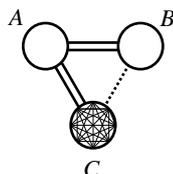


Figura A.36: M -partição- $(2, 1)^{1,1,0}$.

Teorema A.19 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,1,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.37 como subgrafo induzido.*

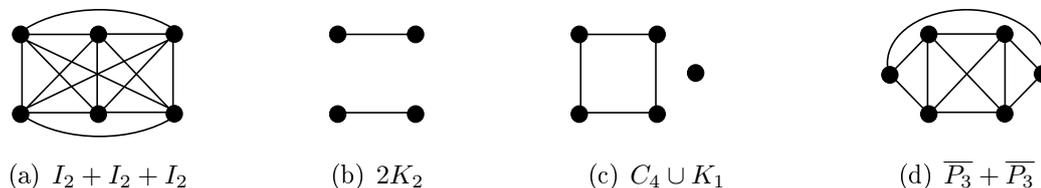


Figura A.37: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,1,*}$.

Figura A.38 representa a M -partição $(2, 1)^{1,1,*}$.

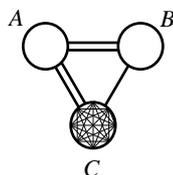


Figura A.38: M -partição- $(2, 1)^{1,1,*}$.

Teorema A.20 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,1,*}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.39 como subgrafo induzido.*

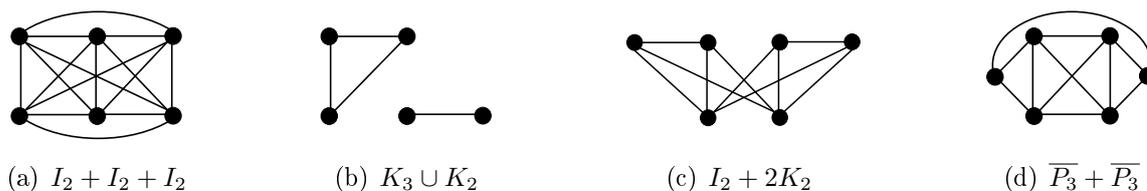


Figura A.39: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,1,*}$.

Figura A.40 representa a M -partição $(2, 1)^{*,1,*}$.

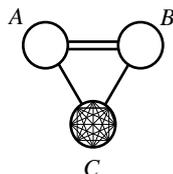


Figura A.40: M -partição- $(2, 1)^{*,1,*}$.

Teorema A.21 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{0,1,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.41 como subgrafo induzido.*

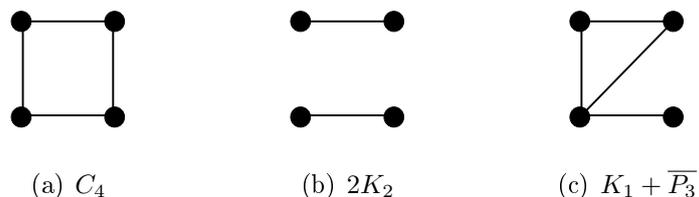


Figura A.41: Obstruções mínimas do caso $(2, 1)^{0,1,0}$.

Figura A.42 representa a M -partição $(2, 1)^{0,1,0}$.

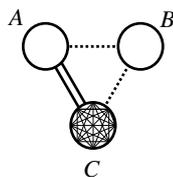


Figura A.42: M -partição- $(2, 1)^{0,1,0}$.

Teorema A.22 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{1,*,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.44 como subgrafo induzido.*

Figura A.43 representa a M -partição $(2, 1)^{1,*,0}$.

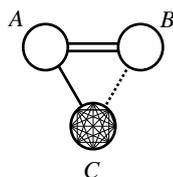


Figura A.43: M -partição- $(2, 1)^{1,*,0}$.

