

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JOÃO VINICIUS CORRÊA THOMPSON

**Particionando grafos de distância hereditária em  
conjuntos independentes e cliques**

NITERÓI

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JOÃO VINICIUS CORRÊA THOMPSON

**Particionando grafos de distância hereditária em  
conjuntos independentes e cliques**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização

Orientador:

LOANA TITO NOGUEIRA

NITERÓI

2013

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de Computação da UFF

T473 Thompson, João Vinicius Corrêa  
Particionando grafos de distância hereditária em conjuntos independentes e cliques / João Vinicius Corrêa Thompson. – Niterói, RJ : [s.n.], 2013.  
63 f.

Dissertação (Mestrado em Computação) - Universidade Federal Fluminense, 2013.  
Orientadora: Loana Tito Nogueira.

1. Teoria dos grafos. 2. Algoritmo. 3. Otimização (Computação).  
I. Título.

CDD 511.5

# JOÃO VINICIUS CORRÊA THOMPSON

Particionando grafos de distância hereditária em conjuntos independentes e cliques

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: ALGORITMOS E OTIMIZAÇÃO

Aprovada em março de 2013.

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. LOANA TITO NOGUEIRA, D.Sc. - Orientador, UFF

---

Prof. FABIO PROTTI, D.Sc., UFF

---

Prof. RAQUEL DE SOUZA FRANCISCO BRAVO, D.Sc.

---

Prof. SULAMITA KLEIN, D.Sc., COPPE/UFRJ

Niterói

2013

# Agradecimentos

Eu estive pensando se deveria ou não escrever os agradecimentos, talvez por medo de acabar fazendo um texto demasiadamente triste, enfadonho ou até mesmo informal demais. Por fim, percebi que seria grosseiro da minha parte não agradecer aos professores que me ajudaram neste trabalho por um ano de estudos semanais, estudos na cantina, estudos no corredor... e inclusive nas férias. Não agradecer às pessoas que me fizeram chegar onde eu cheguei não me parece uma opção.

Obrigado, Loana, Raquel e Fabio. A vocês eu só tenho a agradecer, pois aceitaram me orientar mesmo depois de eu dormir várias aulas. Desculpem por isso. Eu gostava das aulas, mas eu simplesmente não consigo ficar acordado.

Um obrigado também muito especial para minha professora Claudinha, como diria o *mr. Apple*, que me ensinou as primeiras coisas de grafos. Você também tem sua parcela de “culpa” nisso.

No entanto, depois de um ponto de partida, sinto-me na “obrigação” de comentar as dificuldades e as ajudas que me foram dadas durante esse tempo em *Nictheroy*. Um obrigado aos que me abrigaram quando não tinha onde morar nem dinheiro pra pagar algum lugar (Ariel, Gê, Kabeça, Renato e OptHouse). Pelo menos de fome eu não morri, deu tudo certo e hoje as coisas parecem mais promissoras.

Maria Carolina, sua chata. Independente do que acontecer, eu te amo! E quero sempre o melhor pra você. Obrigado por estar comigo quase todas as horas de quase todos os dias.

Pai, mãe, Lys e principalmente Arthur, desculpem eu estar tão longe. Prometo visitar-lhes mais quando for possível. Amo cada um de vocês a sua maneira e sinto falta de todos igualmente.

# Resumo

Neste trabalho consideramos o problema de particionar um grafo em  $k$  conjuntos independentes e  $l$  cliques, conhecido como o problema da Partição- $(k, l)$ . Este problema foi introduzido por Brandstädt, e generalizado por Feder, Hell, Klein e Motwani como o problema da  $M$ -partição. Brandstädt provou que, dado um grafo  $G$ , é NP-completo decidir se  $G$  é um grafo- $(k, l)$  para  $k \geq 3$  ou  $l \geq 3$ . Em particular, consideramos uma subclasse de grafos perfeitos: grafos de distância hereditária, que consistem de grafos cuja distância entre quaisquer dois vértices é isométrica (todos os caminhos induzidos possuem a mesma distância), e apresentamos uma caracterização dos DHG- $(k, 1)$  em termos de subgrafos proibidos, i. e., obstruções minimais.

**Palavras-chave:** Partição- $(k, l)$ , Grafos de Distância Hereditária.

# Abstract

In this work we consider the problem of partitioning a graph into  $k$  independent sets and  $l$  cliques, known as the  $(k, l)$ -partition problem, which was introduced by Brandstädt, and generalized by Feder, Hell, Klein and Motwani as the M-partition problem. Brandstädt proved that, given a graph  $G$ , it is NP-complete to decide if  $G$  is a  $(k, l)$ -graph for  $k \geq 3$  or  $l \geq 3$ . In particular, we consider a subclass of perfect graphs: distance hereditary graphs, which consist of graphs of isometric distances (every induced path between two vertices has the same length), and we present a characterization of the  $(k, 1)$ -DHG in terms of forbidden subgraphs, i. e., minimal obstructions.

**Keywords:**  $(k, l)$ -Partition, Distance Hereditary Graphs.

# Lista de Figuras

2.1	Exemplo de co-árvore e o grafo que representa. . . . .	9
2.2	Exemplos de operações que constroem o cografo. . . . .	9
2.3	Exemplos das três operações que constroem um DHG. . . . .	10
2.4	Duas sequências de operações diferentes que constroem dois grafos isomorfos. . . . .	11
2.5	Subgrafos proibidos para grafos distância hereditária. . . . .	12
3.1	Grafo proibido para cordal-(2, 1). . . . .	15
3.2	Exemplo de subgrafo proibido para cografo-(2, 1). . . . .	16
3.3	Subgrafos proibidos para DHG-(2, 1). . . . .	18
3.4	Um grafo 3-cocolorível. . . . .	20
4.1	Adjacência entre conjuntos. . . . .	23
4.2	$G_1, 2 \leq j \leq k, i < j$ . . . . .	24
4.3	$G_2, 2 \leq j \leq k, i < j, m < k + 1 - j$ . . . . .	24
4.4	Subgrafo proibido para EDHG-(2, 1), um grafo da família $G_1$ com $j = 2$ , $i = 1$ . . . . .	25
4.5	Subgrafos proibidos para EDHG-(3, 1). . . . .	26
4.6	Subgrafos proibidos para EDHG-( $k, 1$ ). . . . .	26
4.7	Vizinhança dos vértices $v_1$ e $v_5$ . . . . .	28
4.8	Vizinhanças do vértice $v$ . . . . .	28
4.9	Exemplo de compressão em que $S = T_a, T_a, T_a$ e $Rotulos = \{a, b, c, d\}$ . . . . .	33
4.10	Exemplo de compressão de ramos com altura menor que $m$ . . . . .	36
4.11	Exemplo de ramos escolhidos para criar o $P_3$ com operações <b>pendente</b> no início da sequência de operações. . . . .	37

---

4.12 Exemplo de conjuntos apresentados na prova do Lema 4.5, onde $j < k + 1$ .	40
4.13 Exemplo dos conjuntos apresentados na prova do Lema 4.5. . . . .	41
4.14 Estrutura inicial de uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . . . . .	42
4.15 Exemplo dos conjuntos apresentados na prova do Lema 4.6. . . . .	43
4.16 Exemplo dos conjuntos apresentados na prova do Lema 4.6. . . . .	43
4.17 Estrutura de obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ com $III + IV$ . . . . .	44
4.18 Estrutura da obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ - $III$ e $IV$ são cliques. . . .	46
4.19 Estrutura de obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ sem operação <b>pendente</b> , onde $2 \leq j \leq k, i < j$ . . . . .	49
4.20 Estrutura de obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ com operação <b>pendente</b> , onde $2 \leq j \leq k, i < j, 0 < m < k + 1 - j$ . . . . .	49

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Organização do trabalho . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Definições . . . . .	3
2.2	Complexidade de algoritmos . . . . .	6
2.3	Cografos . . . . .	7
2.3.1	Co-árvore . . . . .	8
2.3.2	Sequência de operações para construção do cografo . . . . .	8
2.4	Grafos de distância hereditária . . . . .	10
2.4.1	Outras caracterizações de grafos de distância hereditária . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Partição-<math>(k, l)</math> em Classes de Grafos</b>	<b>13</b>
3.1	Grafos- $(k, l)$ . . . . .	13
3.1.1	Grafos cordais- $(k, l)$ . . . . .	14
3.1.2	Cografos- $(k, l)$ . . . . .	15
3.1.3	Grafos- $(k, l)$ em classes de grafos com poucos $P_4$ . . . . .	17
3.1.4	Grafos de distância hereditária- $(2, 1)$ . . . . .	17
3.1.5	$M$ -partição . . . . .	19
3.2	Co-coloração . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Grafo de distância hereditária-<math>(k, l)</math></b>	<b>22</b>
4.0.1	Notações Adicionais . . . . .	22

---

4.1	Definição do problema . . . . .	23
4.2	Caracterização de EDHG- $(k, 1)$ . . . . .	24
4.2.1	Grafos proibidos para EDHG- $(2, 1)$ . . . . .	25
4.2.2	Subgrafos proibidos para EDHG- $(k, 1)$ . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>51</b>
5.0.3	Trabalhos Futuros . . . . .	51
	<b>Referências</b>	<b>52</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação considera o problema da Partição- $(k, l)$  em Grafos de Distância Hereditária. Este problema consiste em verificar se é possível particionar um dado grafo de distância hereditária  $G$  em no máximo  $k$  conjuntos independentes e no máximo  $l$  cliques, i.e., se  $G$  é  $(k, l)$  (ou se admite uma  $(k, l)$ -partição). Como principal resultado deste trabalho, apresentamos uma caracterização dos grafos de distância hereditária- $(k, l)$  por subgrafos proibidos. Mais precisamente, nosso resultado caracteriza por subgrafos proibidos quando um dado grafo de distância hereditária é  $(k, l)$ .

Como um dos principais tópicos da Ciência da Computação, Teoria dos Grafos por si só possui um campo teórico vasto que tem sido alvo de muitas pesquisas e por isso são publicados muitos artigos especializados no assunto. Além da área teórica muito estudada, Teoria dos Grafos possui grande aplicabilidade em problemas reais, principalmente em problemas de otimização.

Para resolver problemas de otimização é interessante que existam algoritmos eficientes, pois muitas vezes solucionar problemas difíceis torna-se computacionalmente impraticável por exigirem até mesmo anos de computação para que se obtenha a melhor solução possível e necessitarmos de uma solução mais rapidamente. Dessa forma, uma alternativa para solucionar tais problemas encontra-se no estudo de classes específicas de grafos, classes tais que um problema difícil seja facilmente resolvido.

O problema Partição- $(k, l)$  já foi provado ser um problema difícil em [2][4] e, portanto, uma motivação para o estudo deste problema na classe de Grafos Distância Hereditária se dá pela necessidade de viabilizar a solução deste problema em tempo computacional viável.

## 1.1 Organização do trabalho

O restante desta dissertação está organizada em quatro outros capítulos. No Capítulo 2 estão dispostas as definições, conceitos básicos e termos utilizados nesta dissertação. O Capítulo 3 descreve estudos sobre o problema da Partição- $(k, l)$  em diversas classes de grafos. O Capítulo 4 descreve a definição formal do problema estudado e traz a caracterização por subgrafos proibidos proposta nesta dissertação além de algumas notações adicionais. O Capítulo 5 traz as conclusões do trabalho bem como sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Preliminares

Este capítulo introduz conceitos, definições e termos. Além de discorrer sobre duas classes de grafos bastante abordadas neste trabalho: a classe dos cografos e a classe dos grafos de distância hereditária.

### 2.1 Definições

Todos os grafos nesta dissertação são simples e o termo grafo é utilizado para designar um grafo simples.

Um *grafo simples*  $G$  é um par ordenado  $(V(G), E(G))$  (ou apenas  $(V, E)$ ), tal que  $V(G)$  representa o conjunto de *vértices* e  $E(G)$  representa o conjunto de *arestas*. Cada aresta do conjunto  $E(G)$  é representado por um par de vértices de  $G$  (necessariamente distintos), dizemos que os vértices que formam a aresta são *extremidades* desta. Denotamos o número de vértices e de arestas de um grafo  $G$  por  $n(G)$  e  $m(G)$  (ou simplesmente  $n$  e  $m$ ), respectivamente. Se  $e = (u, v)$  é uma aresta pertencente à  $E(G)$ , então dizemos que os vértices  $u$  e  $v$  são *adjacentes* no grafo  $G$ . Também dizemos que  $e$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$  e vice-versa.

Um *grafo completo*  $G$  é um grafo tal que se  $u$  e  $v$  são dois vértices distintos de  $V(G)$ , então  $u$  e  $v$  são adjacentes. Denotamos por  $K_n$  um grafo completo com  $n$  vértices. Um grafo  $G$  é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , tal que toda aresta de  $E(G)$  possui uma extremidade em  $X$  e outra extremidade em  $Y$ ; tal partição  $(X, Y)$  é dita *bipartição* do grafo, e  $X$  e  $Y$  suas *partes*. Um grafo *estrela* é um grafo bipartido completo que admite bipartição  $(X, Y)$  e  $|X| = 1$  ou  $|Y| = 1$ .

Um *caminho* em um grafo é uma sequência de vértices que pode ser ordenada de

tal forma que dois vértices são adjacentes se aparecem consecutivamente na sequência. Da mesma forma, um *ciclo* em um grafo é uma sequência com três ou mais vértices que pode ser ordenada de forma cíclica tal que dois vértices são adjacentes se aparecem consecutivamente na sequência. Quando dois vértices não consecutivos em um caminho (ciclo) possui uma aresta entre eles, esta aresta é chamada *corda*. Um caminho (ciclo) induzido com  $n$  vértices que não possui cordas é denotado por  $P_n$  ( $C_n$ ). Um ciclo induzido com cinco ou mais vértices é chamado *buraco*.

O *grau* de um vértice é a quantidade de arestas incidentes a ele, denotado por  $d(v)$ .

Um grafo  $G$  é *conexo* se, para cada partição de vértices em dois conjuntos não vazios  $X$  e  $Y$ , existe uma aresta com uma extremidade em  $X$  e outra em  $Y$ ; caso contrário o grafo é *desconexo*.

O *complemento*  $\overline{G}$  de um grafo  $G$  é um grafo com o mesmo conjunto de vértices  $V(G)$  e com pares de arestas entre os vértices não adjacentes em  $G$ .

Dois grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* se existem bijeções:  $\theta : V(G) \leftrightarrow V(H)$  e  $\phi : E(G) \leftrightarrow E(H)$ .

Um grafo  $F$  é dito *subgrafo* de  $H$  ( $F \subseteq H$ ) se  $V(F) \subseteq V(H)$  e  $E(F) \subseteq E(H)$ , neste caso dizemos que  $F$  está *contido* em  $H$  e que  $H$  *contém*  $F$ . Um *supergrafo* de  $G$  é um grafo  $H$  que contém  $G$  como subgrafo.

Seja  $\mathcal{F}$  uma família de subgrafos de um grafo  $G$ . Um membro  $F$ , da família  $\mathcal{F}$ , é dito *maximal* se  $F$  não está contido em nenhum outro elemento de  $\mathcal{F}$ . Um membro  $F$ , da família  $\mathcal{F}$ , é dito *minimal* se  $F$  não contém nenhum outro elemento de  $\mathcal{F}$ . Seja  $\mathcal{F}$  a família de subgrafos conexos de um grafo  $G$ , os membros maximais da família  $\mathcal{F}$  são ditos *componentes conexas* de  $G$ . Não devemos confundir conceitos de Maximalidade/Minimalidade e Máximo/Mínimo cardinal.

Um grafo  $G$  é dito *acíclico* se este não contém ciclos, também chamado de *floresta*. Um grafo conexo acíclico é dito *árvore*.

Uma árvore é denominada *enraizada* se um vértice  $r$  é escolhido para ser sua *raiz*. Cada vértice adjacente a raiz é um *ramo*, onde cada ramo pode ser ou uma árvore enraizada ou uma *folha* (um único vértice). Dizemos que um vértice  $t$  é *ancestral* de um vértice  $s$  quando o caminho de  $s$  até a raiz contiver  $t$ .

Um *subgrafo induzido*  $H = (X, Y)$  de um grafo  $G$ , denotado por  $G[X]$ , é um grafo tal que está contido em  $G$  e o conjunto de arestas  $Y$  consiste em todas as arestas que contém

as duas extremidades em  $X$ .

Um *conjunto independente*  $I$  de um grafo  $G$  é um conjunto de vértices tais que se  $u$  e  $v$  é um par de vértices distintos de  $I$ , então  $u$  e  $v$  não são adjacentes. Da mesma forma, dizemos que um conjunto  $K$  é uma *clique* se para quaisquer par de vértices  $u, v \in K$ , então  $u$  e  $v$  são adjacentes. Denotamos a cardinalidade da maior clique de  $G$  por  $\omega(G)$ .

Como as arestas não possuem valores, consideramos que a *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$  é a cardinalidade do menor caminho contendo  $u$  e  $v$ .

Denotamos por  $N(v)$  o conjunto dos vértices que são adjacentes ao vértice  $v$  e chamamos esse conjunto de *vizinhança* de  $v$ . A *vizinhança fechada* de  $v$  é denotada por  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . De uma forma genérica dizemos que a *vizinhança  $i$ -ésima* de  $v$ , denotada por  $N^i(v)$ , é o conjunto  $\{w \mid \text{dist}(v, w) = i\}$ , ou seja, são todos os vértices cuja distância até  $v$  é igual a  $i$ .

Dizemos que dois vértices  $u$  e  $v$  são *gêmeos* se  $N(u) \setminus \{u, v\} = N(v) \setminus \{u, v\}$ , em particular se  $u$  é adjacente a  $v$  eles são ditos *gêmeos verdadeiros*. Um par de vértices gêmeos não adjacentes são ditos *gêmeos falsos*. Um vértice  $u$  é dito vértice *pendente* de  $v$ , se  $N(u) = \{v\}$ .

Seja um grafo  $G$ , denotamos por  $e(v)$  a *excentricidade* do vértice  $v$ , definida como a maior distância de  $v$  a todos os outros vértices de  $V$ , ou seja,  $e(v) = \max(\{\text{dist}(v, w) \mid w \neq v, w \in V\})$ . O *raio* do grafo  $G$  é a maior excentricidade entre os vértices.

Um grafo  $G$  é dito  *$k$ -colorível* se podemos escrever  $V(G)$  como união de  $k$  conjuntos independentes, ou seja,  $V(G) = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  onde cada  $A_i, 1 \leq i \leq k$  é um conjunto independente (possivelmente vazio). O menor  $k$  tal que o grafo  $G$  seja  $k$ -colorível é chamado de *número cromático* e é denotado por  $\chi(G)$ .

Um grafo  $G$  é *perfeito* se para todo subgrafo induzido  $G'$ , então  $\chi(G') = \omega(G')$ . Dado que  $G$  é um grafo perfeito, então  $\overline{G}$  também é perfeito.

Para diferenciação de funções aplicadas em diferentes grafos (ou conjuntos de vértices), indicamos o grafo em que a operação está sendo aplicada. Por exemplo, quando queremos diferenciar operações realizadas sobre grafos  $G$  e  $H$ , utilizaremos a nomenclatura do grafo como subíndice,  $\text{dist}_G(v, w)$  seria uma operação que calcula a distância entre dois vértices  $v$  e  $w$  no grafo  $G$  enquanto  $\text{dist}_H(v, w)$  realizaria a mesma operação no grafo  $H$ .

## 2.2 Complexidade de algoritmos

Uma área da Ciência da Computação que teve um grande e rápido crescimento no últimos 25 anos é o campo de *Algoritmos e Teoria da Complexidade* - em particular, o desenvolvimento e análise de algoritmos computacionais. O objetivo de pesquisa nesta área é o de estudar a natureza dos problemas que podem ser resolvidos através de um computador digital, para fornecer soluções para problemas resolvíveis, assim como classificá-los em categorias dependendo do seu grau de dificuldade ou intratabilidade.

Formalmente, um problema algorítmico  $\pi$  consiste de um conjunto  $D$  de todas as possíveis entradas para o problema, chamado *conjunto de instâncias*, e de uma *questão*  $Q$  sobre estas instâncias. Resolver um problema algorítmico é desenvolver um algoritmo cuja entrada é uma instância do problema e cuja saída é uma resposta à questão do problema.

Um problema é dito de *decisão* quando a questão exige uma resposta do tipo SIM ou NÃO. Como exemplo, seja  $\pi$  o seguinte problema: “Dado um grafo  $G$ , reconhecer se  $G$  é um cografo.” O conjunto de instâncias de  $\pi$  é obviamente o conjunto de todos os grafos. O problema  $\pi$  pode ser assim esquematizado:

Instância genérica de  $\pi$ : um grafo  $G$ .

Questão:  $G$  é cografo?

Fica evidente que o problema  $\pi$  acima é um problema de decisão, em particular, um *problema de reconhecimento*. Resolver  $\pi$  significa elaborar um algoritmo de reconhecimento de cografos.

Dizemos que um algoritmo é *polinomial* quando sua complexidade de tempo (medida do número de passos que o algoritmo efetua) é uma função polinomial no tamanho da sua entrada. Os problemas de decisão para os quais existem algoritmos polinomiais constituem a classe P. Tais problemas são chamados *polinomiais*.

Um problema de decisão é *não-determinístico polinomial* quando qualquer instância que produz resposta SIM possui um *certificado* sucinto, isto é, uma comprovação de que a resposta SIM é de fato verificável em tempo polinomial no tamanho da instância. Esta classe de problemas de decisão é a classe NP.

A classe Co-NP é formada pelos problemas que possuem um certificado sucinto para as instâncias que produzem resposta NÃO.

Sejam  $\pi_1(D_1, Q_1)$  e  $\pi_2(D_2, Q_2)$  dois problemas de decisão. Uma *transformação* ou

*redução polinomial* de  $\pi_1$  em  $\pi_2$  é uma função  $f : D_1 \rightarrow D_2$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- $f$  pode ser calculada em tempo polinomial;
- para toda instância  $I \in D_1$ , tem-se que  $I$  produz resposta SIM para  $\pi_1$  se e somente se  $f(I)$  produz resposta SIM para  $\pi_2$ .

Um problema de decisão  $\pi$  pertence à classe *NP-completo* quando as seguintes condições são satisfeitas:

- $\pi \in \text{NP}$ ;
- para todo problema  $\pi' \in \text{NP}$  existe uma transformação polinomial de  $\pi'$  em  $\pi$ .

Um problema pertencente à classe *NP-completo* é chamado *NP-completo*. Para provar que um certo problema  $\pi$  é NP-completo, basta mostrar que  $\pi \in \text{NP}$  e que existe uma transformação de um problema NP-completo  $\pi'$  em  $\pi$ .

Analogamente, prova-se que um problema de decisão  $\pi$  pertence à classe *Co-NP-completo* (e, neste caso,  $\pi$  é dito *Co-NP-completo*) quando  $\pi \in \text{Co-NP}$  e existe um problema  $\pi'$  (Co-)NP-completo tal que:

- se  $\pi'$  é NP-completo, existe uma função  $f$  que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância  $I'$  de  $\pi'$ , tem-se que  $I'$  produz SIM para  $\pi'$  se e somente se  $I = f(I')$  produz NÃO para  $\pi$ ;
- se  $\pi'$  é Co-NP-completo, existe uma função  $f$  que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância  $I'$  de  $\pi'$ , tem-se que  $I'$  produz NÃO para  $\pi'$  se e somente se  $I = f(I')$  produz NÃO para  $\pi$ .

Como fonte de referências para esta seção, indicamos [12, 30].

## 2.3 Cografos

Uma classe de grafos perfeitos bastante estudada é a classe dos *cografos* já que muitos problemas difíceis podem ser resolvidos eficientemente nesta classe. Nos anos 70 diversos pesquisadores estudaram os cografos independentemente, porém utilizando diferentes

definições e nomenclaturas. Jung, em [22], utilizou o termo grafo  $D^*$ . Seinsche em [27] trabalhou com grafos que não possuem subgrafos induzidos isomorfos ao  $P_4$ . Sumner, em [29], os chamou de grafos HD. Lerchs, em [23] e [24], introduziu o termo cografo e, como extensão de seus trabalhos, Stewart[28] desenvolveu um algoritmo polinomial de reconhecimento para grafos desta classe. Posteriormente foram desenvolvidos algoritmos que reconhecem se o grafo é um cografo em tempo linear [9, 13, 14].

Como definição, vamos dizer que um cografo é um grafo  $G = (V, E)$  que não possui caminho induzido com quatro vértices ( $P_4$ ) como subgrafo induzido, ou seja, é livre de  $P_4$ .

### 2.3.1 Co-árvore

Os cografos correspondem a uma subclasse dos grafos perfeitos e possuem uma representação baseada em árvores que facilita a resolução de diversos problemas. Tal representação é denominada *co-árvore*. Uma co-árvore  $T(G)$  é uma árvore representando um cografo  $G$ , onde os nós são rotulados tipo 1 ou tipo 0 e as folhas representam os vértices de  $G$ . Dois vértices são adjacentes se, e somente se, o primeiro ancestral comum é um nó tipo 1. Uma co-árvore possui uma alternância entre nós tipo 1 e tipo 0, ou seja, um nó tipo 1 terá apenas filhos tipo 0 ou folhas e um nó tipo 0 terá apenas filhos tipo 1 ou folhas. Duas co-árvores representando o mesmo grafo são isomorfas, portanto a co-árvore de um grafo  $G$  é única. É fácil observar que se a raiz da co-árvore for um nó tipo 0 o grafo será desconexo e caso seja um nó tipo 1 o grafo será conexo. Corneil et al. provou, em [8], que um grafo é um cografo se, e somente se, pode ser representado por uma co-árvore. Na Figura 2.1 mostramos exemplo de uma co-árvore e o grafo representado. Podemos notar a alternância entre os nós tipo 1 e tipo 0 e as adjacências de acordo com o ancestral comum mais próximo.

### 2.3.2 Sequência de operações para construção do cografo

Uma das formas para sabermos se um grafo  $G$  é um cografo baseia-se em uma construção recursiva. Ou seja, o grafo  $G$  possui uma sequência de operações consecutivas que o constrói. Assim, a sequência de operações inicia-se com um vértice inicial e cada uma das operações aplicadas gera um grafo intermediário, que é um subgrafo induzido, e apenas ao final das operações chegamos ao grafo  $G$ . As operações utilizadas na sequência de operações consiste em criar novos vértices, que são gêmeos verdadeiros ou gêmeos falsos de algum vértice existente no grafo intermediário. Assim, as operações são nomeadas:

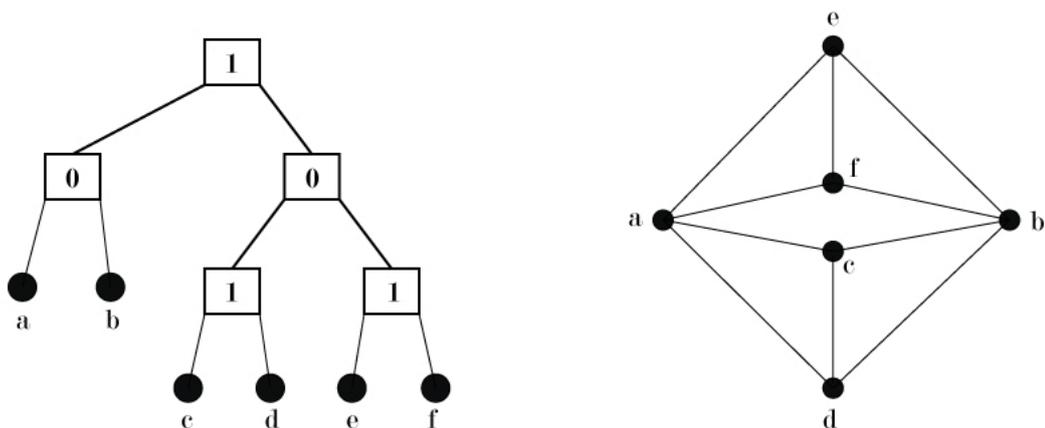


Figura 2.1: Exemplo de co-árvore e o grafo que representa.

gêmeo verdadeiro e gêmeo falso.

Formalmente, sejam  $G''$  e  $G'$  grafos intermediários, onde  $G'$  é gerado com uma operação em  $G''$ . A operação **gêmeo verdadeiro** aplicada ao vértice  $v$  gerando gêmeo  $w$  tal que  $V(G') = V(G'') \cup \{w\}$  e  $N(w) = N[v]$  e a operação **gêmeo falso** aplicada ao vértice  $v$  gerando gêmeo  $w$  tal que  $V(G') = V(G'') \cup \{w\}$  e  $N(w) = N(v)$ . A Figura 2.2 mostra um exemplo de cada operação sobre o vértice  $a$  do grafo. Nesta figura o vértice  $b$  é gerado pela respectiva operação no vértice  $a$ . Dizemos que  $w$  é *descendente* de  $v$ , se o vértice  $w$  foi gerado com uma operação no vértice  $v$ .

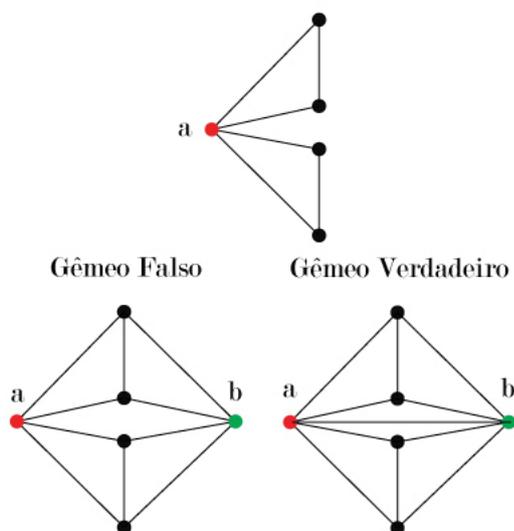


Figura 2.2: Exemplos de operações que constroem o cografo.

## 2.4 Grafos de distância hereditária

Uma outra classe de grafos perfeitos é a classe dos grafos de distância hereditária (DHG - *distance hereditary graph*). Os grafos de distância hereditária constituem uma superclasse dos cografos. Os primeiros estudos destes grafos foram realizados por Edward Howorka em [20], que provou que os DHG's são uma subclasse dos grafos perfeitos[26].

Os grafos de distância hereditária são conhecidos por possuírem a mesma distância entre quaisquer dois vértices independentemente do caminho escolhido. Dessa forma, dado um grafo de distância hereditária  $G$ , se existe um caminho entre dois vértices  $u, v$  em um subgrafo induzido  $H$ , então este caminho possui o mesmo comprimento em  $H$  e em  $G$ . Definimos esta caracterização formalmente no Teorema 2.1.

**Teorema 2.1** *Um grafo  $G$  é um grafo de distância hereditária se, e somente se, para todo  $V' \subset V(G)$ ,  $x \in V'$  e  $y \in V'$  que existe caminho entre  $x$  e  $y$  no subgrafo induzido  $V'$ , então  $dist_G(x, y) = dist_{G[V']}(x, y)$ .*

Os grafos DHG também podem ser construídos recursivamente por uma sequência de operações. Uma sequência de operações  $S$  aplicada no vértice inicial  $v$ , que gera grafos intermediários assim como cografo, consiste em operações **gêmeo verdadeiro**, **gêmeo falso** e **pendente**.

Na Figura 2.3 mostramos as duas operações já apresentadas na classe cografo e a operação **pendente**.

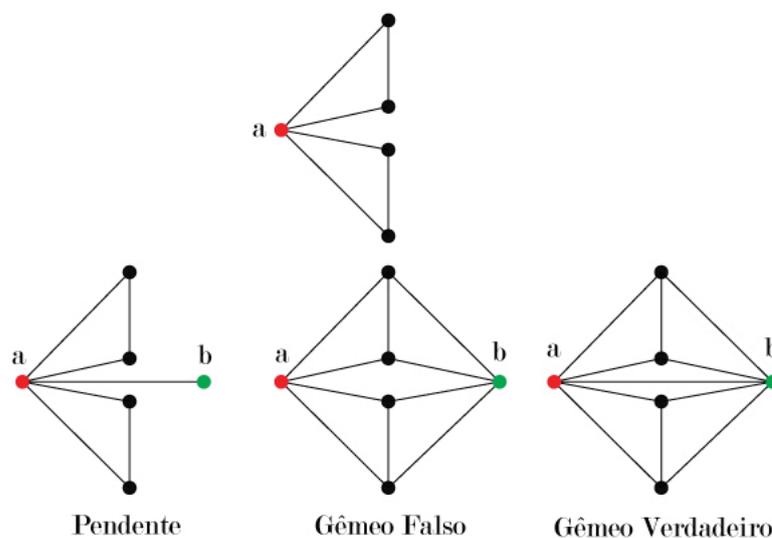


Figura 2.3: Exemplos das três operações que constroem um DHG.

As operações **gêmeo verdadeiro** e **gêmeo falso** são idênticas às operações definidas para construção recursiva do cografo e a operação **pendente** consiste em adicionar um vértice pendente ao grafo. Ou seja, a operação **pendente** aplicada sobre um vértice  $v$  gera um vértice  $w$  tal que  $N(w) = \{v\}$ . Neste trabalho utilizaremos a notação  $S = O_{v_1}^1, O_{v_2}^2, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ , para denotar a sequência de operações que constrói um grafo DHG, cada operação  $O_{v_i}^i$  pode ser  $P$ -pendente,  $T$ -gêmeo verdadeiro ou  $F$ -gêmeo falso, os índices  $i$  denotam a ordem que as operações são realizadas e  $v_i$  é o vértice ao qual a operação é realizada.

Vale ressaltar, que a sequência de operações para construir um grafo  $G$  não é única. Por exemplo, seja  $G$  um grafo tal que contenha apenas dois vértices  $v$  e  $w$  e sejam adjacentes ( $K_2$ ), uma operação **pendente** em  $v$  ou uma operação **gêmeo falso** em  $w$  gerariam vértices  $p$  e  $q$ , respectivamente, tal que ambos seriam apenas adjacentes a  $v$ , logo os dois grafos gerados seriam isomorfos contendo diferentes sequências de operações. Um exemplo mais elaborado é o grafo apresentado na Figura 2.4, com duas sequências diferentes para sua construção.

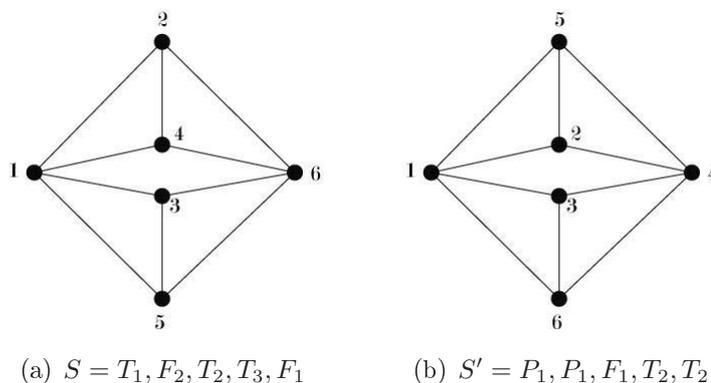


Figura 2.4: Duas sequências de operações diferentes que constroem dois grafos isomorfos.

### 2.4.1 Outras caracterizações de grafos de distância hereditária

Além do reconhecimento por construção, os grafos DHG podem ser caracterizados através de subgrafos proibidos. Esta caracterização foi mostrada por Bandelt e Mulder, em [1]:

**Teorema 2.2** ([Bandelt e Mulder[1]]) *Um grafo  $G$  é DHG se, e somente se, não possui casa, buraco, dominó e leque como subgrafo induzido.*

O grafo casa é o grafo composto pelos vértices  $\{a, b, c, d, e\}$  e arestas  $\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (c, e), (d, e)\}$ .

O grafo buraco é um  $C_k$  com  $k \geq 5$ .

O grafo dominó é o grafo composto pelos vértices  $\{a, b, c, d, e, f\}$  e arestas  $\{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (c, e), (e, f), (d, f)\}$ .

O grafo leque é o grafo composto pelos vértices  $\{a, b, c, d, e\}$  e arestas  $\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (c, d), (d, e)\}$ .

Na Figura 2.5 mostramos os grafos proibidos para que um grafo  $G$  seja DHG.

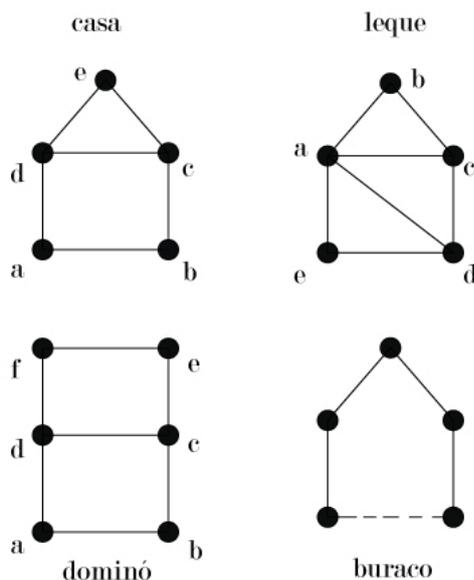


Figura 2.5: Subgrafos proibidos para grafos distância hereditária.

Assim, dadas as caracterizações mencionadas nos teoremas anteriores para os grafos de distância hereditária, segue o Teorema 2.3.

**Teorema 2.3** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $G$  é um grafo de distância hereditária;
- (ii) Para todo  $V' \subset V(G)$ ,  $x \in V'$  e  $y \in V'$  que existe caminho entre  $x$  e  $y$  no subgrafo induzido  $V'$ , então  $\text{dist}_G(x, y) = \text{dist}_{G[V']}(x, y)$ ;
- (iii) Casa, buraco, leque e dominó não são subgrafos induzidos de  $G$ , i.e.,  $G$  é livre de (casa, buraco, leque, dominó)[1];
- (iv) Todo ciclo com pelo menos cinco vértices de  $G$  possui duas cordas que se cruzam[26].

# Capítulo 3

## Partição- $(k, l)$ em Classes de Grafos

Um problema bastante estudado em Teoria dos Grafos é o problema da partição em grafos, que consiste em particionar o conjunto de vértices de um grafo em subconjuntos satisfazendo certas propriedades que podem ser internas ou externas aos conjuntos. Um problema que se insere neste contexto é o problema da partição- $(k, l)$ . A seguir apresentamos o problema partição- $(k, l)$  e o estado da arte do problema.

### 3.1 Grafos- $(k, l)$

Uma classe muito importante para esta dissertação é a classe dos *grafos- $(k, l)$* , ou simplesmente  $(k, l)$ . Esta classe foi definida em 1996, por Brandstädt[2]. Um grafo  $G$  é  $(k, l)$ , se seu conjunto de vértices  $V(G)$  pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $l$  cliques. Observe que os grafos  $(k, 0)$  são os grafos  $k$ -coloríveis, pois os grafos que pertencem a esta classe podem ser particionados em  $k$  conjuntos independentes e zero cliques. Em [2] e [4], Brandstädt apresentou um algoritmo eficiente para reconhecer as classes  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 2)$  e mostrou que reconhecer grafos  $(k, l)$  com  $k \geq 3$  ou  $l \geq 3$  é um problema NP-Completo. Essa classe é uma generalização dos grafos *split*, que são os grafos que podem ser particionados em um conjunto independente e uma clique, ou seja correspondem aos grafos  $(1, 1)$ . Grafos split podem ser reconhecidos em tempo polinomial[15].

Como o problema de reconhecer o grafo  $(k, l)$  é NP-Completo para  $k \geq 3$  ou  $l \geq 3$ , diversos trabalhos foram desenvolvidos para reconhecer se um dado grafo  $G$  é  $(k, l)$  quando o grafo de entrada  $G$  pertence a certa classe de grafos. Em geral, esses estudos tem sido feitos em subclasses de grafos perfeitos: cordais, cografos,  $P_4$ -esparsos, etc.

### 3.1.1 Grafos cordais- $(k, l)$

Uma subclasse bastante estudada dos grafos perfeitos são os grafos *cordais*. Os grafos cordais também são conhecidos como grafos triangulados. Um grafo é cordal se, e somente se, todo ciclo  $C$  com quatro vértices possui corda.

É fácil ver que a classe dos grafos cordais não está contida na classe de grafos de distância hereditária e que a classe dos grafos de distância hereditária não está contida na classe dos grafos cordais, já que possuímos o grafo leque que pertence aos cordais, mas não pertence aos DHG; e temos o ciclo com quatro vértices sem cordas que pertence aos DHG mas não pertence aos cordais.

Uma das caracterizações dos grafos cordais é baseada em uma ordem especial de vértices, chamada *esquema de eliminação perfeita*. Dizemos que um vértice  $v$  é *simplicial* se  $G[N(v)]$  é uma clique (não necessariamente maximal). Dessa forma, seja  $\sigma = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  uma ordenação de vértices. Dizemos que  $\sigma$  é um esquema de eliminação perfeita se cada  $v_i$  é um vértice simplicial no grafo induzido  $G[v_i, v_{i+1}, \dots, v_n]$ . Assim um grafo é cordal se, e somente se, possui uma ordem de eliminação perfeita [11]. E utilizando esta ordem de eliminação perfeita podemos fazer seu reconhecimento em tempo linear.

O problema de decisão dos grafos cordais- $(k, l)$  consiste em decidir se um dado grafo cordal  $G$  é  $(k, l)$  ou não. Dessa forma, temos como entrada do problema um grafo cordal  $G$  e como saída a resposta “sim” ou “não” para pergunta “ $G$  é  $(k, l)$ ?”.