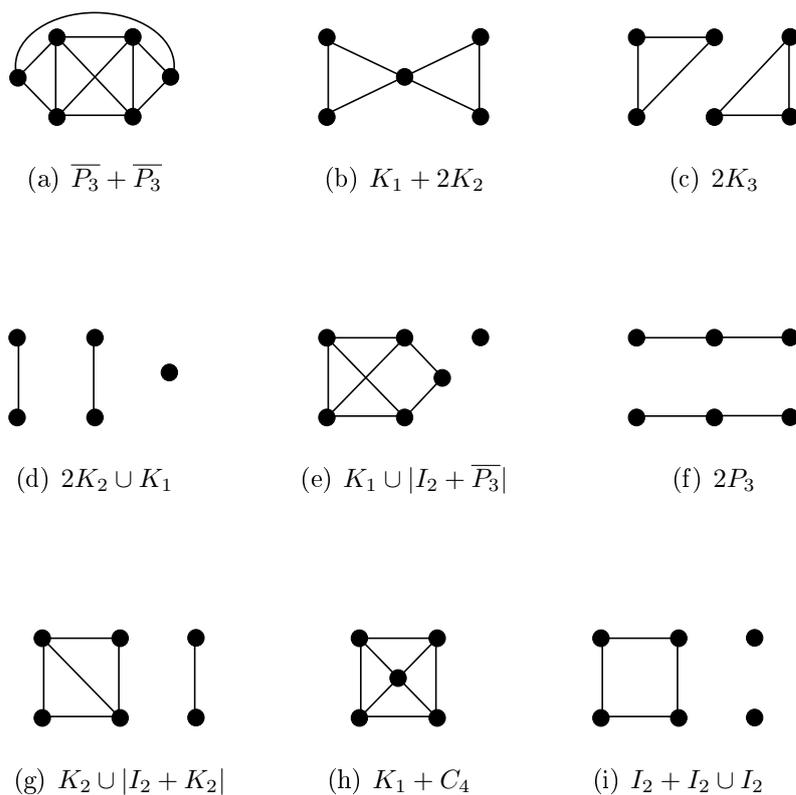


Figura A.44: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{1,*,0}$.

Teorema A.23 [35] *Seja G um cografo. G é um grafo $(2, 1)^{*,*,0}$ se e somente se G não contém nenhum dos grafos da Figura A.45 como subgrafo induzido.*

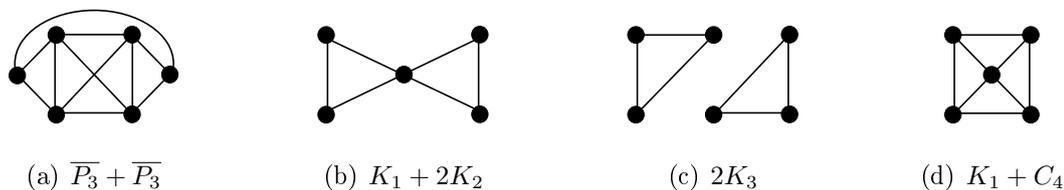


Figura A.45: Obstruções minimais do caso $(2, 1)^{*,*,0}$.

Figura A.46 representa a M -partição $(2, 1)^{*,*,0}$.

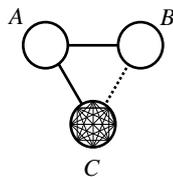


Figura A.46: M -partição- $(2, 1)^{*,*,0}$.

A.2 Casos (3, 0) e (4, 0) equivalentes

Em Trabalhos Futuros (veja [4.1]) sugerimos estudar porque algumas M -obstruções são as mesmas para matrizes M diferentes e demonstrar que tais casos são equivalentes. Nesta seção mostramos tais casos nas tabelas A.1 a A.4.

Tabela A.1: Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{1,*,*}$, $(4, 0)^1$, $(4, 0)^2$, $(4, 0)^5$, $(4, 0)^9$ e $(4, 0)^{25}$.