#### Problema de decisão dos grafos cordais- $(k, l)$

**Entrada:** Um grafo cordal  $G$ .

**Saída:** “ $G$  é  $(k, l)$ ?”.

Os grafos cordais- $(k, l)$  foram estudados e caracterizados em Hell et al.[17]. Os grafos cordais- $(k, l)$  foram caracterizados por subgrafos proibidos como segue:

**Teorema 3.1** *Um grafo cordal  $G$  é  $(k, l)$  se, e somente se, não contém  $(l + 1)K_{k+1}$  como subgrafo induzido, isto é,  $l + 1$  cópias isoladas de um completo com  $k + 1$  vértices.*

Assim, por exemplo, um cordal  $G$  é  $(2, 1)$  se, e somente se, não contém  $2K_3$ . A Figura 3.1 mostra o grafo  $2K_3$ .

Além disso, outros trabalhos foram desenvolvidos no contexto de partição de grafos e de partição com listas de grafos para grafos cordais [16, 18].

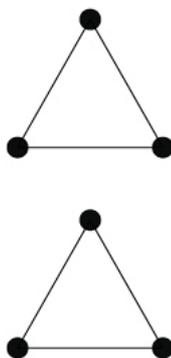


Figura 3.1: Grafo proibido para cordal- $(2, 1)$ .

### 3.1.2 Cografos- $(k, l)$

Na seção 2.3 do capítulo anterior, definimos a classe cografos. Nesta subseção iremos apresentar a caracterização dos cografos que podem ser particionados em  $k$  conjuntos independentes e  $l$  cliques, chamados *cografos- $(k, l)$* .

O problema de decisão dos cografos- $(k, l)$  consiste em decidir se um dado cografo  $G$  é  $(k, l)$  ou não. Dessa forma, temos como entrada do problema um cografo  $G$  e como saída a resposta “sim” ou “não” para pergunta “ $G$  é  $(k, l)$ ?”.

#### Problema de decisão dos cografos

**Entrada:** Um cografo  $G$ .

**Saída:** “ $G$  é  $(k, l)$ ?”.

Bravo, Nogueira e Klein caracterizaram os cografos- $(k, l)$  por subgrafos proibidos em [6, 7].

Antes de apresentar a caracterização dos cografos- $(k, l)$ , faz-se necessário introduzir duas operações entre grafos. Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos e  $J$  o grafo resultante da operação, a operação *join*:  $J = G + H$  indica  $V(J) = V(G) \cup V(H)$  e  $E(J) = E(G) \cup E(H) \cup \{(v, w) \mid v \in G, w \in H\}$ ; e a operação *union*:  $J = G \cup H$  indica  $V(J) = V(G) \cup V(H)$  e  $E(J) = E(G) \cup E(H)$ . Ou seja, a operação *join*(+) atribui todas as arestas entre os vértices dos diferentes grafos ( $G$  e  $H$ ) enquanto a operação *union*( $\cup$ ) os mantém isolados.

Em [5], Bravo et al. mostraram uma forma recursiva para se obter os subgrafos proibidos para os cografos- $(k, l)$ . Esta forma baseia-se em dispor uma matriz  $(k+1) \times (l+1)$  de pontos. A partir daí, fazem-se “cortes” verticais ou horizontais até que sobrem apenas linhas e colunas. Um corte vertical indica uma operação *join*(+) e um corte horizontal

indica uma operação  $union(\cup)$ , e cada coluna é um conjunto independente com  $i$  vértices ( $I_i$ ), onde  $i$  é o número de pontos que a coluna contém; e cada linha é uma clique com  $j$  vértices ( $K_j$ ), onde  $j$  é o número de pontos que a linha contém. A Figura 3.2 mostra um exemplo de grafo proibido para o cografo- $(2, 1)$  e o seu particionamento na matriz de pontos.

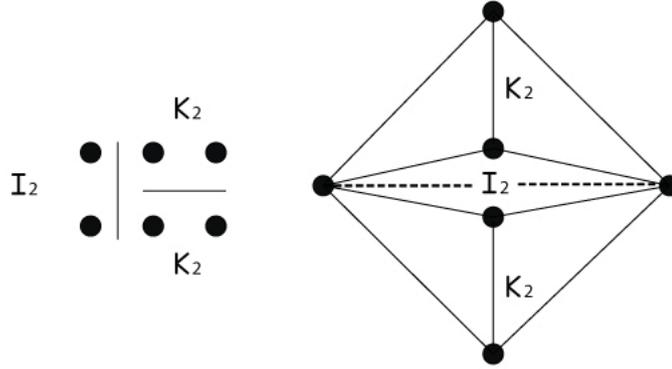


Figura 3.2: Exemplo de subgrafo proibido para cografo- $(2, 1)$ .

Assim, podemos interpretar a forma mostrada como uma função recursiva e os subgrafos proibidos para o cografo- $(k, l)$  são dados através da recursão a seguir:

- a)  $ProibidoCografo - (k, 0) = K_{k+1}$ ;
- b)  $ProibidoCografo - (0, l) = I_{l+1}$ ;
- c)  $ProibidoCografo - (k, l) = ProibidoCografo - (k, i-1) \cup ProibidoCografo - (k, j-1)$ ,  
onde  $i + j = l + 1$ ;
- d)  $ProibidoCografo - (k, l) = ProibidoCografo - (i-1, l) + ProibidoCografo - (j-1, l)$ ,  
onde  $i + j = k + 1$ .

Onde  $ProibidoCografo - (k, l)$  denota a família de subgrafos proibidos para o cografo- $(k, l)$ .

A base desta recursão são os subgrafos proibidos  $(k, 0)$  e  $(0, l)$  que representam as linhas e colunas e resultam em  $K_{k+1}$  e  $I_{l+1}$ , respectivamente. As chamadas recursivas simulam os diversos possíveis cortes, por exemplo, ao fazer-se um corte da primeira coluna, vamos ter  $i = 1$  e  $j = k$  colunas em cada lado (direito e esquerdo) do corte realizados, porém a quantidade de linhas se mantém  $l + 1$  em ambos os lados, assim como a matriz de pontos de dimensões  $(k' + 1) \times (l' + 1)$  nos dá um subgrafo proibido para cografo- $(k', l')$ . Temos que esta matriz representada por  $i \times (l + 1)$  representa o cografo  $(i - 1, l)$ , neste

caso  $(0, l)$ . Analogamente temos os cortes horizontais que dividem a quantidade de pontos verticais mas mantém a quantidade de pontos horizontais.

### 3.1.3 Grafos- $(k, l)$ em classes de grafos com poucos $P_4$

Algumas classes com poucos  $P_4$ 's, tais como:  $P_4$ -esparso e  $P_4$ -reduzível foram anteriormente caracterizadas em relação a partição- $(k, l)$ . A classe de grafos  $P_4$ -esparso fora definida inicialmente por Hoàng em [19] como um grafo  $G$  tal que para qualquer subconjunto  $Q \subseteq V(G)$  com cinco vértices,  $G[Q]$  induz no máximo um  $P_4$ . Hoàng ainda mostrou, no mesmo trabalho, que estes grafos são grafos perfeitos. Os  $P_4$ -reduzíveis foram introduzidos por Jamison e Olariu, em [21], como os grafos tais que cada vértice pertence a no máximo um  $P_4$ . É fácil ver que a classe  $P_4$ -reduzível contém a classe dos cografos, pois os cografos não possuem  $P_4$  induzidos; da mesma forma é fácil ver que os grafos  $P_4$ -reduzíveis estão contidos nos grafos  $P_4$ -Esparsos, pois satisfazem a condição de que para qualquer conjunto com cinco vértices existe no máximo um  $P_4$ . Logo:

$$\text{cografos} \subset P_4 - \text{reduzível} \subset P_4 - \text{esparso}$$

Bravo et al., em [5], provou que os subgrafos proibidos para  $P_4$ -esparso- $(k, l)$  são exatamente os mesmos proibidos para os cografos- $(k, l)$ .

### 3.1.4 Grafos de distância hereditária-(2, 1)

Uma subclasse de grafos perfeitos que possui estudos em relação ao particionamento de seu conjunto de vértices é a classe de grafos de distância hereditária, apresentada no capítulo anterior. Nesta subseção vamos comentar a caracterização dos grafos de distância hereditária que podem ser particionados em dois conjuntos independentes e uma clique, chamados  $DHG$ -(2, 1). Observe que esses grafos são exatamente os grafos  $DHG$  que possuem uma clique que toca todos os ciclos sem cordas do grafo.

Em [3], foi provado que um grafo é  $DHG$ -(2, 1) se, e somente se, é livre de  $(G_1, G_2, G_3, G_4)$ . Os grafos  $G_1, G_2, G_3$  e  $G_4$  são apresentados na Figura 3.3.

Este estudo teve por objetivo caracterizar os grafos  $DHG$  que possuem cliques que toquem todos os ciclos sem cordas do grafo - observe que no caso de  $DHG$ , os grafos não possuem ciclos sem cordas maiores que quatro, e portanto deve-se tocar todos os ciclos de tamanho três e quatro. Porém tocar todos os ciclos de tamanho três, também pode

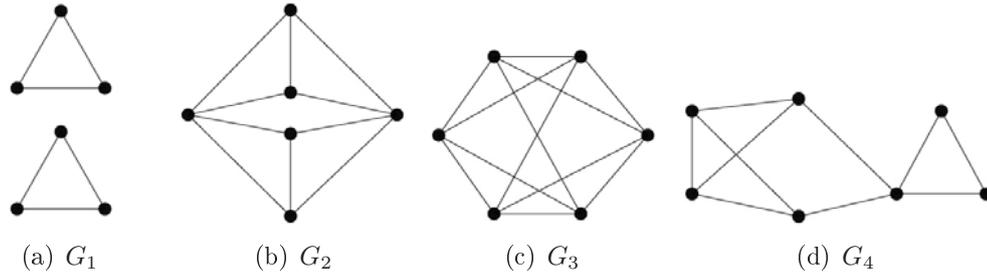


Figura 3.3: Subgrafos proibidos para DHG- $(2, 1)$ .

ser interpretado como tocar todos os triângulos do grafo. Dessa forma, como corolário do teorema provado temos o resultado de que os grafos proibidos para DHG- $(2, 1)$  são os grafos  $(G_1, G_2, G_3, G_4)$ .

Dentre os quatro grafos proibidos, é interessante observar que apenas  $G_4$  não é um grafo proibido para o cografo- $(2,1)$ , pois é o único que não é cografo, quanto aos demais, todos seguem a recursão para definição dos proibidos para cografo- $(2, 1)$ .

- $G_1 = \text{ProibidoCografo} - (2, 0) \cup \text{ProibidoCografo} - (2, 0) = 2K_3$
- $G_2 = \text{ProibidoCografo} - (0, 1) + (\text{ProibidoCografo} - (1, 0) \cup \text{ProibidoCografo}(1, 0)) = I_2 + 2K_2$
- $G_3 = \text{ProibidoCografo} - (0, 1) + \text{ProibidoCografo} - (0, 1) + \text{ProibidoCografo}(0, 1) = I_2 + I_2 + I_2$

A prova apresentada em [3] segue do fato que uma operação **pendente** não gera novos ciclos, portanto não pode ser a última operação na sequência de operações de um proibido minimal  $G$ . Assim, resta analisar os casos em que a última operação é **gêmeo verdadeiro** ou **gêmeo falso**. Observa-se o fato de que se o grafo  $G$  é um proibido minimal, então o grafo  $G' = G[V(G) \setminus \{y\}]$  (onde  $y$  é o vértice gerado na última operação) é um grafo que contém uma clique que toca todos os ciclos, onde  $y$  é o vértice gerado na última operação da sequência de operações.

No caso em que a última operação, aplicada no vértice  $x$  gerando o vértice  $y$ , é **gêmeo falso**, observa-se que  $x$  deve estar na clique  $Q$  que toca todos os ciclos em  $G'$ , caso contrário  $y$  não geraria nenhum novo ciclo não tocado por  $Q$ . Nestes termos, esta operação levaria aos grafos  $G_2, G_3$  e  $G_4$ , em diferentes casos.

No caso em que a última operação, aplicada no vértice  $x$  gerando o vértice  $y$ , é **gêmeo verdadeiro**, observa-se que  $x$  não deve estar na clique  $Q$  que toca todos os ciclos em

$G'$ , caso contrário  $G[Q \cup \{y\}]$  seria clique e tocaria todos os novos ciclos criados. Nestes termos, a operação levaria aos grafos  $G_1, G_2$  e  $G_4$ , em diferentes casos.

### 3.1.5 $M$ -partição

Uma definição mais geral de partição de grafos é a  $M$ -partição. A  $M$ -partição foi inicialmente introduzida por Feder et al. em [10] como: Seja  $M$  uma matriz simétrica  $m \times m$  com valores  $M_{ij} \in \{0, 1, *\}$ . Uma  $M$ -Partição de um grafo  $G$  é uma partição de vértices em  $m$  partes, indexada pelas linhas (e colunas) da matriz  $M$ , tal que, para vértices distintos  $x$  e  $y$  do grafo  $G$ , alocados em conjuntos  $i$  e  $j$  (possivelmente  $i = j$ ) respectivamente, temos:

- Se  $M(i, j) = 0$ , então  $(x, y) \notin E(G)$ ;
- Se  $M(i, j) = 1$ , então  $(x, y) \in E(G)$ ; e
- Se  $M(i, j) = *$ , não podemos afirmar nada sobre a existência ou não da aresta entre os conjuntos  $i$  e  $j$  no grafo  $G$ ;

Observe que os valores apresentados da diagonal definem a característica do conjunto, 1 implica dizer que o conjunto é uma clique; 0 implica dizer que é um conjunto independente; e  $*$  é um conjunto sem restrições internas. Além dos elementos da diagonal principal temos os elementos que não estão na diagonal principal de  $M$  são o que chamamos de restrições externas, pois regulam as adjacências entre os diferentes conjuntos.

Uma instância do problema de  $M$ -partição é um grafo  $G$  e a solução é uma matriz  $M$  que particione  $G$ . Nas matrizes abaixo mostramos:  $M_1$ , uma matriz que particiona o grafo em duas cliques e um conjunto independente e não possui restrições externas entre os conjuntos;  $M_2$ , uma matriz que particiona o grafo em duas cliques e um conjunto independente e todos os vértices do conjunto independente são adjacentes a todos os vértices das duas cliques.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

É fácil observar que uma matriz que tenha uma linha ou coluna composta por \* pode particionar qualquer grafo. Pois, qualquer vértice poderia compor o conjunto representado pelo \* na diagonal. Extrapolando as condições, podemos dizer que qualquer matriz que contenha um \* na diagonal principal pode representar qualquer grafo  $G$  independente das dimensões da matriz, pois podemos dizer que o conjunto  $i$  tal que é representado na matriz por \* contém todos os vértices do grafo  $G$ , ou seja  $V(M_i) = V(G)$ , como os outros conjuntos  $M_j | j \neq i$  são vazios, sabemos que as restrições externas são cumpridas.

## 3.2 Co-coloração

Em Teoria dos Grafos o problema de *co-coloração* de um grafo  $G$  significa atribuir cores aos vértices, tal que cada cor seja atribuída a um conjunto independente em  $G$  ou a um conjunto independente em seu complemento (uma clique em  $G$ ). O *número co-cromático*  $z(G)$  é o menor número de cores que são necessárias para colorir todo o grafo  $G$ . Este problema pode ser interpretado de diversas maneiras. Em particular, pode ser interpretado através da  $M$ -partição e da partição- $(k, l)$ , mencionados anteriormente. Ambos os casos nos levam a uma co-coloração do grafo, porém não necessariamente ao número co-cromático. Este problema foi inicialmente estudado em [25], onde Lesniak e Straight nomearam o problema. A Figura 3.4 exemplifica um grafo 3-cocolorível, neste caso com dois conjuntos independentes e uma clique no grafo  $G$  e um conjunto independente e duas cliques no grafo  $\overline{G}$ .

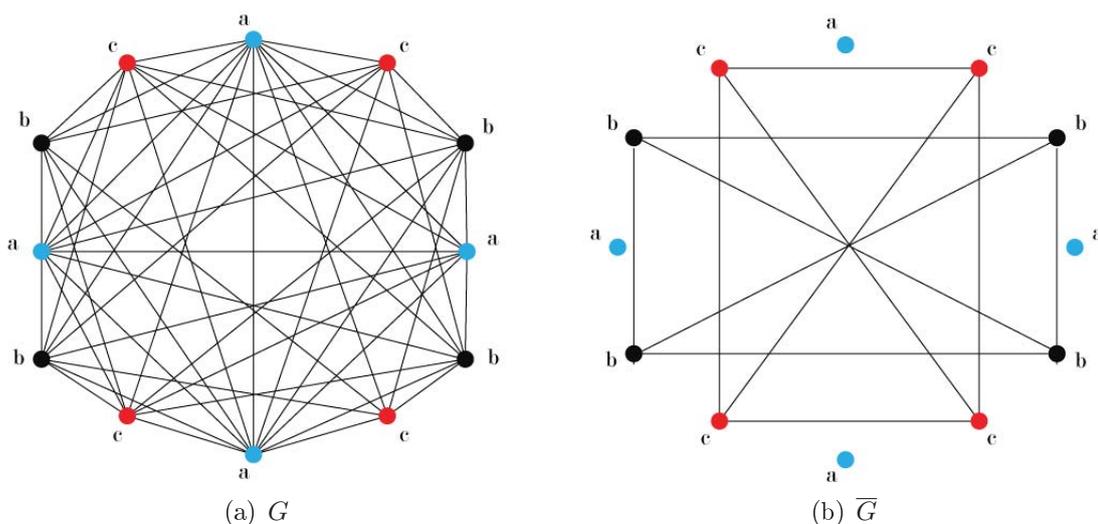


Figura 3.4: Um grafo 3-cocolorível.

Uma vez que a co-coloração de um grafo  $G$  significa buscar por cliques e conjuntos independentes, podemos reduzir o problema a resolver uma  $M$ -partição. Pois o grafo  $G$  é

$p$ -co-colorível se, e somente se, possui uma matriz  $M$  ( $p \times p$ ) com elementos da diagonal  $M_{ii} \in \{0, 1\}$  que particione  $G$ . Pois, se existe uma matriz  $M$ , simétrica  $p \times p$ , com elementos da diagonal 0 ou 1, quer dizer que temos  $i$  conjuntos independentes e  $j$  cliques tal que  $i + j = p$ , e logo cada um deles pode receber uma cor e temos uma co-coloração para  $G$ . Se temos uma co-coloração com  $p$  cores, então temos  $i$  conjuntos independentes em  $G$  e  $j$  cliques (conjuntos independentes em  $\overline{G}$ ), que podem ser representados na matriz  $M$ , simétrica  $p \times p$ , com os primeiros  $i$  elementos da diagonal principal com valor 0, e os próximos  $j$  elementos da diagonal principal com 1, o restante dos elementos de  $M$  pode ser \* sem prejuízo semântico.

Dessa forma, encontrar o número co-cromático de  $G$ , significaria resolver um problema de minimização, que em  $M$ -partição significaria encontrar o menor valor de  $m$ , tal que seria possível representar o grafo em forma de matriz com diagonal principal contendo apenas  $\{0, 1\}$ ; e em partição- $(k, l)$  significaria encontrar o menor valor da soma  $k + l$ , tal que seria possível particionar o grafo em  $k$  conjuntos independentes e  $l$  cliques. Ainda é fácil ver, que um grafo  $G$  é  $p$ -co-colorível, se existe  $k + l \leq p$  tal que o grafo respeita a partição- $(k, l)$ .

# Capítulo 4

## Grafo de distância hereditária- $(k, l)$

Neste capítulo vamos discutir os grafos de distância hereditária- $(k, l)$ . Mais especificamente, estudaremos o problema de partionamento dos grafos de distância hereditária em conjuntos independentes e cliques. Iniciamos este capítulo apresentando algumas definições necessárias para o seu entendimento, definimos formalmente o problema e, por fim, apresentamos uma caracterização por subgrafos proibidos, também chamados de obstruções, dos grafos de distância hereditária- $(k, 1)$ .

### 4.0.1 Notações Adicionais

No contexto de cliques e vizinhança, a notação  $\mathcal{Q}_{k+1}(v)$  denota o conjunto de todas as cliques de tamanho  $k + 1$  que contenham o vértice  $v$ . Assim, denotamos um elemento do conjunto  $Q \in \mathcal{Q}_{k+1}(v)$  por  $\mathcal{K}_{k+1}[v]$ .

Dizemos que um grafo  $G$  é  $(k, l)$ -particionável se  $V(G)$  pode ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $l$  cliques. Neste trabalho consideramos  $l = 1$ .

Como observado anteriormente, a classe dos cografos está contida na classe dos grafos de distância hereditária. Cografos- $(k, l)$  já foram caracterizados em [5, 6]. No que segue, vamos considerar os grafos de distância hereditária que não sejam cografos. Tal classe será denotada por EDHG (grafos especiais de distância hereditária). Assim,  $\text{EDHG} = \text{DHG} \setminus \text{Cografo}$ , ou seja, são os grafos de distância hereditária que contêm  $P_4$  como subgrafo induzido. Daqui em diante, o termo “obstrução minimal EDHG- $(k, l)$ ” será utilizado para designar uma obstrução minimal para a classe EDHG- $(k, l)$ , que são os grafos EDHG e são  $(k, l)$ -particionáveis.

Seja  $G$  um grafo. Dizemos que um conjunto  $C \subseteq V(G)$  intercepta (toca) outro

conjunto  $H \subseteq V(G)$ , quando  $C \cap H \neq \emptyset$ . Ou seja,  $C$  toca  $H$  se possui algum vértice que também está em  $H$ .

Seja  $G$  um grafo. Um  $K_{k+1}$  transversal  $T$  de  $G$  consiste num conjunto de vértices que induz uma clique em  $G$  e intercepta todas as cliques de tamanho  $k+1$  de  $G$ , i.e.,  $G' = G[V(G) \setminus T]$  não contém cliques de tamanho  $k+1$ . Observe que em casos em que  $G$  é perfeito,  $G' = G[V(G) \setminus T]$  será um grafo  $k$ -colorível.

Para facilitar o entendimento deste trabalho, faremos uso de representações gráficas para exprimir as relações de adjacência entre dois conjuntos de vértices  $A, B \subseteq V(G)$  de um grafo  $G$ . Quando para todo par de vértices  $v \in A$  e  $w \in B$ ,  $(v, w) \notin E(G)$ , representaremos tal relação de adjacência por dois círculos sem arestas entre eles ( $A$  e  $B$ ), escrevendo  $A \cup B$ ; quando não pudermos afirmar a presença ou não de arestas entre os vértices de  $A$  e  $B$  utilizaremos uma linha simples conectando os dois conjuntos e denotamos por  $A \overline{\text{---}} B$  tal situação; e quando para todo par de vértices  $v$  e  $w$ ,  $v \in A$  e  $w \in B$  implicar em  $(v, w) \in E(G)$  indicaremos a relação de adjacência entre  $A$  e  $B$  por duas linhas paralelas conectando os dois conjuntos, denotando por  $A + B$ . A Figura 4.1 mostra as formas de adjacências citadas acima.

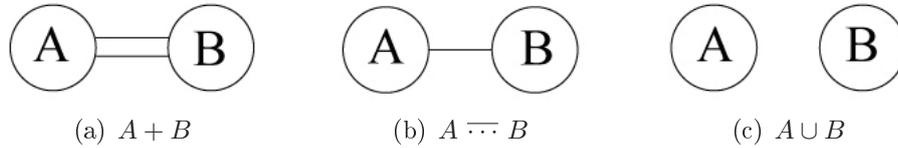


Figura 4.1: Adjacência entre conjuntos.

## 4.1 Definição do problema

No capítulo anterior mostramos diversas classes de grafos nas quais os grafos- $(k, l)$  foram caracterizados. Uma forma comum apresentada foi a caracterização dos grafos- $(k, l)$  por subgrafos proibidos.

Neste capítulo vamos propor uma caracterização por subgrafos proibidos para grafos de distância hereditária- $(k, 1)$ . Ou seja, vamos definir uma família  $\mathcal{F}$  de grafos tais que:

**Teorema 4.1** *Dado um grafo de distância hereditária  $G$ ,  $G$  é  $(k, 1)$ -particionável se, e somente se, é livre de grafos da família  $\mathcal{F}$ .*

Os subgrafos proibidos para os cografos- $(k, l)$  foram definidos em [6, 7]. Como cografo  $\subset$  DHG, os subgrafos proibidos para os cografos- $(k, l)$  também são subgrafos proibidos

para os grafos de distância hereditária- $(k, l)$ . Desta forma vamos nos ater a caracterizar por subgrafos proibidos os grafos EDHG- $(k, 1)$ .

## 4.2 Caracterização de EDHG- $(k, 1)$

Nesta seção apresentamos o resultado principal desta dissertação, o teorema de caracterização dos grafos EDHG- $(k, 1)$ . Vamos provar lemas e teoremas a fim de definir famílias de grafos que são obstruções minimais EDHG- $(k, 1)$ , ou seja, família de grafos que não podem ser particionados em  $k$  conjuntos independentes e uma clique. Ainda, podemos dizer, que qualquer obstrução DHG- $(k, 1)$  contém algum desses grafos como subgrafo induzido ou possui uma obstrução minimal de cografo.

**Teorema 4.2** *Seja  $G$  um grafo EDHG. Então  $G$  é  $(k, 1)$ -particionável se, e somente se,  $G$  é livre de  $G_1$  e  $G_2$ .*

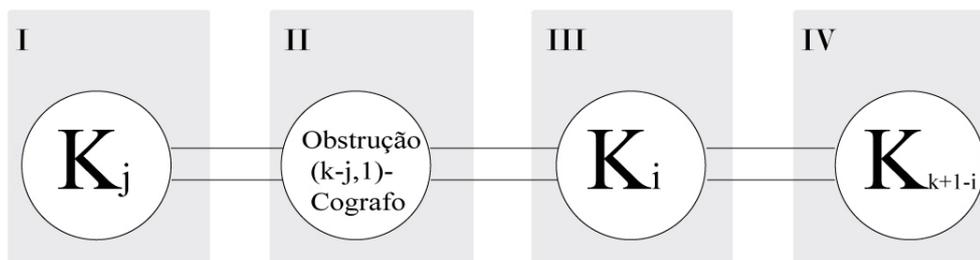


Figura 4.2:  $G_1$ ,  $2 \leq j \leq k$ ,  $i < j$ .

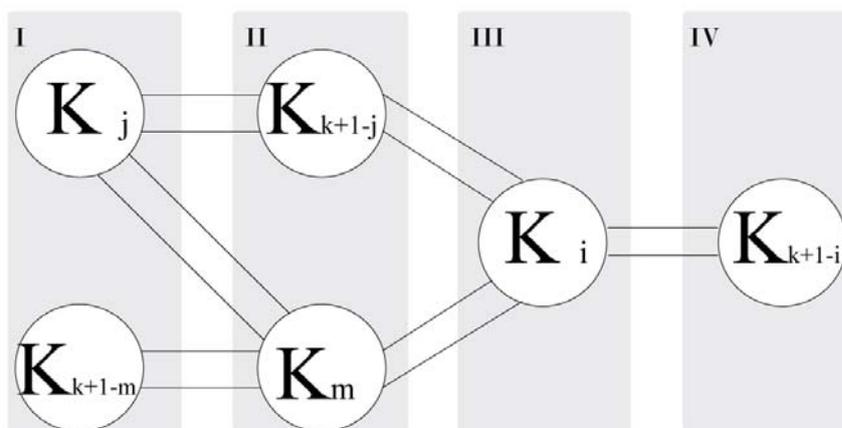


Figura 4.3:  $G_2$ ,  $2 \leq j \leq k$ ,  $i < j$ ,  $m < k + 1 - j$ .

Note que  $G_1$  corresponde na verdade a uma família de grafos e cada instância que respeite as restrições representa uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . O mesmo vale para  $G_2$ .

Nas subseções a seguir (4.2.1 e 4.2.2) vamos mostrar exemplos de grafos que respeitam as estruturas de  $G_1$  e  $G_2$  para diferentes valores de  $k$ .

### 4.2.1 Grafos proibidos para EDHG-(2, 1)

Na subseção 3.1.4, foram mostrados os subgrafos proibidos para os DHG-(2, 1). Dentre os proibidos mostrados, apenas o grafo 3.3(d) da Figura 3.3 pertence a classe EDHG. Portanto ele é o único grafo proibido para a classe EDHG-(2, 1).

É fácil ver que o subgrafo da Figura 3.3(d) é um grafo da família  $G_1$ , tal que  $j = 2$  e  $i = 1$ . Podemos ver que esta configuração ( $j = 2$  e  $i = 1$ ) é a única configuração que satisfaz as restrições da família  $G_1$  - ( $2 \leq j \leq k$  e  $i < j$ ); e não é possível satisfazer as restrições da estrutura de  $G_2$ , portanto o subgrafo da Figura 3.3(d) é o único subgrafo proibido para EDHG-(2, 1).

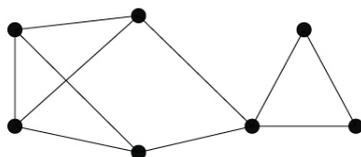


Figura 4.4: Subgrafo proibido para EDHG-(2, 1), um grafo da família  $G_1$  com  $j = 2$ ,  $i = 1$ .

### 4.2.2 Subgrafos proibidos para EDHG- $(k, 1)$

Nesta subseção vamos apresentar alguns subgrafos proibidos para EDHG- $(k, 1)$ , com diferentes valores de  $k$ . A Figura 4.5, por exemplo, mostra todos os subgrafos proibidos para os grafos EDHG-(3, 1). Cada um dos subgrafos apresentados na Figura 4.5 satisfaz as restrições de  $G_1$  ou de  $G_2$ . O subgrafo 4.5(a) é um elemento da família  $G_2$  com configuração  $j = 2$ ,  $m = 1$  e  $i = 1$ ; o subgrafo 4.5(b) é um elemento da família  $G_1$  com  $j = 2$  e  $i = 1$ , observe que neste caso o subgrafo proibido de cografo que está contido em  $II$  é o subgrafo  $2K_2$ ; o subgrafo 4.5(c) é um elemento da família  $G_1$  com  $j = 2$  e  $i = 1$ , observe que neste caso o subgrafo proibido de cografo que está contido em  $II$  é o subgrafo  $I_2 + I_2$ ; o subgrafo 4.5(d) é um elemento da família  $G_1$  com  $j = 3$  e  $i = 1$ ; e o subgrafo 4.5(e) é um elemento da família  $G_1$  com  $j = 3$  e  $i = 2$ ;

Para exemplificar melhor as variações das variáveis nas estruturas das famílias  $G_1$  e  $G_2$ . A Figura 4.6 mostra alguns subgrafos proibidos para outros valores de  $k$ . Os valores de  $k$  foram escolhidos de forma que pudemos mostrar variações nos valores de  $i$ ,  $j$  e  $m$ .

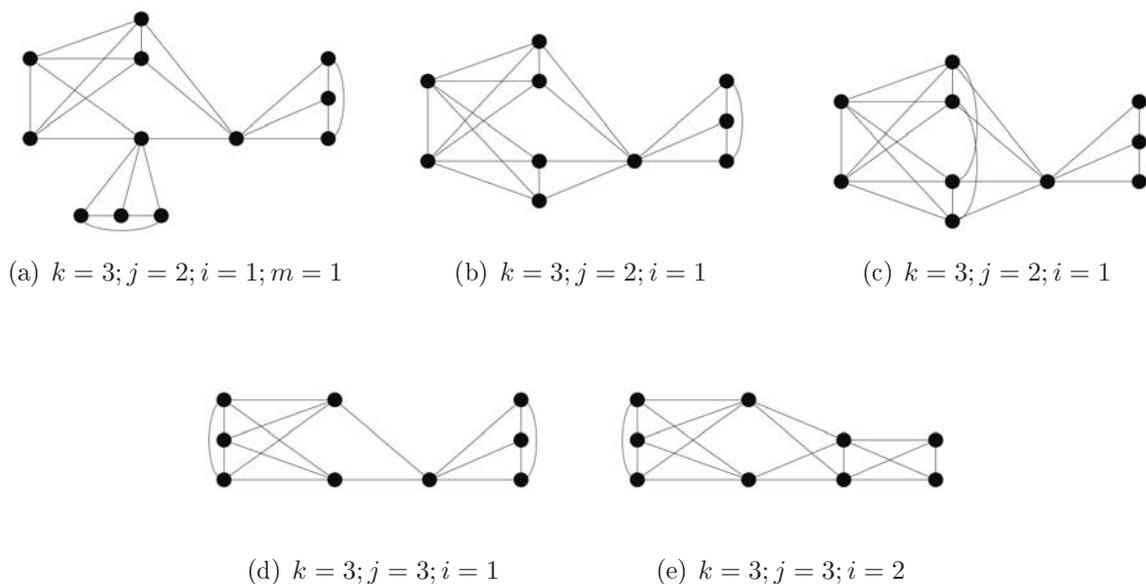


Figura 4.5: Subgrafos proibidos para EDHG- $(3, 1)$ .

O subgrafo 4.6(a) é uma obstrução da família  $G_2$ , com  $j = 3, i = 2$  e  $m = 1$ , para a classe EDHG- $(4, 1)$ ; O subgrafo 4.6(b) é uma obstrução da família  $G_2$ , com  $j = 3, i = 2$  e  $m = 2$ , para classe EDHG- $(5, 1)$  - observe que neste caso o valor de  $m$  pode ser 1 ou 2; o subgrafo 4.6(c) é uma obstrução da família  $G_1$ , com  $j = 3$  e  $i = 1$ , para classe EDHG- $(4, 1)$ ; o subgrafo 4.6(d) é uma obstrução da família  $G_1$ , com  $j = 3$  e  $i = 2$ , para classe EDHG- $(4, 1)$ .

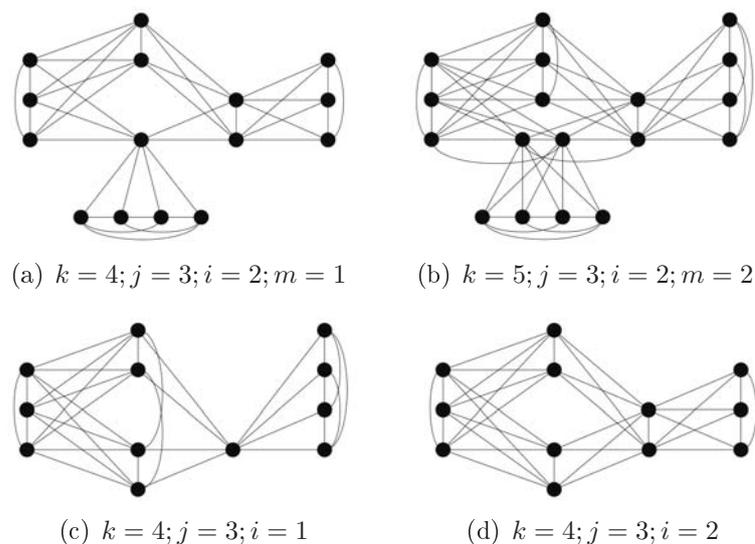


Figura 4.6: Subgrafos proibidos para EDHG- $(k, 1)$ .

**Prova.**  $(\Rightarrow)$  Segue diretamente do fato de que ambas as estruturas  $(G_1$  e  $G_2)$  não permitem  $K_{k+1}$  transversal.

Seja  $H$  um grafo com as características de  $G_1$  ou  $G_2$ . Então pela retirada de apenas um vértice de  $H$ , o subgrafo induzido gerado admite  $K_{k+1}$  transversal. Portanto, as estruturas correspondem a obstruções minimais EDHG- $(k, 1)$ .

( $\Leftarrow$ ) Vamos provar que todas as obstruções minimais são da forma de  $G_1$  e  $G_2$ . A coleção de lemas e corolários a seguir tem por objetivo mostrar que as obstruções minimais EDHG- $(k, 1)$  se resumem aos grafos que respeitam as estruturas  $G_1$  e  $G_2$ .

**Lema 4.1** *Seja  $H = (V, E)$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Então, todo  $v \in V$  pertence a pelo menos uma clique de tamanho  $k + 1$ .*

**Prova.** Suponha que exista  $v \in V$  que não está em nenhuma clique de tamanho  $k + 1$ . Então, por minimalidade,  $H' = H[V(H) \setminus \{v\}]$  é  $(k, 1)$ -particionável e, portanto,  $H'$  contém um  $K_{k+1}$  transversal  $T$ . Dado que  $v$  não pertence a nenhuma clique de tamanho  $k + 1$ ,  $T$  é também um  $K_{k+1}$  transversal para  $H$ . Absurdo. ■

**Corolário 4.1** *Seja  $H$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Então  $H$  não contém  $P_5$  como subgrafo induzido.*

**Prova.** Suponha que  $H$  contenha um  $P_5$  induzido com o conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e que  $v_1$  e  $v_5$  sejam seus extremos. Sejam  $S = N^2(v_1)$  e  $S' = N^2(v_5)$ . Sabemos que  $S \cap N(v_5) = S' \cap N(v_1) = \emptyset$ , já que  $H$  é um grafo de distância hereditária (a Figura 4.7 mostra a vizinhança dos vértices  $v_1$  e  $v_5$ ). Portanto, pelo Lema 4.1,  $H' = (V \setminus S \cup S', E)$  contém duas cópias independentes de  $K_{k+1}$ , que não podem ser particionadas em  $k$  conjuntos independentes e uma clique, absurdo pois supomos  $H$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

**Corolário 4.2** *Não existe obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  desconexa.*

**Prova.** Suponha que  $H$  seja uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  desconexa. Então existem vértices  $v, w \in V(H)$  tais que não existe caminho entre eles, pois estão em componentes conexas diferentes. Pelo Lema 4.1 acima, sabemos que tanto  $v$  quanto  $w$  estão em cliques de tamanho  $k + 1$  e, portanto, temos duas cópias independentes de  $K_{k+1}$ , que é uma obstrução minimal de cografo. Absurdo, pois supomos  $H$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

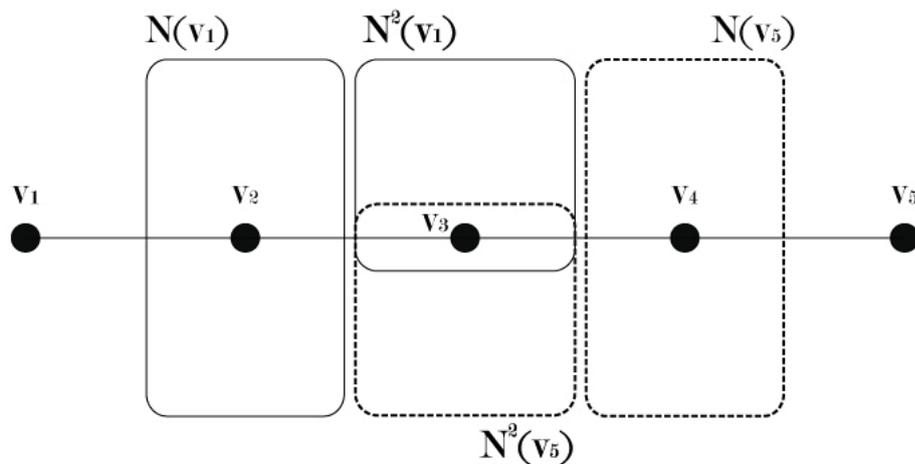


Figura 4.7: Vizinhança dos vértices  $v_1$  e  $v_5$ .

**Lema 4.2** *Seja  $G$  um grafo  $(k, 1)$ -particionável com diâmetro três e com todos os vértices de  $G$  pertencendo a pelo menos um  $K_{k+1}$ . Então todo  $K_{k+1}$  transversal  $C$  de  $G$  satisfaz:*

$$\forall v \in C, e(v) \leq 2, \text{ onde } e(v) \text{ denota a excentricidade do vértice } v.$$

**Prova.** Suponha que exista  $v_1 \in C$ , tal que  $C$  é um  $K_{k+1}$  transversal para  $G$  e  $e(v_1) = 3$  (observe que  $e(v) \leq 3, \forall v \in G$ ). Então  $V(G) = \{v_1\} \cup N(v_1) \cup N^2(v_1) \cup N^3(v_1)$ . Portanto,  $C \subseteq N[v_1]$ , o que é uma contradição pois  $N^2(v_1) \cup N^3(v_1)$  contém ao menos uma clique  $K_{k+1}$  não interceptada por  $C$ . A Figura 4.8 exemplifica a vizinhança de  $v_1$  e mostra a clique de tamanho  $k + 1$  contida em  $N^2(v_1) \cup N^3(v_1)$  e não tocada por  $C$ . ■

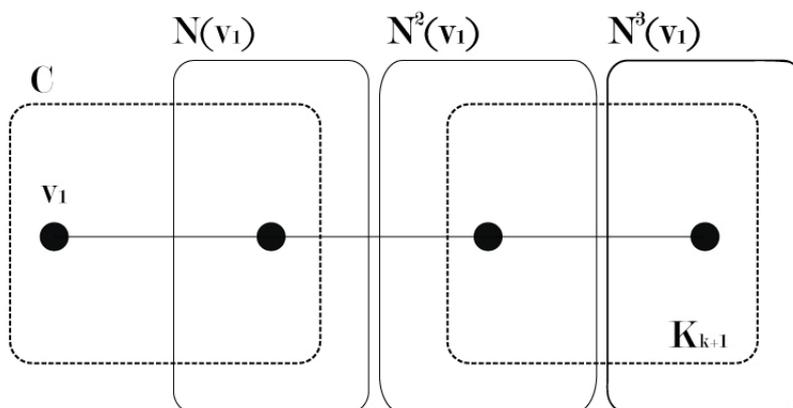


Figura 4.8: Vizinhanças do vértice  $v$ .