M -Partição (3, 0)	M -Partição (4, 0)			Subgrafos Proibidos
<p>Caso $(3, 0)^{1,*,*}$</p>	<p>Caso $(4, 0)^1$</p>	<p>Caso $(4, 0)^2$</p>	<p>Caso $(4, 0)^5$</p>	<p>K_4</p>
	<p>Caso $(4, 0)^9$</p>	<p>Caso $(4, 0)^{25}$</p>		<p>$K_3 \cup K_2$</p>

Tabela A.2: Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{1,0,0}$ e $(4, 0)^8$.

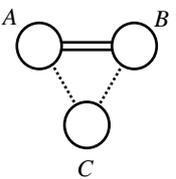
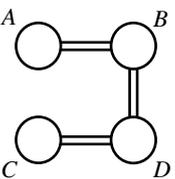
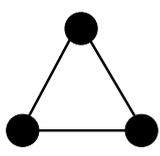
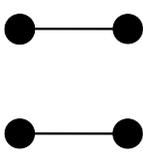
M -Partição $(3, 0)$	M -Partição $(4, 0)$	Subgrafos Proibidos	
<p>Caso $(3, 0)^{1,0,0}$</p> 	<p>Caso $(4, 0)^8$</p> 	<p>K_3</p> 	<p>$2K_2$</p> 

Tabela A.3: Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{*,1,1}$, $(4, 0)^{10}$, $(4, 0)^{23}$ e $(4, 0)^{24}$.

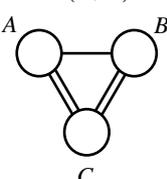
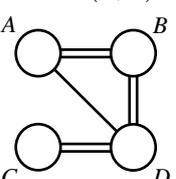
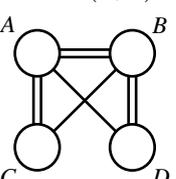
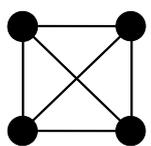
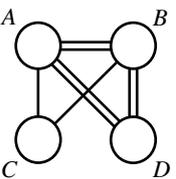
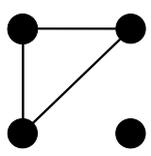
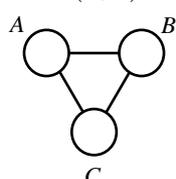
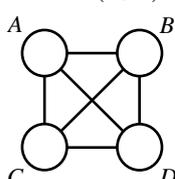
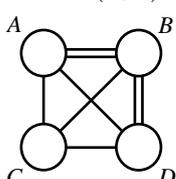
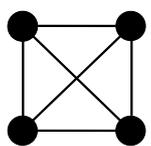
M -Partição $(3, 0)$	M -Partição $(4, 0)$		Subgrafos Proibidos
<p>Caso $(3, 0)^{*,1,1}$</p> 	<p>Caso $(4, 0)^{10}$</p> 	<p>Caso $(4, 0)^{23}$</p> 	<p>K_4</p> 
	<p>Caso $(4, 0)^{24}$</p> 		<p>$K_3 \cup K_1$</p> 

Tabela A.4: Subgrafos proibidos para os casos $(3, 0)^{*,*,*}$, $(4, 0)^{12}$ e $(4, 0)^{14}$.

M -Partição $(3, 0)$	M -Partição $(4, 0)$		Subgrafo proibido
<p>Caso $(3, 0)^{*,*,*}$</p> 	<p>Caso $(4, 0)^{12}$</p> 	<p>Caso $(4, 0)^{14}$</p> 	<p>K_4</p> 