**Lema 4.3** *Seja  $G$  um grafo DHG e  $S$  a sequência de operações que o constrói. Então qualquer subsequência  $O_{v_x}^i, O_{v_y}^{i+1}$  em  $S$  pode ser substituída pela subsequência  $O_{v_y}^{i+1}, O_{v_x}^i$ , se  $v_x \neq v_y$ .*

**Prova.** No que segue, consideramos todos os casos possíveis para operações  $O^i$  e  $O^{i+1}$ . Como as operações são consecutivas, vamos omitir os índices por simplicidade. Então temos que provar que:

$$F_{v_x}, F_{v_y} \equiv F_{v_y}, F_{v_x};$$

$$F_{v_x}, T_{v_y} \equiv T_{v_y}, F_{v_x};$$

$$F_{v_x}, P_{v_y} \equiv P_{v_y}, F_{v_x};$$

$$T_{v_x}, T_{v_y} \equiv T_{v_y}, T_{v_x};$$

$$T_{v_x}, P_{v_y} \equiv P_{v_y}, T_{v_x};$$

$$P_{v_x}, P_{v_y} \equiv P_{v_y}, P_{v_x}.$$

Onde  $\equiv$  significa que a subsequência à esquerda é equivalente a subsequência à direita.

Seja  $S$  uma sequência de operações para construir um grafo  $H$  da família DHG. Considere o caso em que  $S$  possua a subsequência com duas operações **gêmeo falso** consecutivas:  $F_{v_x}, F_{v_y}$ , isto é,  $S = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_x}, F_{v_y}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Seja  $H'$  um grafo DHG com sequência de operações  $S' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_y}, F_{v_x}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Vamos mostrar que  $H'$  é isomorfo a  $H$ . Como todas as operações são iguais após as operações destacadas, podemos nos restringir a provar  $(O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_x}^i, F_{v_y}^j) \equiv (O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_y}^j, F_{v_x}^i)$ . Então, seja  $G$  um grafo DHG com sequência de operações  $S'' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}$ . Sejam  $a, a'$  os dois vértices criados pelas operações  $F_{v_x}, F_{v_y}$ , nesta ordem, respectivamente, e sejam  $b'$  e  $b$  os dois vértices criados pelas operações  $F_{v_y}, F_{v_x}$ , nesta ordem, respectivamente. Se  $(v_x, v_y) \in E(G)$ , então  $N(a) = N_G(v_x) \cup \{a'\}$ ,  $N(a') = N_G(v_y) \cup \{a\}$ ,  $N(b) = N_G(v_x) \cup \{b'\}$  e  $N(b') = N_G(v_y) \cup \{b\}$ . Se  $(v_x, v_y) \notin E(G)$ , então  $N(a) = N_G(v_x)$ ,  $N(a') = N_G(v_y)$ ,  $N(b) = N_G(v_x)$  e  $N(b') = N_G(v_y)$ . Em ambos os casos,  $a$  e  $b$  possuem a mesma vizinhança, assim como,  $a'$  e  $b'$ . Portanto, trocar a ordem de duas operações **gêmeo falso** em diferentes vértices não constrói grafos diferentes, mostrando que  $F_{v_x}, F_{v_y} \equiv F_{v_y}, F_{v_x}$ .

Os demais casos são análogos, no entanto, a prova detalhada de cada um deles está descrita a seguir.

Seja  $S$  uma sequência de operações para construir um grafo  $H$  da família DHG. Considere o caso em que  $S$  possua a subsequência com operações **gêmeo falso** e **gêmeo**

verdadeiro consecutivas:  $F_{v_x}, T_{v_y}$ , isto é,  $S = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_x}, T_{v_y}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Seja  $H'$  um grafo DHG com sequência de operações  $S' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_y}, F_{v_x}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Vamos mostrar que  $H'$  é isomorfo a  $H$ . Como todas as operações são iguais após as operações destacadas, podemos nos restringir a provar  $(O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_x}^i, T_{v_y}^j) \equiv (O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_y}^j, F_{v_x}^i)$ . Então, seja  $G$  um grafo DHG com sequência de operações  $S'' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}$ . Sejam  $a, a'$  os dois vértices criados pelas operações  $F_{v_x}, T_{v_y}$ , nesta ordem, respectivamente, e sejam  $b'$  e  $b$  os dois vértices criados pelas operações  $T_{v_y}, F_{v_x}$ , nesta ordem, respectivamente. Se  $(v_x, v_y) \in E(G)$ , então  $N(a) = N_G(v_x) \cup \{a'\}$ ,  $N(a') = N_G[v_y] \cup \{a\}$ ,  $N(b) = N_G(v_x) \cup \{b'\}$  e  $N(b') = N_G[v_y] \cup \{b\}$ . Se  $(v_x, v_y) \notin E(G)$ , então  $N(a) = N_G(v_x)$ ,  $N(a') = N_G[v_y]$ ,  $N(b) = N_G(v_x)$  e  $N(b') = N_G[v_y]$ . Em ambos os casos,  $a$  e  $b$  possuem a mesma vizinhança, assim como,  $a'$  e  $b'$ . Portanto, trocar a ordem das operações **gêmeo falso** e **gêmeo verdadeiro** em diferentes vértices não constrói grafos diferentes, mostrando que  $F_{v_x}, T_{v_y} \equiv T_{v_y}, F_{v_x}$ .

Seja  $S$  uma sequência de operações para construir um grafo  $H$  da família DHG. Considere o caso em que  $S$  possua a subsequência com operações **gêmeo falso** e **pendente** consecutivas:  $F_{v_x}, P_{v_y}$ , isto é,  $S = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_x}, P_{v_y}, \dots, O_{v_z}^n$ . Seja  $H'$  um grafo DHG com sequência de operações  $S' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_y}, F_{v_x}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Vamos mostrar que  $H'$  é isomorfo a  $H$ . Como todas as operações são iguais após as operações destacadas, podemos nos restringir a provar  $(O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, F_{v_x}^i, P_{v_y}^j) \equiv (O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_y}^j, F_{v_x}^i)$ . Então, seja  $G$  um grafo DHG com sequência de operações  $S'' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}$ . Sejam  $a, a'$  os dois vértices criados pelas operações  $F_{v_x}, P_{v_y}$ , nesta ordem, respectivamente, e sejam  $b'$  e  $b$  os dois vértices criados pelas operações  $P_{v_y}, F_{v_x}$ , nesta ordem, respectivamente. Se  $(v_x, v_y) \in E(G)$ , então  $N(a) = N_G(v_x)$ ,  $N(a') = \{v_y\}$ ,  $N(b) = N_G(v_x)$  e  $N(b') = \{v_y\}$ . Se  $(v_x, v_y) \notin E(G)$ , então  $N(a) = N_G(v_x)$ ,  $N(a') = \{v_y\}$ ,  $N(b) = N_G(v_x)$  e  $N(b') = \{v_y\}$ . Em ambos os casos,  $a$  e  $b$  possuem a mesma vizinhança, assim como,  $a'$  e  $b'$ . Portanto, trocar a ordem das operações **gêmeo falso** e **pendente** em diferentes vértices não constrói grafos diferentes, mostrando que  $F_{v_x}, P_{v_y} \equiv P_{v_y}, F_{v_x}$ .

Seja  $S$  uma sequência de operações para construir um grafo  $H$  da família DHG. Considere o caso em que  $S$  possua a subsequência com duas operações **gêmeo verdadeiro** consecutivas:  $T_{v_x}, T_{v_y}$ , isto é,  $S = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_x}, T_{v_y}, \dots, O_{v_z}^n$ . Seja  $H'$  um grafo DHG com sequência de operações  $S' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_y}, T_{v_x}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Vamos mostrar que  $H'$  é isomorfo a  $H$ . Como todas as operações são iguais após as operações destacadas, podemos nos restringir a provar  $(O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_x}^i, T_{v_y}^j) \equiv (O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_y}^j, T_{v_x}^i)$ . Então, seja  $G$  um grafo DHG com sequência de operações  $S'' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}$ . Sejam  $a, a'$  os dois vértices criados pelas operações  $T_{v_x}, T_{v_y}$ , nesta ordem, respectivamente, e sejam

$b'$  e  $b$  os dois vértices criados pelas operações  $T_{v_y}, T_{v_x}$ , nesta ordem, respectivamente. Se  $(v_x, v_y) \in E(G)$ , então  $N(a) = N_G[v_x] \cup \{a'\}$ ,  $N(a') = N_G[v_y] \cup \{a\}$ ,  $N(b) = N_G[v_x] \cup \{b'\}$  e  $N(b') = N_G[v_y] \cup \{b\}$ . Se  $(v_x, v_y) \notin E(G)$ , então  $N(a) = N_G[v_x]$ ,  $N(a') = N_G[v_y]$ ,  $N(b) = N_G[v_x]$  e  $N(b') = N_G[v_y]$ . Em ambos os casos,  $a$  e  $b$  possuem a mesma vizinhança, assim como,  $a'$  e  $b'$ . Portanto, trocar a ordem de duas operações **gêmeo verdadeiro** em diferentes vértices não constrói grafos diferentes, mostrando que  $T_{v_x}, T_{v_y} \equiv T_{v_y}, T_{v_x}$ .

Seja  $S$  uma sequência de operações para construir um grafo  $H$  da família DHG. Considere o caso em que  $S$  possua a subsequência com operações **gêmeo verdadeiro** e **pendente** consecutivas:  $T_{v_x}, P_{v_y}$ , isto é,  $S = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_x}, P_{v_y}, \dots, O_{v_z}^n$ . Seja  $H'$  um grafo DHG com sequência de operações  $S' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_y}, T_{v_x}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Vamos mostrar que  $H'$  é isomorfo a  $H$ . Como todas as operações são iguais após as operações destacadas, podemos nos restringir a provar  $(O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, T_{v_x}^i, P_{v_y}^j) \equiv (O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_y}^j, T_{v_x}^i)$ . Então, seja  $G$  um grafo DHG com sequência de operações  $S'' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}$ . Sejam  $a, a'$  os dois vértices criados pelas operações  $T_{v_x}, P_{v_y}$ , nesta ordem, respectivamente, e sejam  $b'$  e  $b$  os dois vértices criados pelas operações  $P_{v_y}, T_{v_x}$ , nesta ordem, respectivamente. Se  $(v_x, v_y) \in E(G)$ , então  $N(a) = N_G[v_x]$ ,  $N(a') = \{v_y\}$ ,  $N(b) = N_G[v_x]$  e  $N(b') = \{v_y\}$ . Se  $(v_x, v_y) \notin E(G)$ , então  $N(a) = N_G[v_x]$ ,  $N(a') = \{v_y\}$ ,  $N(b) = N_G[v_x]$  e  $N(b') = \{v_y\}$ . Em ambos os casos,  $a$  e  $b$  possuem a mesma vizinhança, assim como,  $a'$  e  $b'$ . Portanto, trocar a ordem das operações **gêmeo verdadeiro** e **pendente** em diferentes vértices não constrói grafos diferentes, mostrando que  $T_{v_x}, P_{v_y} \equiv P_{v_y}, T_{v_x}$ .

Seja  $S$  uma sequência de operações para construir um grafo  $H$  da família DHG. Considere o caso em que  $S$  possua a subsequência com duas operações **pendente** consecutivas:  $P_{v_x}, P_{v_y}$ , isto é,  $S = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_x}, P_{v_y}, \dots, O_{v_z}^n$ . Seja  $H'$  um grafo DHG com sequência de operações  $S' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_y}, P_{v_x}, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . Vamos mostrar que  $H'$  é isomorfo a  $H$ . Como todas as operações são iguais após as operações destacadas, podemos nos restringir a provar  $(O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_x}^i, P_{v_y}^j) \equiv (O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}, P_{v_y}^j, P_{v_x}^i)$ . Então, seja  $G$  um grafo DHG com sequência de operações  $S'' = O_{v_1}^1, \dots, O_{v_{i-1}}^{i-1}$ . Sejam  $a, a'$  os dois vértices criados pelas operações  $P_{v_x}, P_{v_y}$ , nesta ordem, respectivamente, e sejam  $b'$  e  $b$  os dois vértices criados pelas operações  $P_{v_y}, P_{v_x}$ , nesta ordem, respectivamente. Se  $(v_x, v_y) \in E(G)$ , então  $N(a) = \{v_x\}$ ,  $N(a') = \{v_y\}$ ,  $N(b) = \{v_x\}$  e  $N(b') = \{v_y\}$ . Se  $(v_x, v_y) \notin E(G)$ , então  $N(a) = \{v_x\}$ ,  $N(a') = \{v_y\}$ ,  $N(b) = \{v_x\}$  e  $N(b') = \{v_y\}$ . Em ambos os casos,  $a$  e  $b$  possuem a mesma vizinhança, assim como,  $a'$  e  $b'$ . Portanto, trocar a ordem de duas operações **pendente** em diferentes vértices não constrói grafos diferentes, mostrando que  $P_{v_x}, P_{v_y} \equiv P_{v_y}, P_{v_x}$ . ■

Apresentaremos a seguir um algoritmo (Algoritmo 1) que, dada uma co-árvore  $T$  de um cografo  $G$ , determina uma sequência de operações que o constrói. Como sabemos, um cografo é um grafo livre de  $P_4$  que pode ser construído por uma sequência de operações de inclusão de vértices gêmeos verdadeiros ou gêmeos falsos. O que pretendemos é apresentar a ordem em que essas operações são realizadas para construir o cografo.

O Algoritmo 1 é recursivo e sua base de recursão são as co-árvores de tamanho dois. As operações descritas abaixo são utilizadas durante o algoritmo. Vale ressaltar que o algoritmo utiliza listas, que são coleções de elementos ordenados.

- $raiz(co\text{-}árvore\ T)::$  Esta operação é realizada sobre uma co-árvore  $T$  e retorna sua raiz;
- $\sim::$  Esta operação significa negação do valor booleano, ou seja,  $\sim$  “sim”  $\equiv$  “não” e  $\sim$  “não”  $\equiv$  “sim”.
- $contémApenasFolhas(co\text{-}árvore\ T)::$  Esta operação é realizada sobre uma co-árvore  $T$  e retorna “sim”, quando a co-árvore contém apenas filhos que são folhas; retorna “não”, caso contrário;
- $ramo(co\text{-}árvore\ T)::$  Esta operação é realizada sobre uma co-árvore  $T$  e retorna um ramo que não é folha;
- $S : S' ::$  Esta operação indica concatenação das listas  $S$  e  $S'$ , ou seja, os elementos de  $S$  vão ser seguidos dos elementos de  $S'$  na mesma ordem que aparecem em  $S$  e  $S'$ ;
- $V(i)::$  Esta operação é realizada sobre uma lista  $V$  e retorna o elemento que está na posição  $i$ ;
- $folhas(co\text{-}árvore\ T)::$  Esta operação é realizada sobre uma co-árvore  $T$  de altura dois e retorna todas as folhas;
- $folhaMaisDireita(co\text{-}árvore\ T)::$  Esta operação é realizada sobre uma co-árvore  $T$  de altura dois e retorna a folha mais à direita;
- $tipo(nó\ rt)::$  Esta operação é realizada sobre um nó  $rt$  e avalia se é um nó tipo 1 ou tipo 0.

Seja  $G$  um cografo e  $T$  uma co-árvore qualquer de  $G$ . Considere um nó  $nd$  tal que todos seus filhos são folhas. Podemos escolher a folha mais à direita, denotada por  $a$ , de  $nd$

para dizer que todas as outras folhas são ou gêmeos verdadeiros ou falsos de  $a$ . Dado que  $nd$  contém apenas  $a$  e seus gêmeos verdadeiros (ou falsos) como filhos, podemos comprimir o ramo formado por  $nd$  e seus filhos para apenas o vértice  $a$  e adicionar ou  $|folhas(nd) - 1|$  operações **gêmeo verdadeiro** ou  $|folhas(nd) - 1|$  operações **gêmeo falso** na sequência de operações. Com a intenção de manter os rótulos dos vértices, o algoritmo guarda os rótulos de cada um dos vértices comprimidos em ordem de criação. Portanto, ao final, o algoritmo retorna duas listas, a primeira com a sequência de operações  $S = O_{v_1}^1, O_{v_2}^2, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$  e a segunda contém o vértice inicial e  $i$ -ésimo vértice criado na operação  $O_{v_{i-1}}^{i-1}$ . A Figura 4.9 mostra a compressão de um nó em uma única folha.

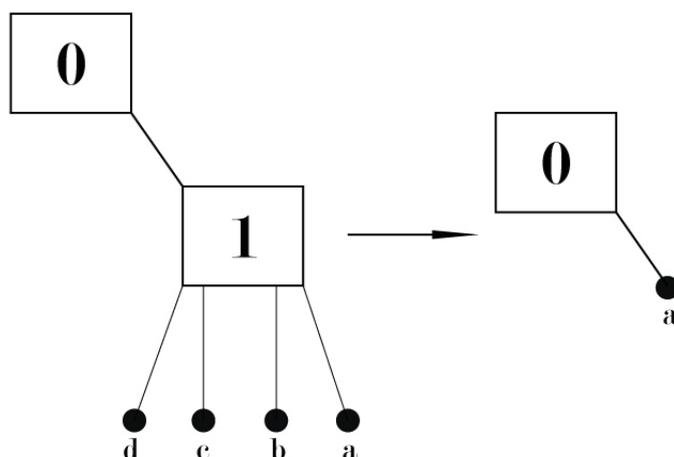


Figura 4.9: Exemplo de compressão em que  $S = T_a, T_a, T_a$  e  $Rotulos = \{a, b, c, d\}$ .

Observando esta abordagem, temos que para toda árvore com  $n$  vértices e altura dois, o algoritmo realiza  $n - 1$  operações para comprimir  $n - 1$  vértices. A cada execução de uma chamada recursiva, realiza-se  $k - 1$  operações para comprimir  $k - 1$  vértices, onde  $k$  é o número de folhas contidas na árvore. Assim é fácil ver que o Algoritmo possui complexidade  $O(n)$ .

A seguir, mostramos por indução, que o Algoritmo 1 nos devolve uma sequência de operações que constrói o cografo  $G$ , dada sua co-árvore  $T$ .

**Teorema 4.3** *O Algoritmo 1 obtém uma sequência de operações para construção de um cografo  $G$ .*

**Prova.**

Seja  $G$  um cografo e  $T$  uma co-árvore de  $G$  com altura 2. Se a raiz de  $T$  é um nó tipo 1, então  $T$  representa um grafo que é uma clique, caso contrário  $T$  representa um conjunto independente. Ao aplicarmos o algoritmo a uma co-árvore  $T$  de altura 2,

---

**Algoritmo 1** Obtendo uma sequência de operações para construção do cografo

---

```

1: PROCEDIMENTO :: sequenciaOperacao(co – árvore T)
2:  $rt \leftarrow raiz(T)$ 
3:  $S \leftarrow \emptyset$ 
4:  $V \leftarrow \emptyset$ 
5: enquanto  $\sim contémApenasFolhas(T)$  faça
6:    $node \leftarrow ramo(T)$ 
7:    $(S', V') \leftarrow sequenciaOperacao(node)$ 
8:    $S \leftarrow S' : S$ 
9:    $T(node) \leftarrow V'(0)$ 
10:   $V \leftarrow V' \setminus \{node\} : V$ 
11: fim enquanto
12:  $vec \leftarrow folhas(T)$ 
13:  $v \leftarrow folhaMaisDireita(T)$ 
14:  $vec \leftarrow vec \setminus \{v\}$ 
15: se  $tipo(rt) = 1$  então
16:   para  $i \leftarrow 0 : |vec| - 1$  faça
17:      $S \leftarrow \{T_v\} : S$ 
18:      $V \leftarrow \{node(i)\} : V$ 
19:   fim para
20: senão
21:   para  $i \leftarrow 0$  até  $|vec| - 1$  faça
22:      $S \leftarrow \{F_v\} : S$ 
23:      $V \leftarrow \{node(i)\} : V$ 
24:   fim para
25: fim se
26:  $V \leftarrow \{v\} : V$ 
27: Retorna :  $(S, V)$ ;
28: FIM PROCEDIMENTO

```

---

devemos observar que  $T$  possui apenas folhas e, portanto, o algoritmo escolherá a folha mais à direita para atribuir à variável  $v$ , e a lista  $vec$  (*linha 12 do algoritmo*) conterá todas as demais folhas. Assim, para cada folha em  $vec$  será adicionada uma operação **gêmeo verdadeiro** ou **gêmeo falso** (de acordo com o tipo da raiz) em  $S$  e, ao final do algoritmo,  $V$  irá conter todas as folhas de  $T$ . Portanto  $|S| = n - 1$  e  $|V| = n$ , e se a raiz de  $T$  for um nó do tipo 1, então  $S$  contém apenas operações **gêmeo verdadeiro** e o grafo resultante é uma clique com  $n$  vértices; caso contrário  $S$  contém apenas operações **gêmeo falso** e o grafo resultante é um conjunto independente com  $n$  vértices. Portanto o algoritmo é válido para uma árvore de tamanho 2, pois retorna uma sequência de operações que constrói o cografo dada sua co-árvore  $T$ .

Suponha que o algoritmo seja válido para toda co-árvore com altura menor ou igual a  $m - 1$ . Vamos mostrar que também é válido para árvores com altura  $m$ .

Seja  $T$  uma co-árvore de altura  $m$  e com raiz  $rt$ , então todo ramo de  $rt$ , que não é folha, é uma co-árvore com altura menor ou igual a  $m - 1$  e existe uma sequência de operações que constrói o cografo correspondente a este ramo de acordo com o Algoritmo 1, pela hipótese de indução.

Então, o algoritmo é chamado recursivamente para cada ramo que não é folha, e recebe como resposta uma sequência de operações que constrói o ramo. Por hipótese de indução, esta sequência de operações é válida, pois todo ramo possui altura menor ou igual a  $m - 1$ . Para quaisquer duas sequências de operações  $S'$  e  $S''$  recebidas como resposta da recursão, sejam  $O_{v_i}^i \in S'$  e  $O_{v_j}^j \in S''$  com  $1 \leq i \leq |S'|$  e  $1 \leq j \leq |S''|$ . Como  $v_x \neq v_y$  e, pelo Lema 4.3, podemos concatenar  $S$  e  $S'$  sem afetar o resultado final da construção. Após concatenar as sequências de operações de cada um dos ramos na sequência de operações que vai ser retornada ao final do algoritmo  $S$ , o algoritmo substitui o ramo pelo vértice inicial da sequência de operações, utilizando a compressão apresentada na Figura 4.9, e também armazena os rótulos atribuídos a cada um dos vértices. A Figura 4.10 exemplifica a compressão de dois ramos que possuem como folhas mais à direita  $a$  e  $b$ .

Após as compressões realizadas, a co-árvore possui altura 2. Como já mostramos ser válido para altura 2, o algoritmo também é válido para co-árvores com altura  $m$ . ■

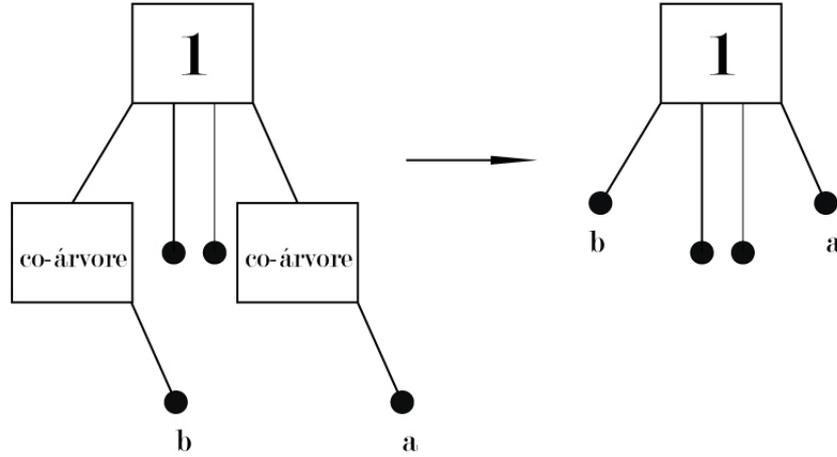


Figura 4.10: Exemplo de compressão de ramos com altura menor que  $m$ .

**Lema 4.4** *Todo cografo não completo e conexo  $G$  pode ser construído por uma sequência de operações da forma  $S = P_{v_x}, P_{v_y}, O_{v_3}^3, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$  (onde cada  $O^i, i \geq 3$  é uma operação gêmeo verdadeiro ou gêmeo falso). Isto é, sempre é possível iniciar qualquer sequência de operações com duas operações pendente que gerem um  $P_3$ .*

**Prova.** É fácil ver que o algoritmo anterior gera uma sequência de operações que contém apenas operações gêmeo verdadeiro e gêmeo falso. Como  $G$  não é completo, podemos escolher três vértices que formam um  $P_3$  induzido em  $G$ . Provaremos que este  $P_3$  pode ser construído com as duas primeiras operações da sequência de operações, sendo duas operações pendente.

Seja  $T$  a co-árvore de  $G$ . Então a raiz  $R$  de  $T$  é um nó do tipo 1, pois  $G$  é conexo. Todo ramo de  $R$  ou é subárvore com raiz ou é uma folha. Escolha um ramo de  $R$ , com raiz tipo 0, e denote-o  $endVerticesNode$  e escolha um outro ramo e denote-o  $midVertexNode$ . Sejam  $mostLeft$  e  $mostRight$  os ramos mais a esquerda e mais a direita de  $endVerticesNode$  escolhido anteriormente, respectivamente. A Figura 4.11 mostra um exemplo de co-árvore  $T$  e os nós escolhidos.

Sejam

$$(mvdS, mvdV) = sequenciaOperacao(midVertexNode)$$

$$(mlS, mlV) = sequenciaOperacao(mostLeft)$$

$$(mrS, mrV) = sequenciaOperacao(mostRight)$$

Recorde que, pelo Lema 4.3, podemos alterar a ordem de duas operações desde que sejam aplicadas a vértices diferentes no grafo. Portanto as operações encontradas em

$mvdS$ ,  $mlS$  e  $mrS$  podem ser concatenadas em qualquer ordem.

Como  $mlV(0)$ ,  $mrV(0)$  possuem um nó tipo 0 como primeiro ancestral comum em  $T$  e  $mlV(0)$ ,  $mrV(0)$ ,  $mvdV(0)$  possuem um nó tipo 1 como primeiro ancestral comum em  $T$ , então  $G[\{mlV(0), mrV(0), mvdV(0)\}]$  é um  $P_3$  e todos os outros vértices de  $G$  são criados em alguma operação em  $mvdS$ ,  $mlS$  ou  $mrS$ .

Se chamarmos o algoritmo *sequenciaOperacao* para cada ramo não escolhido de  $R$  (*endVerticesNode*), podemos comprimir este ramo substituindo-o pelo vértice inicial da lista de vértices retornada pela função. Dessa forma, todos os vértices não escolhidos são gêmeos verdadeiros ou gêmeos falsos de  $mrV(0)$ ,  $mlV(0)$  ou  $mvdV$  e podemos omitir estes casos. A Figura 4.11 mostra um exemplo de co-árvore  $T$  e os nós e vértices escolhidos.

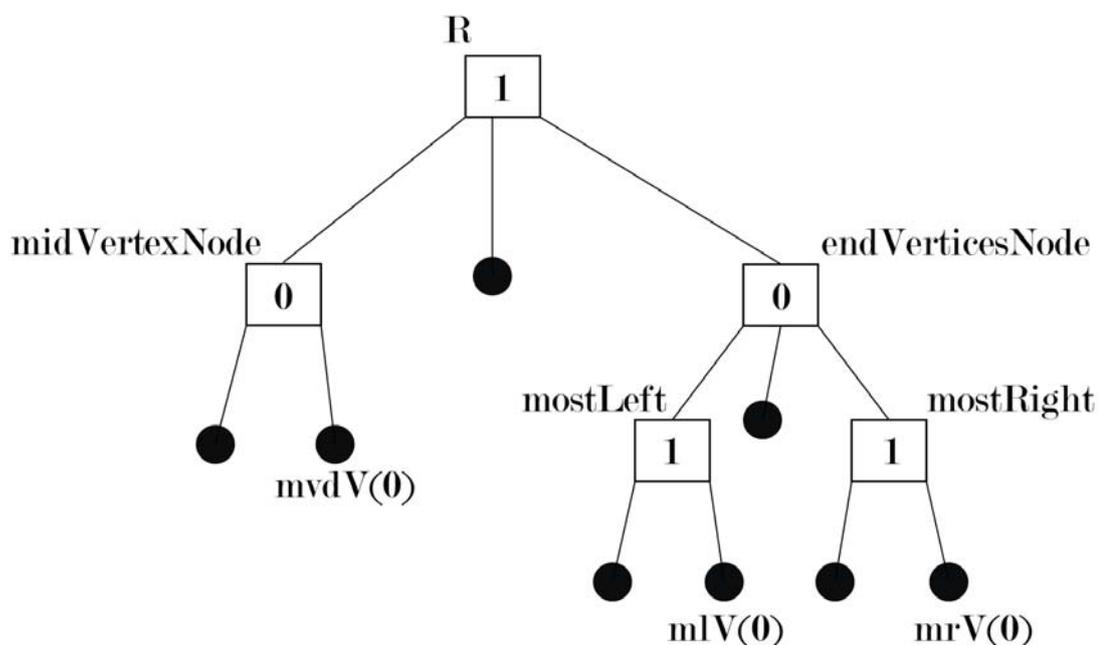


Figura 4.11: Exemplo de ramos escolhidos para criar o  $P_3$  com operações pendente no início da sequência de operações.

Como sempre podemos ter um  $P_3 = G[\{mlV(0), mvdV(0), mrV(0)\}]$  no começo da sequência de operações e existe uma sequência de operações  $S'$  (combinando  $mlS$ ,  $mrS$  e  $mvdS$ ) que cria todos os outros vértices do grafo  $G$ , é fácil ver que podemos construir esse  $P_3$  com duas operações pendente, portanto  $S = P_{mlV(0)}, P_{mvdV(0)}, S'$  é uma sequência de operações que consrói o cografo  $G$ , iniciando-se por duas operações pendente. ■

Como provamos anteriormente, um cografo  $H$  pode ser construído através de uma sequência de operações  $S''$ , tal que  $S''$  contém a formação de um  $P_3$  em suas duas primeiras

operações, e as outras operações são **gêmeo verdadeiro** e/ou **gêmeo falso**. Dessa forma, seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Observe que o primeiro  $P_4$  de  $G$  aparece após uma operação **pendente** em algum vértice ( $v_3$ ) que era extremidade de  $P_3$  no, até então, cografo. Note que antes da operação **pendente**, o grafo ainda era livre de  $P_4$ . Vamos escolher dois vértices  $v_1$  e  $v_2$ , convenientemente, tais que formem um  $P_3$  e possam ser criados no começo da sequência operações. Podemos afirmar que:

$$S(G) = S'', P_{v_3}, O_{v_i}^i, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$$

$$S'' = P_{v_1}, P_{v_2}, \{(T_{v_m}^m)^*, (F_{v_j}^j)^*\}^*$$

onde  $O^*$  denota uma sequência de 0 ou mais operações  $O$ ,  $S^*$  denota uma repetição de operações  $S$  e  $O^+$  denota uma sequência de pelo menos uma operação  $O$ .

$$S(G) = P_{v_1}, P_{v_2}, \{(T_{v_m}^m)^*, (F_{v_j}^j)^*\}^*, P_{v_3}, O_{v_i}^i, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$$

Como provamos no Lema 4.3, podemos trocar a ordem de quaisquer duas operações consecutivas que são realizadas em vértices diferentes e, portanto, podemos trocar a ordem das operações de modo que todas as operações que são aplicadas depois de  $P_{v_2}$  e antes de  $P_{v_3}$  e não são aplicadas no vértice  $v_3$  podem ser realizadas após  $P_{v_3}$ , logo:

$$S(G) = P_{v_1}, P_{v_2}, \{T_{v_3}^*, F_{v_3}^*\}^*, P_{v_3}, O_{v_j}^j, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$$

Suponha que exista uma sequência  $F_{v_3}^+$  antes de alguma operação  $T_{v_3}$ , antes também de  $P_{v_3}$ . Então a vizinhança de cada um dos vértices criados pelas operações  $F_{v_3}^+$  contém apenas o vértice  $v_2$  e cada uma das operações poderia ser alterada para  $P_{v_2}$  e, portanto, ser movida para depois de  $P_{v_3}$ , fazendo:

$$S(G) = P_{v_1}, P_{v_2}, T_{v_3}, \{T_{v_3}^*, F_{v_3}^*\}^*, P_{v_3}, O_{v_m}^m, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$$

Ou a sequência  $\{T_{v_3}^*, F_{v_3}^*\}^*$  é vazia e temos:

$$S(G) = P_{v_1}, P_{v_2}, P_{v_3}, O_{v_j}^j, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$$

**Lema 4.5** *Seja  $G$  um grafo DHG. Uma obstrução EDHG- $(k, 1)$   $H$  de  $G$  formada por uma sequência  $S = P_{v_1}, P_{v_2}, T_{v_3}, \{T_{v_3}^*, F_{v_3}^*\}^*, P_{v_3}, O_{v_i}^i, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ , onde as operações  $P_{v_1}, P_{v_2}$  e  $P_{v_3}$  geram os vértices  $v_2, v_3$  e  $v_4$  respectivamente, não é uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ .*

**Prova.** Seja  $G$  um grafo DHG. Suponha  $H$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  construída por  $S$ . Seja  $v$  o vértice criado pela operação  $T_{v_3}$  imediatamente após a operação  $P_{v_2}$ . O vértice  $v$  é adjacente a  $\{v_2, v_3\}$  e a todos os seus descendentes gerados com uma sequência de operações **gêmeo verdadeiro** e **gêmeo falso** (desde que não seja descendente de um vértice gêmeo falso de  $v$  - observe que os descendentes por operações **gêmeo verdadeiro** e **gêmeo falso** de  $v$  também são descendentes de  $\{v_2, v_3\}$ ). Também é válido lembrar que pela construção  $v$  não é adjacente a  $v_1$  e  $v_4$  e nenhum de seus descendentes.

Por minimalidade,  $H' = H[V(H) \setminus \{v\}]$  é  $(k, 1)$ -particionável e contém uma clique  $C$  que intercepta todas as cliques de tamanho  $k + 1$ . Como  $(v, v_1) \notin E(H)$  e  $(v, v_4) \notin E(H)$ , então  $v_1$  e  $v_4$  pertencem a cliques de tamanho  $k + 1$  em  $H'$  e a clique  $C$ , pelo Lema 4.2, deve estar contida nos conjunto de vértices que possui excentricidade 2. Ou seja,  $C$  está contida nos descendentes de  $\{v_2, v_3\}$  que foram construídos com sequência de operações **gêmeo verdadeiro** e **gêmeo falso**, pois todos os descendentes  $x$  de  $\{v_1, v_4\}$  possuem  $e(x) \geq 3$  e os descendentes  $y$  de  $\{v_2, v_3\}$  que utilizam operação **pendente** também possuem  $e(y) \geq 3$ .

Porém, existe  $x \in C$  tal que  $(v, x) \notin E(H)$ , caso contrário  $\{v\} \cup C$  seria clique e interceptaria todas as cliques de tamanho  $k + 1$  criadas com a reinserção de  $v$ . Logo  $C$  contém um vértice  $x$  descendente de um vértice gêmeo falso de  $v$ , pois em qualquer outro caso,  $v$  é adjacente a todos os descendentes de  $\{v_2, v_3\}$ . Mais especificamente, existe clique  $C'$  tal que  $C' \subset C$ , onde  $C' = \{y \mid y \in C, (y, v) \notin E(H)\}$  e a cardinalidade de  $C'$  é inferior a  $k + 1$ , caso contrário teríamos duas cópias independentes de  $K_{k+1}$ . Caso todas as cliques de tamanho  $k + 1$  em que  $C'$  estiver contida também estejam contidas em  $C$ , então  $C \setminus C'$  é  $K_{k+1}$  transversal para  $H'$  e  $(C \setminus C') \cup \{v\}$  é  $K_{k+1}$  transversal para  $H$ . Logo  $C'$  contém clique de tamanho  $k + 1$  que não está inteiramente contida em  $C$ . A Figura 4.12 mostra os conjuntos e as relações de adjacências descritos nestes casos.

Sejam  $Q \in \mathcal{Q}_{k+1}(v)$  e  $Q' \in \mathcal{Q}_{k+1}(y)$ , onde  $y \in C'$ . Suponha que  $v$  não seja adjacente a nenhum vértice de  $Q' \setminus C'$ ; então teríamos duas cópias independentes de  $K_{k+1}$ , pois  $Q \setminus \{v\}$  e  $Q' \setminus C'$  não poderiam possuir respectivamente vértices  $w$  e  $z$  que fossem adjacentes, caso contrário teríamos um buraco induzido pelo conjunto  $\{c, v, w, z, y\}$  tal que  $c \in C$  e  $c \notin C'$ . Logo  $v$  é adjacente a pelo menos um vértice em  $Q' \setminus C'$ . Suponha  $|Q' \setminus C'| > 1$  e que exista

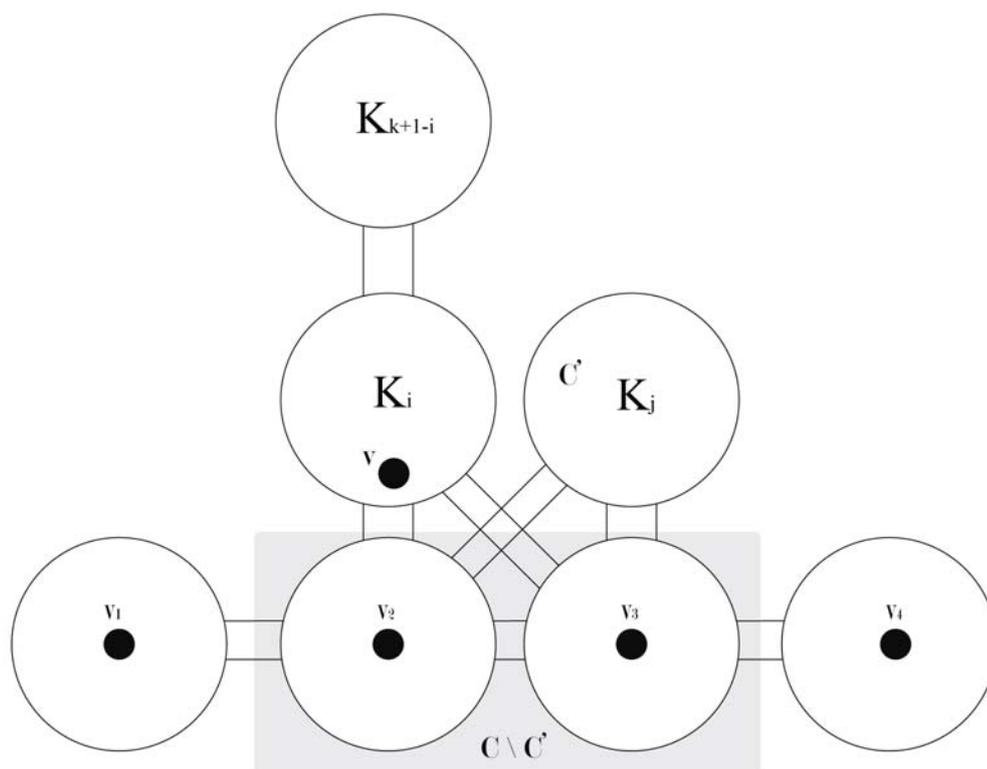


Figura 4.12: Exemplo de conjuntos apresentados na prova do Lema 4.5, onde  $j < k + 1$ .

vértice  $w \in Q'$  e  $w \notin C'$  e  $(v, w) \notin E(H)$ , então teríamos uma casa induzida pelo conjunto  $\{c, v, z, w, y\}$ , onde: (i)  $c \in C'$ ; (ii)  $c \notin C'$ ; (iii)  $(v, w) \in E(H)$ ; e (iv)  $w \in Q'$  (sabemos que  $w$  existe pois  $v$  é adjacente a pelo menos um vértice de  $Q'$ ). Logo  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $Q'$  que não estão em  $C'$  (observe que caso algum vértice seja adjacente a  $\{v, v_2, v_3\}$  e descendentes, e também seja adjacente a algum vértice de  $Q' \setminus C'$ , então ele também é adjacente a todos os vértices de  $Q' \setminus C'$ ). Dessa forma  $v$  poderia criar novas cliques de tamanho  $k + 1$  com vértices de  $Q'$ , o que é absurdo, pois neste caso o grafo induzido por  $Q_1 \cup Q \cup Q'$ , onde  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v_1)$ , seria uma obstrução do tipo  $G_1$  com a seguinte distribuição de vértices nos grupos da Figura 4.2: grupo I:  $Q' \setminus C'$ ; grupo II:  $(Q \setminus Q') \cup C'$ ; grupo III:  $Q_1 \cap C$ ; e grupo IV:  $Q_1 \setminus C$ ; ou  $v$  deveria formar uma clique de tamanho  $k + 1$  que possui vértices não adjacentes a  $Q' \setminus C'$  o que também seria absurdo, pois  $Q_1 \cup Q \cup Q'$  induz uma obstrução do tipo  $G_2$  com a seguinte distribuição de vértices nos grupos da Figura 4.3, onde  $F$  o conjunto contido em  $Q$  tais que são adjacentes a  $Q' \setminus C'$ : grupo I:  $(Q' \setminus C') \cup (Q \setminus F)$ ; grupo II:  $F \cup C'$ ; grupo III:  $Q_1 \cap C$ ; e grupo IV:  $Q_1 \setminus C$ . A Figura 4.13 mostra os conjuntos e as relações de adjacências descritos nestes casos. ■

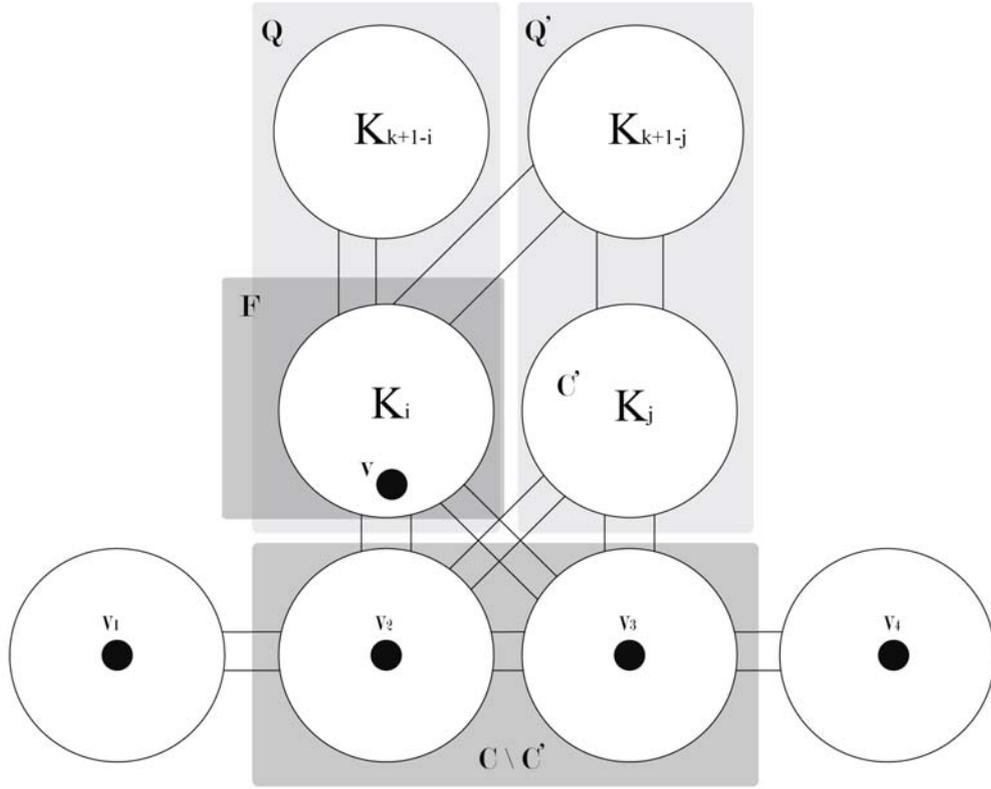


Figura 4.13: Exemplo dos conjuntos apresentados na prova do Lema 4.5.