Referências

- [1] V. B. Le A. Brandstädt and J. P. Spinrad. *Graph classes: a survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.
- [2] V. B. Le A. Brandstädt and T. Szymczak. The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics*, 89(1-3):59–73, 1998.
- [3] M. Habib A. Bretscher, D. Corneil and C. Paul. A simple linear time lexbfs cograph recognition algorithm. In *in Graph Theoretical Concepts in Computer Science (WG), Lecture*, 2003.
- [4] C. Berge. Les problemes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, (9):123–160, 1960.
- [5] A. Brandstädt. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics*, 152(1-3):47–54, 1996.
- [6] A. Brandstädt. Corrigendum. *Discrete Mathematics*, 186(1-3):295, 1998.
- [7] D.G. Corneil, H. Lerchs, and L. S. Burlingham.
- [8] H. D. G. Corneil, H. Lerchs and L. S. Burlingham. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 3(3):163–174, 1981.
- [9] Y. Perl D. G. Corneil and L. K. Stewart. A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing*, 14(4):926–934, 1985.
- [10] T. Ekim and J. Gimbel. Partitioning graphs into complete and empty graphs. *Discrete Mathematics*, 309(19):5849–5856, 2009.
- [11] T. Feder and P. Hell. Matrix partitions of perfect graphs. *Discrete Mathematics*, 306(19-20):2450–2460, 2006.
- [12] T. Feder, P. Hell, S. Klein, and R. Motwani. List partitions. *Proc. 31st Ann. ACM Symp. on Theory of Computing*, 16:464–472, 2003.
- [13] T. Feder, P. Hell, and S. N. Rizi. Chordal obstructions to m-partitions, 2005.
- [14] T. Feder, P. Hell, and O. Shklarsky. Matrix partitions of split graphs.
- [15] S. Földes and P. L. Hammer. Split graphs. *Congressus Numerantium*, 19:311–315, 1977.
- [16] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.

-
- [17] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [18] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57)*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 2004.
- [19] H. A. Jung. On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 24(2):125–133, 1978.
- [20] C. Viana L. T. Nogueira, R. S. F. Bravo and F. Protti. Minimal 3x3 m-obstruction cographs. 2012. The Latin-American Workshop on Cliques in Graphs (Buenos Aires, 2012).
- [21] H. Lerchs. On cliques-kernels. Technical report.
- [22] P. Seymour M. Chudnovsky, N. Robertson and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. 2002.
- [23] P. Seymour M. Chudnovsky, N. Robertson and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, 164:51–229, 2006.
- [24] T. Ekim M. Demange and D. Werra. Partitioning cographs into cliques and stable sets. *Discrete Optimization*, 2(2):145–153, 2005.
- [25] L. T. Nogueira P. Hell, S. Klein and F. Protti. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics*, 141(1-3):185–194, 2004.
- [26] L. T. Nogueira P. Hell, S. Klein and F. Protti. Packing r -cliques in weighted chordal graphs. *Annals OR*, 138(1), 2005.
- [27] L. T. Nogueira R. S. F. Bravo, S. Klein and F. Protti. Characterization and recognition of p_4 -sparse graphs partitionable into k independent sets and l cliques. *Discrete Appl. Math.*, 159(4):165–173, February 2011.
- [28] L. T. Nogueira F. Protti R. S. F. Bravo, S. Klein and R. M. Sampaio. Partitioning extended p_4 -laden graphs into cliques and stable sets. *Inf. Process. Lett.*, 112(21):829–834, November 2012.
- [29] S. Klein R. S. Francisco and L. T. Nogueira. Characterizing (k, l) -partitionable cographs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 22:277–280, 2005.
- [30] D. P. Sumner. Dacey graphs. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 18:492–502, 1974.
- [31] P. Hell T. Feder and W. Hochstättler. *Generalized colouring (matrix partitions) of cographs.*, pages 149–167. Basel: Birkhäuser, 2007.
- [32] P. Hell T. Feder, S. Klein, and R. Motwani. Complexity of graph partition problems. In *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing, STOC '99*, pages 464–472, New York, NY, USA, 1999. ACM.
- [33] P. Hell T. Feder and W. Xie. Matrix partitions with finitely many obstructions. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 28:371–378, 2007.

-
- [34] P. Hell T. Feder and W. Xie. Matrix partitions with finitely many obstructions. *Electr. J. Comb.*, 14(1), 2007.
- [35] C. C. Viana. *$M_{3 \times 3}$ -obstrução minimal de cografos*. Dissertation, Universidade Federal Fluminense, 2013.