**Corolário 4.3** *Toda obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  é construída por uma sequência de operações do tipo  $S = P_{v_1}, P_{v_2}, P_{v_3}, O_{v_j}^j, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ .*

**Prova.** O resultado segue diretamente do Lema anterior, pois  $S = P_{v_1}, P_{v_2}, T_{v_3}, \{T_{v_3}^*, F_{v_3}^*\}^*, P_{v_3}, O_{v_m}^m, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$  não gera obstruções minimais EDHG- $(k, 1)$ . Logo  $\{T_{v_3}^*, F_{v_3}^*\}^*$  é vazia e apenas  $S = P_{v_1}, P_{v_2}, P_{v_3}, O_{v_j}^j, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$  gera obstruções minimais EDHG- $(k, 1)$ . ■

Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  construída por uma sequência de operações  $S = P_{v_1}, P_{v_2}, P_{v_3}, O_{v_j}^j, \dots, O_{v_{n-1}}^{n-1}$ . O conjunto de vértices de  $G$  pode ser distribuído em quatro conjuntos  $I, II, III, IV$ . Começemos a construção dos grupos com os primeiros quatro vértices do  $P_4$  inicial ( $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ , que são o vértice inicial e os três vértices criados com as operações  $P_{v_1}, P_{v_2}, P_{v_3}$ , respectivamente) dispostos em cada um dos grupos:  $v_1 \in I; v_2 \in II; v_3 \in III; v_4 \in IV$ . Então para cada operação gêmeo verdadeiro ou gêmeo falso o vértice gerado vai pertencer ao mesmo grupo do vértice no qual a operação foi realizada. Por exemplo, se foi realizada uma operação gêmeo verdadeiro ou gêmeo falso em  $v_2$ , então o vértice gerado vai pertencer ao grupo  $II$ . Como não podemos ter operações pendente nos grupos  $I$  e  $IV$  (pois teríamos  $P_5$  induzido) devemos apenas considerar operações pendente nos grupos  $II$  e  $III$ . Dessa forma os vértices resultantes

das operações pendente realizadas sobre estes grupos serão dispostos nos grupos  $I$  e  $IV$ , respectivamente. Daqui por diante vamos nos referir a estes grupos apenas utilizando a terminação  $I, II, III, IV$ , e em todo primeiro  $P_4 = v_1, v_2, v_3, v_4$  assumiremos que  $v_1$  e  $v_4$  são as extremidades. A Figura 4.14 mostra a estrutura inicial de uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ .

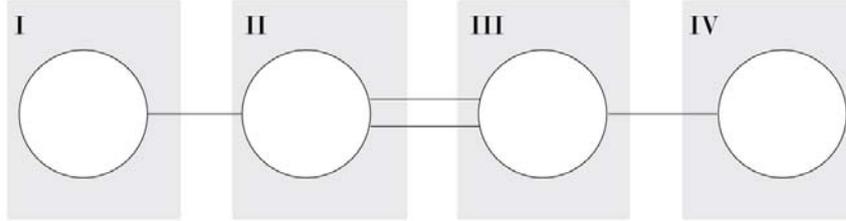


Figura 4.14: Estrutura inicial de uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ .

**Lema 4.6** *Seja  $G$  um grafo EDHG disposto nos conjuntos  $I, II, III$  e  $IV$  como apresentado anteriormente. Se existe clique  $J \subset II$  que é  $K_{k+1}$  transversal para  $I \cup II$ , e existe clique  $J' \subset III$  que é  $K_{k+1}$  transversal para  $III \cup IV$ , então  $J \cup J'$  é  $K_{k+1}$  transversal para  $G$  ou  $G$  não é obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ .*

**Prova.** Suponha que exista alguma clique  $Q$  de tamanho  $k + 1$  em  $II \cup III$  tal que para todo  $v \in Q$ , temos  $v \notin J$  e  $v \notin J'$  (em qualquer outro caso  $J \cup J'$  interceptaria  $Q$  e consequentemente seria uma  $K_{k+1}$  transversal para  $G$ ). Uma vez que  $J$  e  $J'$  interceptam todas as cliques de tamanho  $k + 1$  em  $I \cup II$  e  $III \cup IV$ , respectivamente, sejam  $C = Q \cap II$  e  $C' = Q \cap III$ . Então  $|C| < |J|$  e  $|C'| < |J'|$  caso contrário  $C \cup I$  ou  $C' \cup IV$  deveria conter algum  $K_{k+1}$ . A Figura 4.15 apresenta os conjuntos descritos e as relações de adjacências destes casos.

Se  $C, J$  e  $C', J'$  são duas componentes desconexas em  $II$  e  $III$ , respectivamente, então temos uma obstrução de cografo induzida por  $J \cup J' \cup C \cup C'$ . Por exemplo, se  $j = |C|$ ,  $i = |C'|$  e  $i + j \geq k + 1$ , temos a obstrução  $2K_j + 2K_i$ . Assim existem  $B \subset J$  ( $B' \subset J'$ ) e  $D \subset C$  ( $D' \subset C'$ ) tais que  $B \cup D$  ( $B' \cup D'$ ) é clique. Se  $|J \setminus B| \geq |C|$  ( $|J' \setminus B'| \geq |C'|$ ), então ainda existe a obstrução do cografo induzida. Algum dos dois casos a seguir se aplica: **a)**  $J \setminus B$  ( $J' \setminus B'$ ) não possui clique de tamanho  $k + 1$  com  $I$  e  $B \cup D$  ( $B' \cup D'$ ) é  $K_{k+1}$  transversal para  $I \cup II \cup Q$  ( $III \cup IV \cup Q$ ), logo  $B \cup D \cup J'$  ( $B' \cup D' \cup J$ ) seria um  $K_{k+1}$  transversal para  $G$ ; **b)**  $(J \setminus B) \cup I$  e  $(J' \setminus B') \cup IV$  contêm clique de tamanho  $k + 1$ , originada de um vértice pendente, e não pode ser interceptada por  $B$  e  $B'$ , mas  $G[I \cup (II \setminus B) \cup (III \setminus B') \cup IV]$  induz uma obstrução da família  $G_2$  com a seguinte distribuição de vértices pelos grupos da Figura 4.3, onde  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v)$ , tal que  $v \in J \setminus B$ ;  $Q'_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v')$ , tal que  $v' \in J' \setminus B'$ :

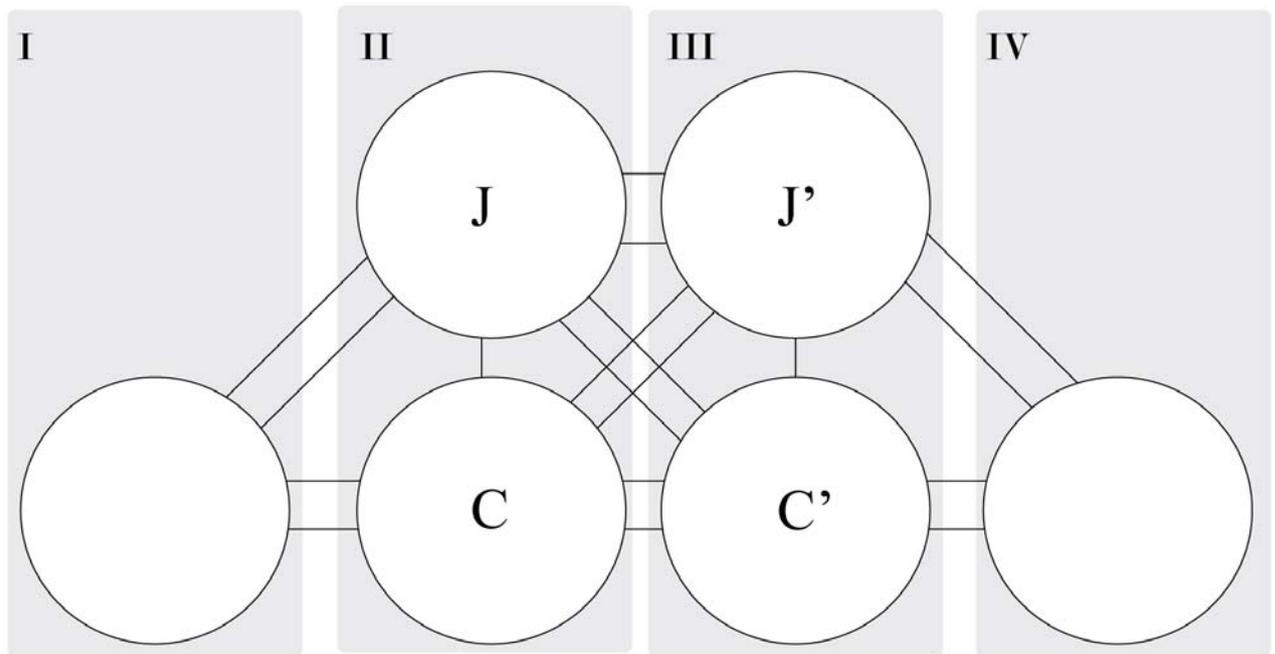


Figura 4.15: Exemplo dos conjuntos apresentados na prova do Lema 4.6.

grupo I:  $(Q'_1 \cap IV) \cup C$ ; grupo II:  $C' \cup (Q'_1 \cap III)$ ; grupo III:  $Q_1 \cap II$ ; e grupo IV:  $Q_1 \cap I$ .  
 A Figura 4.16 apresenta os conjuntos descritos e as relações de adjacências destes casos.

■

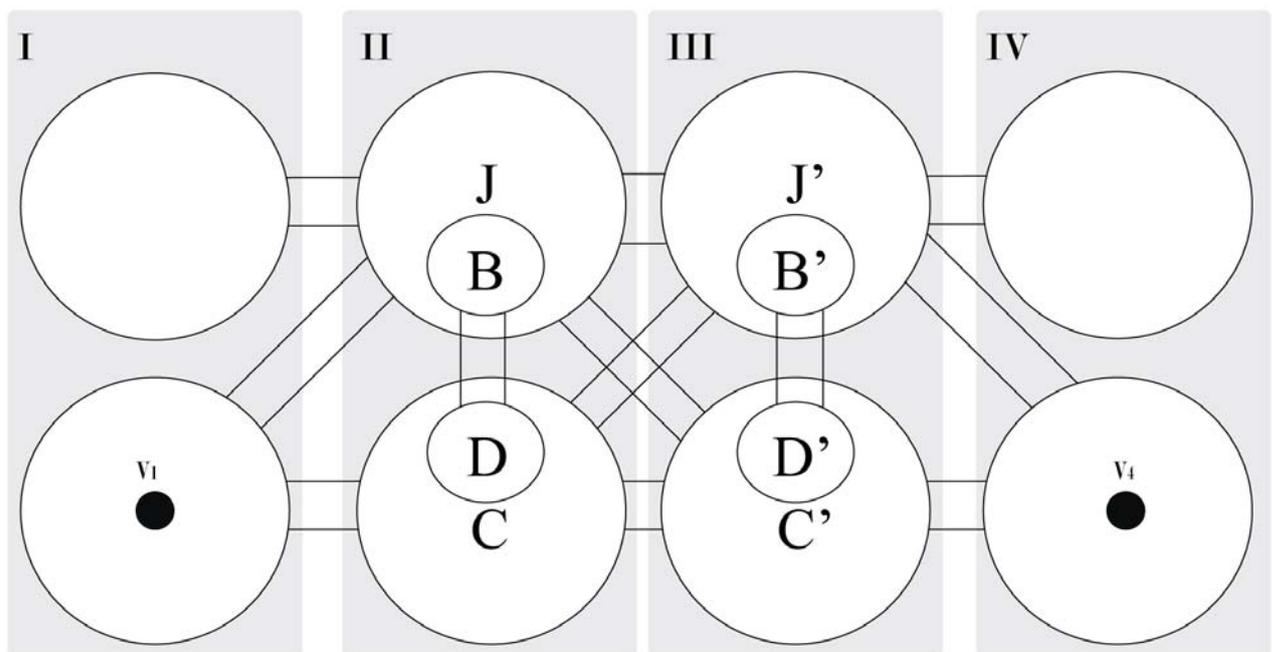


Figura 4.16: Exemplo dos conjuntos apresentados na prova do Lema 4.6.

**Corolário 4.4** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Então para todo  $v \in III$  e  $v' \in IV$ ,  $(v, v') \in E(G)$ .*

**Prova.** Suponha  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Seja  $V(G) = I \cup II \cup III \cup IV$  tal que  $I$  e  $IV$  contêm vértices  $v$  e  $v'$  criados por operação **pendente** em algum vértice dos grupos  $II$  e  $III$ , respectivamente. Sejam  $S = Q_1 \cap I$  e  $S' = Q'_1 \cap IV$ , onde  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v)$  e  $Q'_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v')$ . Por minimalidade,  $H = G[V(G) \setminus S']$  possui um  $K_{k+1}$  transversal  $Q$  e  $H' = G[V(G) \setminus S]$  possui um  $K_{k+1}$  transversal  $Q'$ , mas  $J = Q \cap II$  é um  $K_{k+1}$  transversal para  $I \cup II$ ; assim como  $J' = Q' \cap III$  é um  $K_{k+1}$  transversal para  $III \cup IV$ . Pelo Lema 4.6,  $G$  possui um  $K_{k+1}$  transversal ou  $G$  não é uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Absurdo, pois supomos  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ .

Como não são necessárias operações **pendente** nos grupos  $II$  e  $III$  para construir uma obstrução minimal, iremos assumir daqui para frente que  $III$  não possui operações **pendente**, nos levando a um grafo como na Figura 4.17. ■

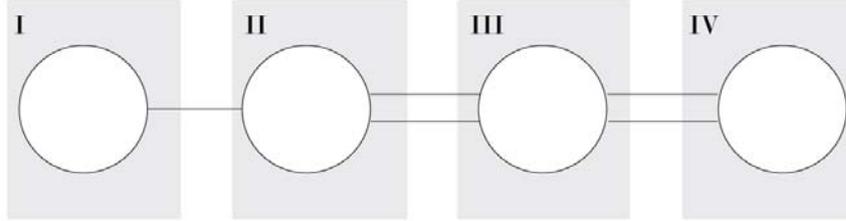


Figura 4.17: Estrutura de obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  com  $III + IV$ .

**Lema 4.7** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  e sua sequência de operações  $S$ . Então não existe nenhuma operação **gêmeo falso** em  $S$  aplicada a algum vértice  $v \in I$ .*

**Prova.** Suponha que exista  $v \in I$  que possua um **gêmeo falso**  $v'$  em  $V(G)$ . Sejam  $Q$  e  $Q'$  as maiores cliques induzidas em que  $v$  e  $v'$  estão, respectivamente. Se  $|Q| \leq |Q'|$ , escolha  $v$ , caso contrário escolha  $v'$ , e o retire do grafo. Então, por minimalidade, o grafo  $G' = G[(V(G) \setminus \{v\})]$  é  $(k, 1)$ -particionável e existe um  $K_{k+1}$  transversal  $C$  que intercepta todas as cliques de tamanho  $k + 1$  de  $G'$ . Como os vértices  $v$  e  $v'$  possuem a mesma vizinhança em  $II$ , então toda clique de tamanho  $k + 1$  que for gerada com a reinserção de  $v$  em  $G'$  já será tocada por  $C$  e, portanto, não vai gerar nenhuma clique de tamanho  $k + 1$  que não esteja coberta por  $C$ . Logo  $C$  é  $K_{k+1}$  transversal para  $G[I \cup II]$ , e assim existe um  $K_{k+1}$  transversal para  $G$ . Absurdo, pois supomos  $G$  obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

**Lema 4.8** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  e  $S$  sua sequência de operações. Sejam  $i$  e  $j$  o tamanho das maiores cliques induzidas em  $I$  e  $IV$ , respectivamente. Então  $i \leq k$  e  $j \leq k$ .*

**Prova.** Suponha  $i > k$  ( $j > k$ ). Então  $I$  ( $IV$ ) possui  $K_{k+1}$  e  $H = G[I \cup III \cup IV]$  possui duas cópias  $K_{k+1}$  independentes, pois todo vértice em  $IV$  ( $I$ ) está em ao menos uma clique  $K_{k+1}$ . Absurdo, pois supomos  $G$  obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

**Lema 4.9** *Toda obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  possui uma clique em  $III$  que é  $K_{k+1}$  transversal para  $III \cup IV$ .*

**Prova.** Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Suponha que não exista  $K_{k+1}$  transversal contida em  $III$  para  $G[III \cup IV]$ . Por minimalidade existe uma  $K_{k+1}$  transversal  $C \subset III \cup IV$ , tal que  $C \not\subset III$ .

Seja  $H = Q \cup III \cup IV$ , onde  $Q \in \mathcal{Q}_{k+1}(v_1)$ . Pela suposição  $H$  contém uma clique  $C$  que cobre todas as cliques de tamanho  $k + 1$ . Porém observe que  $H$  induz uma obstrução EDHG- $(k, 1)$ , pois para cobrir as cliques de tamanho  $k + 1$  contidas em  $III \cup IV$  a clique  $C$  deveria conter  $x$  tal que  $x \in IV$ ; e, pelo Lema 4.2, o vértice não pode ter excentricidade 3 e pertencer a clique que cobre o grafo. Porém,  $I \cap Q$  e  $II \cap Q$  são cliques e podemos renomear os conjuntos da seguinte forma:  $I$  passa a ser  $IV$ ;  $II$  passa a ser  $III$ ;  $III$  passa a ser  $II$ ; e  $IV$  passa a ser  $I$ . Isto é possível pois não existe vértice pendente em  $I$  e as operações realizadas são simétricas. Portanto, ou  $III$  contém um  $K_{k+1}$  transversal para  $G[III \cup IV]$ , ou  $II$  contém um  $K_{k+1}$  transversal para  $G[I \cup II]$  e podemos tratar analogamente ao caso em que  $III$  contém um  $K_{k+1}$  transversal. ■

**Corolário 4.5** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Então não existe um  $K_{k+1}$  transversal para  $G[I \cup II]$  que seja subconjunto de  $II$ .*

**Prova.** Suponha que exista  $C \subseteq II$  que é  $K_{k+1}$  transversal para  $G[I \cup II]$ . Pelo Lema 4.9, existe clique  $C' \subseteq III$  que é  $K_{k+1}$  transversal para  $G[III \cup IV]$ . Sabemos, pela construção do grafo  $G$ , que  $C \cup C'$  é clique, e pelo Lema 4.6  $G$  não poderia ser uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Absurdo. ■

Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Como  $II$  não possui  $K_{k+1}$  transversal para  $G[I \cup II]$ , e  $III$  possui  $K_{k+1}$  transversal para  $G[III \cup IV]$ , podemos assumir que

$G[III \cup IV]$  é uma clique e, sem perda de generalidade,  $III$  é uma clique e  $IV$  também é uma clique. Dessa forma, os grupos  $III$  e  $IV$  são formados por apenas operações **gêmeo verdadeiro**. Ainda, como sabemos que o vértice  $v_4$  está em clique de tamanho  $k + 1$ , sabemos que a quantidade de operações **gêmeo verdadeiro** em  $III$  e  $IV$  deve gerar uma clique de tamanho  $k + 1$ , portanto necessitamos de  $k - 1$  operações.

Assim, podemos afirmar que a Figura 4.18 apresenta a configuração para as obstruções minimais EDHG- $(k, 1)$ :

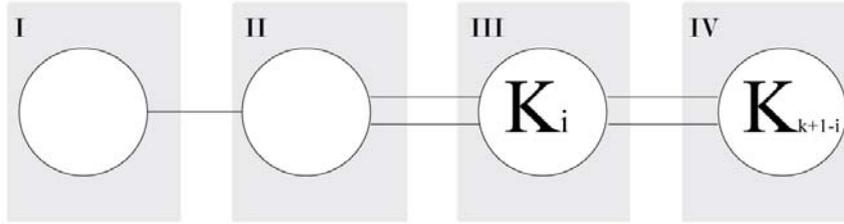


Figura 4.18: Estrutura da obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  -  $III$  e  $IV$  são cliques.

**Lema 4.10** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Então existe ao menos uma operação **gêmeo verdadeiro**, na sequência de operações de  $G$ , que é aplicada ao vértice  $v_1$ .*

**Prova.** Suponha que não seja aplicada nenhuma operação **gêmeo verdadeiro** a  $v_1$ . Pelo Lema 4.1  $v_1$  está em ao menos uma  $K_{k+1}$ . Mais especificamente existe  $Q \subseteq II$  tal que  $\{v_1, x\} \subset Q$ , onde  $Q \in \mathcal{Q}_{k+1}(v_1)$ .

Se  $Q = II$ , então o  $II$  deverá ser uma obstrução  $(k - 1, 1)$  de cografo<sup>1</sup> (o grupo  $II$  induz um cografo, pois este grupo é construído por operações **gêmeo verdadeiro** e **gêmeo falso**). Porém  $\{v_1\} \cup II \cup \{v_3\}$  induz uma obstrução da classe cografo- $(k, 1)$  ( $ProibidoCografo - (1 - 1, 1) + ProibidoCografo - (k - 1, 1) = I_2 + ProibidoCografo - (k - 1, 1)$ ), portanto não é obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ .

Se  $Q \subsetneq II$ , seja  $S = II \setminus Q$ , devemos considerar duas possibilidades: a) os vértices contidos em  $S$  possuem apenas cliques de tamanho  $k + 1$  que contém vértices de  $III$  ( $\{Q \mid Q \in \mathcal{Q}_{k+1}(x), x \in S\} \subset \{Q \mid Q \in \mathcal{Q}_{k+1}(y), y \in III\}$ ). Por minimalidade, o grafo induzido por  $G[V(G) \setminus S]$  é  $(k, 1)$ -particionável, então existe uma clique  $C$  em  $II \cup III$  que intercepta todas as cliques de tamanho  $k + 1$ . Pelo Lema 4.6, podemos ver que  $C$  é

<sup>1</sup>Suponha que não seja uma obstrução  $(k - 1, 1)$ . Então temos uma clique  $C \in II$  que intercepta todas as cliques de tamanho  $k$ , e conseqüentemente, todas as cliques  $K_{k+1}$  com  $v_1$  seriam interceptadas por  $C$ . Isto é absurdo, pois  $III$  possui clique  $C'$  que intercepta todas as cliques em  $G[III \cup IV]$ , e faz com que  $G[C \cup C']$  seja um  $K_{k+1}$  transversal para  $G$ .

$K_{k+1}$  transversal para  $G$ , pois  $C$  pode ser particionado em  $C' \subseteq II$  e  $C'' \subseteq III$  tal que estes cobrem todas as cliques contidas em  $G[I \cup II]$  e  $G[III \cup IV]$ , respectivamente; ou b) o conjunto de vértices  $S$  possui clique  $Q'$  de tamanho  $k + 1$  que não contém vértices em  $III$ , então  $G[Q \cup \{v_3\} \cup Q']$  é (mesmo sem o grupo  $IV$ ) uma obstrução (da família  $G_2$ ). Absurdo, pois supomos  $G$  obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

**Lema 4.11** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  e o primeiro  $P_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Sejam  $S$  e  $S'$  duas cliques máximas que contém  $v_1$  e  $v_3$  e estão contidas nos grupos  $I$  e  $III$ , respectivamente. Então  $j > i$ , onde  $j = |S|, i = |S'|$ .*

**Prova.**

A prova deste Lema é análoga a prova do Lema 4.10.

Sejam  $S \subseteq I$  e  $S' \subseteq III$  cliques máximas contendo  $v_1$  e  $v_3$ , respectivamente, e  $j = |S|$  e  $i = |S'|$ . Suponha  $j \leq i$ . O vértice  $v_1$ , pelo Lema 4.1, está em ao menos uma  $K_{k+1}$ . Mais especificamente a clique  $S$  está em ao menos uma clique de tamanho  $k + 1$ . Como  $j \leq k$ , a clique de tamanho  $k + 1$  que contém  $S$  possui vértices que estão em  $II$ , logo ou  $\forall x \in II$  então existe  $y \in S$  tal que  $x \in Q_1$ , onde  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(y)$  ( $S$  possui clique de tamanho  $k + 1$  com todos os vértices de  $II$ ); ou existem vértices  $x$  tais que para todo  $y \in S$  e não existe  $Q'_1$  tal que  $y \in Q'_1$ , onde  $Q'_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(y)$  ( $S$  possui clique de tamanho  $k + 1$  com um subconjunto de vértices de  $II$ ).

Se  $S$  possui  $K_{k+1}$  com todos os vértices  $II$ , então o  $II$  deverá ser uma obstrução  $(k - j, 1)$  para os cografos<sup>2</sup> (o grupo  $II$  é um cografo, pois este grupo é construído por operações gêmeo verdadeiro e gêmeo falso), porém  $S \cup II \cup S'$  induz uma obstrução de cografo- $(k, 1)$  ( $ProibidoCografo - (j - 1, 1) + ProibidoCografo - (k - j, 1) = (ProibidoCografo - (j, 0) \cup ProibidoCografo - (j, 0)) + ProibidoCografo - (k - j, 1) = 2K_i + ProibidoCografo - (k - j, 1)$ ), portanto não é obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ .

Se  $S$  não está em  $K_{k+1}$  com todos os vértices. Então existe um conjunto  $H$  que não possui  $K_{k+1}$  com  $S$ , então devemos considerar duas possibilidades: a)  $H$  possui apenas  $K_{k+1}$  com  $III$  e, por minimalidade,  $G[V(G) \setminus S]$  possui uma clique  $C$  em  $III$  que intercepta todas as cliques  $K_{k+1}$  e, portanto,  $G[C \cup (K_{k+1}(v_1) \cap II)]$  é  $K_{k+1}$  transversal para  $G$ ; ou b)  $S$  possui uma clique  $Q$  de tamanho  $k + 1$  que não contém vértices em  $III$ , então

<sup>2</sup>Suponha que não seja uma obstrução  $(k - j, 1)$ , então temos uma clique  $C \in II$  que intercepta todas as cliques de tamanho  $k - j + 1$ , e conseqüentemente, todas as cliques  $K_{k+1}$  com  $S$  seriam interceptadas por  $C$ . O que é absurdo, pois  $III$  possui clique  $C'$  que intercepta todas as cliques em  $G[III \cup IV]$  e faria com que  $G[C \cup C']$  fosse uma  $K_{k+1}$  transversal para  $G$ .

$G[\mathcal{K}_{k+1}[v_1] \cup v_3 \cup Q]$  é (mesmo sem o grupo  $IV$ ) uma obstrução da família  $G_2$ . Absurdo, pois supomos  $G$  obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

**Lema 4.12** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  que possua um conjunto conexo maximal  $S \subset I$ , tal que  $S$  contém um vértice que foi gerado por uma operação **pendente** (aplicada em  $v \in II$ ). Então para todo  $x \in Q_1 \setminus \{v\}$  e  $x \in I$ , temos  $x \in S$ , onde  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v)$ .*

**Prova.** Suponha que exista  $Q = Q_1 \cap I \not\subset S$ . Seja  $H = G[V(G) \setminus S]$ , por minimalidade, existe  $C$  que é  $K_{k+1}$  transversal para  $H[I \cup II]$  e é subconjunto de  $II$ , então  $v \in C$  ou algum vértice  $v'$  que é gêmeo verdadeiro de  $v$  está em  $C$  (pois a clique  $Q$ , que contém  $v$ , deve ser interceptada). Se  $v \in C$ , então  $C$  é a  $K_{k+1}$  transversal para  $G[I \cup II]$ . Se  $v \notin C$ , mas  $v' \in C$ , então  $(C \setminus \{v'\}) \cup \{v\}$  é  $K_{k+1}$  transversal para  $G$ . Absurdo, pois supomos  $G$  obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

**Lema 4.13** *Seja  $G$  uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  com um conjunto conexo maximal  $S \subset I$  tal que  $S$  contenha um vértice **pendente** (operação aplicada em  $v \in II$ ). Então não existe outro conjunto maximal  $S' \subset I$  que contenha outro vértice resultante de operação **pendente** (aplicada em  $v' \in II$ ).*

**Prova.** É fácil ver que, como  $v$  e  $v'$  não possuem  $K_{k+1}$  incluindo  $v_1$ , pelo Lema 4.12, então  $Q_1 \cup Q_2 \cup III \cup IV$  induz uma obstrução da família  $G_2$ , onde  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v_1)$  e  $Q_2 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v)$ . Absurdo, pois supomos  $G$  obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . ■

Reunindo todos os lemas, podemos assumir que temos duas estruturas para uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$   $H$ : a) Aquela que não possui operação **pendente** na sequência de operações; b) Aquela que possui operação **pendente** na sequência de operações.

a) Pelo Corolário 4.5, não podemos ter um  $K_{k+1}$  transversal para  $I \cup II$  estritamente contido em  $II$ , pois não teríamos obstrução neste caso. O conjunto  $I$  é uma clique pois não temos operação **pendente** em  $II$ , nem é aplicada operação **gêmeo falso** em  $I$ , pelo Lema 4.7. Portanto, seja  $j = |I|$ , concluímos que  $II$  é uma  $(k-j, 1)$ -obstrução minimal do cografo, pois  $II$  é cografo e pelo Lema 4.10 e Lema 4.11 todos os vértices devem estar em

uma clique de tamanho  $k + 1$  com algum dos vértices do conjunto  $I$ . Portanto mostramos que toda obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ , que não possui operação **pendente**, possui a estrutura da Figura 4.19.

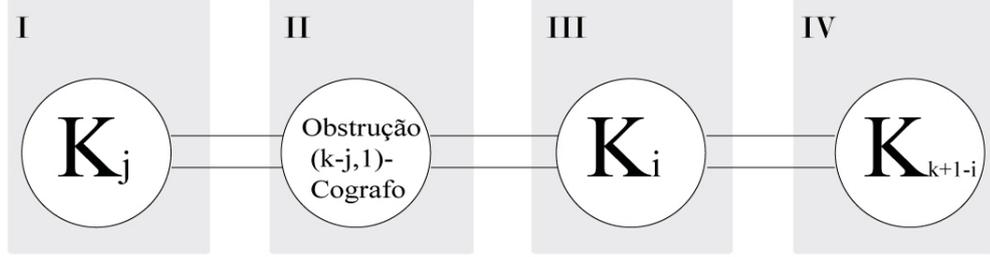


Figura 4.19: Estrutura de obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  sem operação **pendente**, onde  $2 \leq j \leq k$ ,  $i < j$ .

b) Quando aplicamos a operação **pendente** em  $v$  criando um vértice  $v'$ , isto implica que não mais precisamos aplicar a operação **pendente** e, pelo Lema 4.12, não existe  $v' \in I$  tal que  $v \in Q_1$ , onde  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k+1}(v')$ . Porém, pelo Lema 4.1,  $v_1$  deve estar em alguma  $K_{k+1}$ . Sejam  $Q \in \mathcal{Q}_{k+1}(v_1)$  e  $Q' \in \mathcal{Q}_{k+1}(v')$ , a clique  $Q \cup Q' \cup III \cup IV$  é uma obstrução, pois não podemos ter um  $K_{k+1}$  transversal para  $Q_1 \cup Q'$  que esteja contida em  $II$ . Pois as duas cliques não possuem vértices em comum e os vértices que são adjacentes a  $v_1$  e estão em  $II$  não são adjacentes aos vértices que são adjacentes a  $v'$  e estão em  $II$ . Então toda obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  que possui um vértice **pendente** possui a estrutura da Figura 4.20.

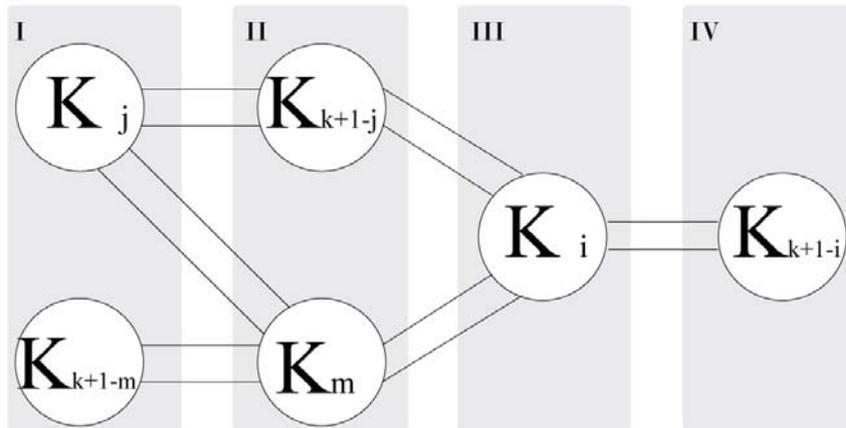


Figura 4.20: Estrutura de obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$  com operação **pendente**, onde  $2 \leq j \leq k$ ,  $i < j$ ,  $0 < m < k + 1 - j$ .

---

Cada combinação que satisfaça alguma das estruturas mostradas nas Figuras 4.19 e 4.20 é uma obstrução minimal EDHG- $(k, 1)$ . Assim terminamos a prova do Teorema 4.2 e mostramos que o grafo é  $(k, 1)$ -particionável se, e somente se, não contém  $G_1$  ou  $G_2$  induzidos. ■

# Capítulo 5

## Conclusão

Esta dissertação apresentou um estudo sobre uma subclasse particular de grafos perfeitos, que foram os grafos de distância hereditária. Estudamos um problema que na sua fórmula geral pertence à classe NP-Completo, porém quando restrito a certas classes de grafos, inclusive grafos de distância hereditária, podem ser resolvidos em tempo polinomial.

A maior contribuição desta dissertação foi a caracterização por subgrafos proibidos do grafo de distância hereditária- $(k, 1)$ . Para isso foram desenvolvidos vários resultados (teoremas, lemas, etc.) que culminaram na caracterização.

A partir dos resultados obtidos, podemos inferir famílias de subgrafos proibidos para os grafos de distância hereditária- $(1, l)$  (utilizando os complementos dos grafos obtidos com a família  $G_1$ ). Famílias que estudaremos em trabalhos futuros, a fim de generalizar os resultados encontrados nesta dissertação.

### 5.0.3 Trabalhos Futuros

- Caracterizar os grafos de distância hereditária- $(1, l)$ ;
- Caracterizar os grafos de distância hereditária- $(k, l)$ ;
- Pretendemos resolver o problema  $M$ -partição com restrições externas fixadas para os grafos DHG;
- Pretendemos desenvolver algoritmos para reconhecimento das estruturas proibidas e, conseqüentemente, algoritmo para reconhecer se o grafo DHG é  $(k, l)$ -particionável ou não;

# Referências

- [1] BANDELT, H.-J.; MULDER, H. Distance-hereditary graphs. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 41, 2 (1986), 182–208.
- [2] BRANDSTÄDT, A. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. *Discrete Mathematics* 152(1-3) (1996), 47–54.
- [3] BRANDSTÄDT, A.; ESPOSITO, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. Clique cycle-transversals in distance-hereditary graphs. In *VII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium* (2013).
- [4] BRANDSTÄDT, A.; LE, V. B.; SZYMCAK, T. The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics* 89 (1998), 59–73.
- [5] BRAVO, R. S. F.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. Characterization and recognition of  $p_4$ -sparse graphs partitionable in  $k$  independent sets and  $l$  cliques. *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011), 165–173.
- [6] BRAVO, R. S. F.; NOGUEIRA, L. T.; KLEIN, S. Cographs  $(k,l)$ -partitionable. *7th International Colloquium on Graph Theory. Electronic Notes in Discrete Mathematics* 22 (2005), 277–280.
- [7] BRAVO, R. S. F.; NOGUEIRA, L. T.; KLEIN, S. Obstruções de cografos- $(k,l)$ . *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2005), 2361–2369.
- [8] CORNEIL, D. G.; LERCHS, H.; BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. *Discrete Applied Mathematics* 3 (1981), 163–174.
- [9] CORNEIL, D. G.; PERL, Y.; STEWART, L. K. A linear recognition algorithm for cographs. *SIAM Journal on Computing* 14(4) (1985), 926–934.
- [10] FEDER, T.; HELL, P.; KLEIN, S.; MOTWANI, R. Complexity of graph partitions problems. *ACM symposium on Theory of computing* (1999), 464–472.
- [11] FULKERSON, D. R.; GROSS, O. A. Incidence matrices and interval graphs. *Pacific Journal of Mathematics* 15 (1965), 835–855.
- [12] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. New York, 1979.
- [13] GIOAN, E.; PAUL, C. Dynamic distance hereditary graphs using split decomposition. *International Symposium on Algorithms and Computation* 4835 (2007), 41–51.
- [14] HABIB, M.; PAUL, C. A simple linear time algorithm for cograph recognition. *Discrete Applied Mathematics* 145 (2005), 183–197.

- 
- [15] HAMMER, P. L.; SIMEONE, B. The splittance of a graph. *Combinatorica* 1, 3 (1981), 275–284.
- [16] HELL, P.; FEDER, T.; NOGUEIRA, L. T.; KLEIN, S.; PROTTI, F. List matrix partition of chordal graphs. *Theoretical Computer Science* 349 (2005), 52–66.
- [17] HELL, P.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004), 185–194.
- [18] HELL, P.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. Packing  $r$ -cliques in weighted chordal graphs. *Annals of OR* 138 (2005), 179–187.
- [19] HOÀNG, C. T. A class of perfect graphs. Master’s thesis., School of Computer Science, McGill University, Montreal, Canada, 1983.
- [20] HOWORKA, E. A characterization of distance-hereditary graphs. *The Quarterly Journal of Mathematics* 28, 112 (1977), 417–420.
- [21] JAMISON, B.; OLARIU, S.  $p_4$ -reducible graphs, a class of uniquely tree representable graphs. *Studies in Applied Mathematics* 81 (1989), 79–87.
- [22] JUNG, H. A. On a class of posets and the corresponding comparability graphs. *J. Combin. Theory Ser. 24 (B)* (1978), 125–133.
- [23] LERCHS, H. *On cliques and kernels*. Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, 1971.
- [24] LERCHS, H. *On the clique-kernel structure of graphs*. Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, 1972.
- [25] LESNIAK, L.; STRAIGHT, H. J. The cochromatic number of a graph. *Ars Combinatoria* 3 (1977), 39–46.
- [26] SACHS; HORST. On the berge conjecture concerning perfect graphs. *Combinatorial Structures and their Applications* (1970), 377–384.
- [27] SEINSCHKE, S. On a property of the class of  $n$ -colorable graphs. *Journal Combinatorial Theory B* (1974), 191–193.
- [28] STEWART, L. Cographs, a class of tree representable graphs. Master thesis, University of Toronto, Toronto, Ontario, 1978.
- [29] SUMNER, D. P. Dacey graphs. *J. Australian Math. Soc.* 18, 4 (1974), 492–502.
- [30] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e algoritmos computacionais*. Rio de Janeiro, 1983.